S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 511.331
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 11R42,
11R45, 11M20

НУЛИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, РАСПОЛОЖЕННЫЕ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Ш.А. Хайруллоев

Abstract: In this paper, we study the number of odd-order zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line. In proving the main theorem, we make substantial use of the estimate of a multiple trigonometric sum. Such trigonometric sums were first estimated by S. M. Voronin and A. A. Karatsuba. The best estimate belongs to A. A. Karatsuba. In this paper, using modern methods, namely the exponential pair method, we obtain a new uniform estimate in parameters of multiple trigonometric sums of the form W, which is used in studying odd-order zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line. The problem of non-triviality of the estimate of these trigonometric sums with respect to the parameter H is reduced to the problem of finding exponential pairs, the consequence of which is new non-trivial estimates of these sums if the condition $H \geq T^{\alpha+\varepsilon}$, $\alpha = 1515/4816$, is satisfied for the parameter H.

Keywords: Riemann zeta function, exponential pair, critical line, trigonometric sum, number of odd-order zeros, interval length, non-trivial estimate, absolute constant, short interval.

Khaurulloev, Sh.A., Zeroes of the Riemann zeta function located on short intervals of the critical line.

1 Введение

Нули дзета-функции Римана, расположенные на коротких промежутках критической прямой, являются и интересным и сложным исследованием в области аналитической теории чисел. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$, регулярно аналитически продолженная на всю комплексную плоскость за исключением единственной особой точки $s = 1$, стала основой для множества важных выводов в аналитической теории чисел.

Изучение нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой открывает новые возможности для более глубокого изучения простых чисел и их свойств. Это направление активно развивающееся и актуальное в математике, которое продолжает привлекать внимание широкого круга учёных математиков, способных расширить наши знания и продолжить путь для будущих открытий.

Выдающийся немецкий математик Бернхард Риман [1], сформулировал гипотезу, предполагающую, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана находятся на «критической прямой». Несмотря на множество исследований и экспериментов, эта гипотеза до сих пор остаётся не доказанной.

Первым важным результатом, связанным с расположением нулей дзета-функции на критической прямой, стала теорема, доказанная Г.Харди [2]. Он сумел доказать, что количество таких нулей бесконечно. Это открытие было значительным шагом в понимании свойств дзета-функции Римана и проложило путь для дальнейших исследований в этой области.

Г.Харди и Д.Литтлвуд [3] доказали следующее утверждение: *при любом положительном значении ε существует такое T_0, зависящее от ε, большее нуля, что для всех T, превышающих T_0, $H \geq T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.* Из этого следует, что на промежутке $(0, T)$ содержится более $T^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ нулей нечётного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.

Число нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, лежащих на промежутке $(0, T)$, обозначаем через $N_0(T)$. Упомянем важные исследования Г.Харди и Д.Литтлвуда, выполненные в 1921 году [4]. В ходе своих исследований, эти учёные доказали следующую теорему: *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$, $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T \geq T_0$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$ справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH.$$

В 1942 году выдающийся математик Атле Сельберг [5] успешно доказал усиленный вариант теоремы Харди, Литтлвуда, которая имеет значительное значение, то есть: *При выполнении условий теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH \ln T. \tag{1}$$

В оценке (1), проведённой А.Сельбергом, возникла интересная гипотеза о том, что неравенство (1) может быть выполнено и при меньших значениях H, то есть при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где α – фиксированное положительное число, меньшее $1/2$ (Гипотеза А.Сельберга) [5].

В 1976 году чешский математик Я.Мозер [6] получил новый результат в названной проблеме: *При $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5/12}\ln^3 T$ справедливо неравенство*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH,$$

$c > 0$ – абсолютная постоянная.

Это результат был представлен на международной конференции по теории чисел, которая проходила в Москве с 14 по 19 сентября 1981 г.

В 1984 году выдающийся математик А.А.Карацуба [7] доказал гипотезу Сельберга при $\alpha = 27/82$, то есть доказал следующую теорему: *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда существуют положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH\ln T.$$

А.А.Карацуба высказал захватывающее утверждение о числе $\alpha = 27/82$, которое может быть заменено и меньшим числом [7]. Однако, следует обратить внимание на то, что это связано с весьма сложными оценками специального вида тригонометрическими сумм.

2 Формулировка основной результат

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [8], следуя работам [9]–[11], доказывается гипотеза А.Сельберга, когда $\alpha = 1515/4816$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001,

$$T \geq T_0(\varepsilon) > 0, \quad H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon}.$$

Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH\ln T.$$

Отметим, что показатель $\theta(\kappa;\lambda)$ в теореме 1 ранее рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2 \leq R$, а также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leq N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшую оценку сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ на данный момент получили J.Bourgain и N.Watt [12]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \le \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3\cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Из этого и из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0,001, $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{1515/4816+\varepsilon}$. Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge cH\ln T.$$

3 Доказательство теоремы

Доказательство. Пусть $X = T^{0.01\varepsilon}$. Рассмотрим функцию Харди-Сельберга $F(t)$, при $T \le t \le T+H$:

$$F(t) = e^{i\theta(t)}\zeta(0,5+it)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2, \quad e^{i\theta(t)} = \frac{\pi^{-it/2}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})}{\left|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})\right|},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \sum_{\nu\le X}\frac{\beta(\nu)}{\sqrt{\nu}}\nu^{-it}, \quad \beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1-\dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1\le\nu<X,\\ 0, & \nu\ge X,\end{cases}$$

а действительные числа $\alpha(\nu)$ определяются из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}, \quad Res > 1.$$

Из определения функции $F(t)$ и функционального уравнения $\zeta(s)$ вытекает, что функция $F(t)$ принимает действительные значения при действительных t, а действительные нули $F(t)$ нечётного порядка являются действительными нулями нечётного порядка функции $\zeta(0,5+it)$.

Предположим, что $h = A\ln^{-1}T$, где A – константа, значение которой мы уточним позже. Обозначим буквой E подмножество интервала $(T, T+H)$, на которой выполняется неравенство

$$\int_t^{t+h}|F(u)|du > \left|\int_t^{t+h}F(u)du\right|, \quad t\in E.$$

Поскольку за пределами E эти интегралы оказываются равными, тогда

$$\int_T^{T+H}\int_t^{t+h}|F(u)|dudt \le \int_E dt\left(\int_t^{t+h}|F(u)|du\right) + \int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h}F(u)du\right|dt.$$

Используя неравенство Коши можно получить следующее соотношение:

$$I_1 \le \sqrt{\mu(E)I_2} + \sqrt{HI_3}, \tag{2}$$

где

$$I_1 = \int\limits_T^{T+H} \int\limits_t^{t+h} |F(u)| du dt, \quad I_2 = \int\limits_T^{T+H} \left(\int\limits_t^{t+h} |F(u)| du \right)^2 dt,$$

$$I_3 = \int\limits_T^{T+H} \left| \int\limits_t^{t+h} F(u) du \right|^2 dt.$$

Оценивая снизу интеграла I_1 и сверху оценивая интегралы I_2, I_3, получаем следующую оценку снизу для меры множества $\mu(E)$:

$$\mu(E) > c_1 H, \quad c_1 > 0,$$

отсюда выводится справедливость теоремы.

1. Оценка интеграла I_1 снизу. В первую очередь, мы последовательно выведём следующие соотношения:

$$I_1 \geq h \int\limits_{T+h}^{T+H} |F(u)| du \geq h \left| \int\limits_{T+h}^{T+H} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|. \tag{3}$$

Через Γ – обозначим прямоугольник с вершинами: $0,5 + i(T+h)$, $2 + i(T+h)$, $2 + i(T+H)$, $0,5 + i(T+H)$. В этом прямоугольнике функция $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + it\right)$ аналитична и однозначна. Тогда по теореме Коши имеет место равенство

$$\int\limits_\Gamma \zeta(s) \varphi^2(s) ds = 0,$$

которое можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_{T+h}^{T+H} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) dt = \int\limits_{T+h}^{T+H} \zeta(2+it) \varphi^2(2+it) dt -$$

$$-i \int\limits_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+H)) \varphi^2(\sigma + i(T+H)) d\sigma +$$

$$+ i \int\limits_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+h)) \varphi^2(\sigma + i(T+h)) d\sigma. \tag{4}$$

Используя определения функции $\varphi(s)$, при $Res > 1$ имеем

$$\zeta(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu_1 < X} \sum_{\nu_2 < X} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{(n\nu_1\nu_2)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причём $|a(n)| \le \tau_3(n)$. Отсюда имеем

$$\int\limits_{T+h}^{T+H} \zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt = H - h + O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(n)}{n^2 \ln n}\right).$$

В силу сходимости ряда, стоящего в левой части последнего равенства, находим

$$\int\limits_{T+h}^{T+H} \zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt = H - h + O(1). \tag{5}$$

При $\sigma \ge 1/2$, воспользуюсь оценками

$$|\varphi(s)| \le 2\sqrt{X}, \quad \zeta(\sigma+it) = O\left(t^{1/6}\ln t\right), \quad \varphi(\sigma+it) = O(\sqrt{X}),$$

получаем

$$\int\limits_{1/2}^{2} \zeta(\sigma+i(T+H))\varphi^2(\sigma+i(T+H))d\sigma = O\left(T^{1/6}X\ln T\right), \tag{6}$$

$$\int\limits_{1/2}^{2} \zeta(\sigma+i(T+h))\varphi^2(\sigma+i(T+h))d\sigma = O\left(T^{1/6}X\ln T\right). \tag{7}$$

Подставляя найденные оценки (5)–(7) в (4), далее в (3) имеем следующую оценку снизу для интеграла I_1:

$$I_1 \ge hH - h^2 + O\left(T^{1/6}X\ln T\right).$$

Для оценки сверху интегралов I_2 и I_3 пользуемся функциональным уравнением функции Харди-Сельберга $F(t)$, $T \le t \le T+H$, $X = T^{0.001\varepsilon}$

$$F(t) = F_1(t) + \overline{F_1(t)} + O\left(t^{-1/4}X^2\ln t\right),$$

где

$$F_1(t) = e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda < \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}, \quad \theta_1(t) = t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8},$$

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_2/\nu_1=\lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_1},$$

$\nu_1, \nu_2 < X$, λ – рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X. Заменяя $P_1 = \sqrt{t/(2\pi)}$ на $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, и $\theta_1(t)$ на $\theta(t) = t\ln P - T/2 - \pi/8$ находим

$$F_1(t) = F_0(t) + R_1 + R_2,$$

где

$$F_0(t) = e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda<P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it},\ R_1 \ll \frac{H^2}{T} \sum_{\lambda<P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it},\ R_2 \ll \left| \sum_{P\le\lambda\le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} \right|.$$

Тривиально оценивая суммы R_1 и R_2, находим

$$F_1(t) = F_0(t) + O(\ln^{-5} T).$$

Таким образом, имеем

$$F(t) = F_0(t) + \overline{F_0(t)} + O(\ln^{-5} T). \tag{8}$$

Предположим, что T удовлетворяет равенству $T/2 + \pi/8 = 2\pi k$, где k - целое число, тогда

$$F_0(t) = e^{i\ln P} \sum_{\lambda<P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

2. Оценка интеграла I_2 сверху. Применяя неравенство Коши к внутреннему интегралу, получим

$$I_2 \le \int\limits_T^{T+H} \int\limits_t^{t+h} |F(u)|^2 du \int\limits_t^{t+h} dudt \le h^2 \int\limits_T^{T+H+h} |F(u)|^2 du.$$

Далее, используя формулу (8), находим

$$I_2 \le h^2 \int\limits_T^{T+H+h} \left| F_0(u) + \overline{F_0(u)} + O(\log^{-5} T) \right|^2 du \ll h^2 \left(J + H\mathcal{L}^{-10} \right),$$

где

$$J = \int\limits_T^{T+H_1} |F_0(t)|^2 dt, \quad H_1 = H + h, \quad \mathcal{L} = \ln T.$$

А теперь оценим сверху интеграл J. Имеем

$$J = \int\limits_0^{H_1} |F_0(T+t)|^2 dt \le \int\limits_0^{H_1} e^{1-(t/H_1)^2} |F_0(T+t)|^2 dt \le$$

$$\le e \sum_{\lambda_1<P} \sum_{\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H_1}\right)^2 + it\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) dt.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2 - i\alpha t\right) dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \right),$$

при вещественном значении α, имеем

$$J \le e\sqrt{\pi}H_1 \sum_{\lambda_1<P}\sum_{\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представив последнюю двукратную сумму как сумму двух слагаемых, одна из которых возникает, когда $\lambda_1=\lambda_2$, получим оценку

$$J \ll H_1(\Sigma_0+W_0),$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_0 = \left|\sum_{\lambda_1<P}\sum_{\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)\right|.$$

Далее для оценки Σ_0 вычислим при действительном числе θ, $1/4\le\theta<1/2$, сумму

$$\Sigma(\theta) = \sum_{\lambda<Y}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}. \tag{9}$$

Предполагая, что $\sqrt{P}\le Y\le P$ и, имея ввиду определение значений $a(\lambda)$, λ, последовательно находим

$$\Sigma(\theta) = \sum_{\lambda<Y}\frac{1}{\lambda^{2\theta}} \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}=\lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^\theta\nu_2^{1-\theta}\nu_3^\theta\nu_4^{1-\theta}} \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}<Y}\frac{1}{n_1^\theta n_2^\theta}.$$

Пусть $(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)=q$. Отсюда $\nu_1\nu_4=aq$, $\nu_2\nu_3=bq$, $(a,b)=1$. Таким образом, из равенства $n_1\nu_1\nu_4=n_2\nu_2\nu_3$ имеем $an_1=bn_2$, $n_1=bm$, $n_2=am$. Следовательно

$$\sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}<Y}\frac{1}{n_1^\theta n_2^\theta} = \sum_{\frac{bm\nu_1}{\nu_2}=\frac{am\nu_3}{\nu_4}<Y}\frac{1}{(m^2ab)^\theta} = \frac{1}{a^\theta b^\theta}\sum_{m<\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}}\frac{1}{m^{2\theta}}.$$

Применяя формулу суммирования Эйлера-Маклорена к полученной сумме, имеем:

$$\sum_{\frac12<m<\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}}\frac{1}{m^{2\theta}} = \int_{1/2}^{\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}}\frac{dx}{x^{2\theta}} + \left(\frac12-\left\{\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}\right\}\right)\left(\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}\right)^{-2\theta} + 2\theta\int_{1/2}^{\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}}\frac{\rho(x)dx}{x^{1+2\theta}} =$$

$$= \frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}\cdot\frac{\nu_2^{1-2\theta}}{\nu_1^{1-2\theta}b^{1-2\theta}} + c(\theta) + O\left(\frac{\nu_1^{2\theta}b^{2\theta}}{\nu_2^{2\theta}Y^{2\theta}}\right),$$

где

$$c(\theta)=\frac{2^{2\theta-1}}{2\theta-1}+2\theta\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{\rho(x)dx}{x^{1+2\theta}}.$$

Сверху оценим величину $c(\theta)$:

$$|c(\theta)|\leq\frac{2^{2\theta-1}}{1-2\theta}+\theta\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+2\theta}}=\frac{2^{2\theta-1}}{1-2\theta}+2^{2\theta-1}=\frac{2^{2\theta}(1-\theta)}{1-2\theta}\leq\frac{2(1-\theta)}{1-2\theta}.$$

Таким образом, для $\Sigma(\theta)$ имеем

$$\begin{aligned}\Sigma(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}&\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\cdot\frac{1}{a^{\theta}b^{\theta}}\times\\ &\times\left(\frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}\cdot\frac{\nu_2^{1-2\theta}}{\nu_1^{1-2\theta}b^{1-2\theta}}+c(\theta)+O\left(\frac{\nu_1^{2\theta}b^{2\theta}}{\nu_2^{2\theta}Y^{2\theta}}\right)\right)=\\ &=\frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}S(\theta)+c(\theta)S(1-2\theta)+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2 X\right),\end{aligned}$$

где

$$S(\theta)=\sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\\(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)=q}}\left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}.$$

Вводя следующее обозначение в (9): $Y=P$, $\theta=1/2-(2\ln P)^{-1}$ и, учитывая, что $\lambda>1/P$, получим

$$\Sigma(\theta)=\sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}\lambda^{1/\ln P}>\left(\frac{1}{P}\right)^{1/\ln P}\sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}=e^{-1}\Sigma_0.$$

Так как $\theta=1/2-(2\ln P)^{-1}<1/2$, используя оценку

$$S(\theta)\ll X^{2\theta}\ln^{-1}X,$$

находим

$$\Sigma(\theta)=\frac{P^{1-2\theta}}{1-2\theta}S(\theta)+c(\theta)S(1-2\theta)+O\left(\frac{X^2\ln^2 X}{P^{2\theta}}\right)\ll\frac{\ln P}{\ln X}.$$

Следовательно, получим

$$\Sigma_0\ll\frac{\ln P}{\ln X}. \tag{10}$$

Для оценки суммы W_0 и других подобных сумм, которые появляются ниже, будем рассматривать следующую сумму вида

$$W=\left|\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2}\right|,$$

где $H_1=H+h$ или $H_1=H$ и $B(\lambda)$ – произвольное комплексное число с условием $|B(\lambda)|\leq B$.

Рассмотрим слагаемые суммы W, у которых $\lambda_2 > \lambda_1\left(1+\frac{\mathcal{L}}{H}\right)$; для таких слагаемых

$$\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \ln\left(1+\frac{\mathcal{L}}{H}\right) > \frac{\mathcal{L}}{2H}.$$

Обозначая через W' часть суммы W с такими условиями, имеем

$$W' \ll B^2 \sum_{\lambda_1\left(1+\frac{\mathcal{L}}{H}\right)<\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} e^{-\mathcal{L}^2/4} \ll B^2 e^{-0{,}1\mathcal{L}^2}.$$

Далее рассматриваем остальные слагаемые с условиями $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1\left(1+H^{-1}\mathcal{L}\right)$. Интервал изменения чисел λ_1 разделим целыми числами Λ на $\ll \mathcal{L}$ интервалов, вида $\Lambda < \lambda_1 \le \Lambda_1 \le 2\Lambda$. Если обозначить $W(\Lambda)$ наибольшую полученную сумму, тогда справедливо неравенство

$$W \ll \mathcal{L}W(\Lambda) + B^2 e^{-0.1\mathcal{L}^2}.$$

Если $\Lambda \le HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, то в силу того, что λ_1, λ_2 – рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X, будем иметь

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{b_1},\ \lambda_2 = \frac{a_2}{b_2},\ \lambda_2 > \lambda_1,\ b_1, b_2 \le X, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1b_2} \ge \frac{1}{X^2},$$

то есть

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1} \ge 1 + \frac{1}{\lambda_1X^2} \ge 1 + 0.5H^{-1}\mathcal{L}$$

и, оценивая сумму $W(\Lambda)$ при $\Lambda \le HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, аналогично как сумм W', находим, что

$$W(\Lambda) = O(B^2 e^{-0.1\mathcal{L}^2}).$$

Далее, не ограничивая общности можно считать, что $\Lambda > HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, пусть $B(\lambda) = 1$, если $W(\Lambda)$ получена из W_0 и $B(\lambda)$, если $W(\Lambda)$ получена из W. Тогда

$$W(\Lambda) = \left|\sum_{\Lambda<\lambda_1\le\Lambda_1}\ \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_1(1+H^{-1}\mathcal{L})} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2}\right|,$$

$$HX^{-2}\mathcal{L}^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \le 2\Lambda < P.$$

Имея ввиду определения $a(\lambda_1)$ и $a(\lambda_2)$, получим

$$W(\Lambda) = \left|\sum_{\Lambda<\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\le\Lambda_1}\ \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}<\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\le\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}(1+H^{-1}\mathcal{L})} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^{iT}\times\right.$$

$$\left.\times B\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B\left(\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2}\right|.$$

Зафиксируем ν_1, ν_2, ν_3, ν_4; пусть $\dfrac{\nu_2\nu_3}{\nu_1\nu_4}=\dfrac{a}{b}$, $(a,b)=1$. Полагая $N=\Lambda\nu_2/\nu_1$, $N_1=\Lambda_1\nu_2/\nu_1$, рассмотрим сумму W_1 по n_1, n_2,

$$W_1=\left|\sum_{N<n_1\le N_1}\ \sum_{n_1ba^{-1}<n_2\le n_1ba^{-1}(1+H^{-1}\mathcal{L})}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2a}{n_1b}\right)^{iT}\times\right.$$
$$\left.\times B\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B\left(\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{n_2a}{n_1b}\right)^2}\right|.$$

Справедливо неравенство:

$$W(\Lambda)\le\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\,W_1.$$

Далее оценим W_1. Представив n_1 и n_2 в виде арифметических прогрессий соответственно с разностями a, и b, то есть

$$n_1=am_1+r_1,\ 0\le r_1<a,\ (N-r_1)a^{-1}<m_1\le(N_1-r_1)a^{-1},$$
$$n_2=bm_2+r_2,\quad 0\le r_2<b,$$
$$m_1+r_1a^{-1}-r_2b^{-1}<m_2\le m_1+r_1a^{-1}-r_2b^{-1}+\left(m_1+r_1a^{-1}\right)H^{-1}\mathcal{L},$$

вводя обозначение $\xi=r_1a^{-1}-r_2b^{-1}$, $\xi_1=\left(m_1+r_1a^{-1}\right)H^{-1}\mathcal{L}$, и делая суммирование по r_1, r_2 внешним, приходим к следующему соотношению:

$$W_1\le\sum_{0\le r_1<a}\ \sum_{0\le r_2<b}W_2,$$

где

$$W_2=\left|\sum_{(N-r_1)a^{-1}<m_1\le(N_1-r_1)a^{-1}}\ \sum_{m_1+\xi<m_2\le m_1+\xi+\xi_1}\frac{1}{\sqrt{(am_1+r_1)(bm_2+r_2)}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{m_2+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}\right)^{iT}B\left(\frac{(am_1+r_1)\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B\left(\frac{(bm_2+r_2)\nu_3}{\nu_4}\right)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{m_2+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}\right)^2}\right|.$$

Предположим, что $m_2=m_1+h$; тогда из условий

$$1<\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}=\frac{n_2a}{n_1b}=\frac{(bm_2+r_2)a}{(am_1+r_1)b}=\frac{m_2+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}=\frac{m_1+h+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}$$

вытекает, что $h\ge0$, а если $h=0$, тогда $r_2b^{-1}>r_1a^{-1}$, поэтому

$$W_2=\left|\sum_{(N-r_1)a^{-1}<m_1\le(N_1-r_1)a^{-1}}\ \sum_{\xi<h\le\xi+\xi_1}\frac{B_1(m_1)B_2(m_1;h)}{\sqrt{(am_1+r_1)(bm_1+r+r_2)}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{m_1+h+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{m_1+h+r_2b^{-1}}{m_1+r_1a^{-1}}\right)^2}\right|,$$

где

$$B_1(m_1) = B\left(\frac{(am_1+r_1)\nu_1}{\nu_2}\right), \quad \overline{B_2(m_1;h)} = B\left(\frac{(bm_1+bh+r_2)\nu_3}{\nu_4}\right).$$

Заменяя порядки суммирования по h и m_1, приходим к неравенству

$$W_2 \le \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{0\le h\le H_2} \left| \sum_{M<m\le M_1} E(m,h)\left(\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right)^{iT} \right|, \qquad (11)$$

где введены новые обозначения:

$$E(m,h) = \frac{B_1(m_1)B_2(m;h)}{\sqrt{(m+\xi_2)(m+h+\xi_3)}} e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right)^2},$$

$$H_2 = 2N_1a^{-1}H^{-1}\mathcal{L}, \quad \xi_2 = r_1a^{-1}, \quad \xi_3 = r_2b^{-1}, \quad Na^{-1} < M \le M_1 \le N_1a^{-1}.$$

В неравенстве (11) к внутренней сумме по m применяем преобразования Абеля, находим

$$\sum_{M<m\le M_1} E(m,h)\left(\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right)^{iT} = -\int_M^{M_1} C(u)E'_u(u,h)du + E(M_1,h)C(M_1),$$

где

$$C(u) = \sum_{M<m\le u} e\left(\frac{T}{2\pi}\ln\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right), \quad |E(u,h)| \le \frac{B_0^2}{u}$$

Поскольку функция $E(u,h)$ кусочно монотонна, то переходя к оценке (11), находим

$$\left| \sum_{M<m\le M_1} E(u,h)\left(\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right)^{iT} \right| \ll \frac{B_0^2}{M}\max_{u\le M_1}|C(u)|.$$

Следовательно, получим

$$W_2 \le \frac{B_0^2}{M\sqrt{ab}} \sum_{0\le h\le H_2} \left| \sum_{M<m\le u} e\left(\frac{T}{2\pi}\ln\frac{m+h+\xi_3}{m+\xi_2}\right) \right|.$$

Оценка суммы $C(u)$. Для оценки суммы $C(u)$ воспользуемся методом экспоненциальных пар [8]. Положим,

$$f(u) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{u+h+\xi_3}{u+\xi_2}, \quad B = u-M \le M_1-M \le M, \quad A = \frac{T|h+\xi_3-\xi_2|}{M^2}.$$

Найдём производную k -го порядка функции $f(u)$ $(k=1,2,...)$:

$$f^{(k)}(u) = \frac{(-1)^k(k-1)!T(h+\xi_3-\xi_2)}{2\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(u+\xi_2)^{k+j}(u+h+\xi_3)^{k-j}},$$

Поэтому

$$AB^{1-k} \ll f^{(k)}(u) \ll AB^{1-k}.$$

Следовательно, для любой экспоненциальной пары $(\kappa;\lambda)$, имеем

$$W_2 \ll \frac{B_0^2}{M\sqrt{ab}} \sum_{0\le h\le H_2} \left(\frac{T|h+\xi_1-\xi_2|}{M^2}\right)^{\kappa} M^{\lambda}.$$

Имея в виду, что $|h+\xi_1-\xi_2| \ll H_2 \ll Na^{-1}H^{-1}L$, $Na^{-1} < M \le 2Na^{-1}$, получим

$$W_2 \ll \frac{B_0^2}{\sqrt{ab}} M^{-1-2\kappa+\lambda} T^{\kappa} H_2^{\kappa+1} \ll \frac{B_0^2}{\sqrt{ab}} N^{-\kappa+\lambda} a^{\lambda-\kappa} T^{\kappa} H^{-\kappa-1} \mathcal{L}^{\kappa+1}.$$

Подставляя найденную оценку для W_2 в выражение для W_1, имеем

$$W_1 \ll B_0^2 N^{-\kappa+\lambda} a^{0,5+\lambda-\kappa} b^{0,5} T^{\kappa} H^{-\kappa-1} \mathcal{L}^{\kappa+1}.$$

Учитывая, что $N = \dfrac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\nu_2\nu_3}{\nu_1\nu_4}$, $0,5+\lambda-\kappa > 0.5$, находим

$$W_1 \ll \nu_1^{0,5+\kappa-\lambda} \nu_2^{2(\lambda-\kappa)+0,5} \nu_3^{0,5+\lambda-\kappa} \nu_4^{0,5} T^{\kappa} H^{-\kappa-1} \mathcal{L}^{\kappa+1} B_0^2 \Lambda^{\lambda-\kappa}.$$

Подставляя найденную оценку в выражение для $W(\Lambda)$, и суммируя по ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 получим

$$W(\Lambda) \ll B_0^2 \Lambda^{\lambda-\kappa} T^{\kappa} H^{-\kappa-1} X^{4+2(\lambda-\kappa)} \mathcal{L}^{\kappa+1}.$$

Так как $HX^{-2}\mathcal{L}^{-1} < \Lambda < P = \sqrt{\dfrac{T}{2\pi}}$ и $0 \le \lambda-\kappa \le 1$, то

$$W(\Lambda) \ll B_0^2 T^{\frac{\lambda-\kappa}{2}+\kappa} H^{-\kappa-1} X^{4+2(\lambda-\kappa)} \mathcal{L}^{\kappa+1} \ll B_0^2 T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} H^{-\kappa-1} X^{7}.$$

Согласно условию теоремы $H = T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\varepsilon}$ и определению экспоненциальных пар $0 \le \kappa \le 0,5$, поэтому находим

$$W(\Lambda) \ll B_0^2 \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\frac{0,07\varepsilon}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1} \ll B_0^2 T^{-0,93\varepsilon}.$$

Подставляя найденную оценку в выражение для W, и учитывая определение величин B и B_0, имеем

$$W \ll \mathcal{L}W(\Lambda) + B^2 e^{-0.1\mathcal{L}^2} \ll B_0^2 T^{-0,93\varepsilon}\mathcal{L} + B^2 e^{-0.1\mathcal{L}^2} \ll B\ T^{-0.9\varepsilon}. \quad (12)$$

Таким образом, для оценки двойной суммы W_0, полагая в определении W, $B(\lambda_1) = 1$, $B_0 = const$, и учитывая (12), получим:

$$W_0 \ll T^{-0.9\varepsilon}.$$

Тем самым находим оценку интеграла I_2:

$$I_2 \ll h^2 \left(H_1(\Sigma_0 + W_0) + H\mathcal{L}^{-10}\right) \ll c(\varepsilon) h^2 H_1.$$

3. Оценка интеграла I_3 сверху. Аналогично оценке I_2, применяя соотношение (8), мы приходим к неравенству

$$I_3 = \int\limits_T^{T+H} \left| \int\limits_t^{t+h} F(u)du \right|^2 dt \ll J + Hh^2\mathcal{L}^{-10},$$

$$J = \int_{T}^{T+H} \left| \int_{t}^{t+h} F_0(u)du \right|^2 dt, \quad F_0(u) = e^{iu\ln P} \sum_{\lambda<P} \frac{a^2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-iu}.$$

Пусть существующее положительное число ε_1 не превышает 0,1; его более точное значение будет уточнено позже. Разделяя суммирование в $F_0(u)$ по параметру λ на две части: $\lambda < P^{1-\varepsilon_1}$, $P^{1-\varepsilon_1} \le \lambda < P$, мы получаем следующее соотношение

$$J \ll J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{T}^{T+H} \left| \int_{t}^{t+h} \sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du \right|^2 dt,$$

$$J_2 = \int_{T}^{T+H} \left| \int_{t}^{t+h} \sum_{P^{1-\varepsilon_1}\le\lambda<P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du \right|^2 dt.$$

Приступаем к оценке интеграла J_1. Начнём с интегрирования по переменной u, что приведёт нас к следующей оценке

$$J_1 = \int_{T}^{T+H} \left| \sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\ln(P/\lambda)} \right|^2 dt.$$

Используя метод, который мы применяли для оценки I_2, проведем аналогичные рассуждение, находим

$$J_1 \le e \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/H)^2} \left| \sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+H)} \frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\ln(P/\lambda)} \right|^2 dt \ll H(\Sigma_1 + W_1),$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda\ln^2(P/\lambda)},$$

$$W_1 = \left| \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} \right|,$$

$$B(\lambda) = \frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\ln(P/\lambda)}.$$

Для оценки Σ_1, используя неравенство $\ln P/\lambda > \varepsilon_1 \ln P$ и соотношения (10), получим

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda\ln^2(P/\lambda)} < \frac{1}{\varepsilon_1^2\ln^2 P} \sum_{\lambda<P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda} \ll \frac{1}{\varepsilon_1^2 \ln P \ln X}.$$

Чтобы оценить W_1, положим в определении W

$$B(\lambda)=\frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\ln(P/\lambda)},\quad \lambda<P^{1-\varepsilon_1}$$

и $B(\lambda)=0$ при $\lambda\geq P^{1-\varepsilon_1}$. Тогда из (12) следует следующая оценка:

$$W_1\ll\left(A\varepsilon_1^{-1}\mathcal{L}^{-2}+\varepsilon_1^{-2}\mathcal{L}^{-2}\right)T^{-0{,}9\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$J_1\ll H(\Sigma_1+W_1)\ll H\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2\ln P\ln X}+\left(A\varepsilon_1^{-1}\mathcal{L}^{-2}+\varepsilon_1^{-2}\mathcal{L}^{-2}\right)T^{-0{,}9\varepsilon}\right).$$

Интеграл J_2 можно оценить аналогично тому, как была проведена оценка интеграла I_2:

$$J_2\ll h^2\int\limits_T^{T+H_1}\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_1}\leq\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it}\right|^2dt\ll H_1h^2(\Sigma_2+W_2),$$

где

$$\Sigma_2=\sum_{P^{1-\varepsilon_1}\leq\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda},\quad H_1=H+h,$$

$$W_2=\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_1}\leq\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2}\right|.$$

Сумму Σ_2 представим как разность двух сумм типа $\Sigma(\theta)$ соответственно с $Y=P$ и $Y=P^{1-\varepsilon_1}$, полагая $\theta=1/2-(2\ln P)^{-1}$

$$\Sigma_2=\sum_{P^{1-\varepsilon_1}\leq\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}\leq e\sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}-e\sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_1}}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.$$

Применяя формулу (10) к этим суммам, имеем

$$\Sigma_2=e\varepsilon\ln PS(\theta)+O\left(\frac{X^2\ln^2X}{P^{1-\varepsilon_1}}\right).$$

Используя оценку для $S(\theta)$, находим

$$\Sigma_2\ll\frac{\varepsilon_1\log P}{\ln X}+\frac{X^2\ln^2X}{P^{1-\varepsilon_1}}\ll\frac{\varepsilon_1\ln P}{\ln X}.$$

Чтобы оценить сумму W_2, возьмём в определении W, $B(\lambda)=1$ при $\lambda>P^{1-\varepsilon_1}$ и $B(\lambda)=0$ при $\lambda<P^{1-\varepsilon_1}$, $B_0=const$ из (12), находим

$$W_2\ll T^{-0.9\varepsilon}.$$

Таким образом, последовательно, имеем

$$\begin{aligned} &J_2 \ll H_1 h^2(\Sigma_2 + W_2) \ll H_1 h^2(\varepsilon_1 \ln P \ln^{-1} X + T^{-0,9\varepsilon}),\\ &J \ll H\left(\varepsilon_1^{-2}\ln^{-1} P\ln^{-1} X + \left(A\varepsilon_1^{-1}\mathcal{L}^{-2} + \varepsilon_1^{-2}\mathcal{L}^{-2}\right)T^{-0,9\varepsilon}\right) +\\ &\quad + H_1 h^2(\varepsilon_1 \ln P \ln^{-1} X + T^{-0,9\varepsilon}),\\ &I_3 \ll J + Hh^2\mathcal{L}^{-10} \le c_1 H_1\left(\varepsilon_1^{-2}\ln^{-1} P\ln^{-1} X + A\varepsilon_1^{-1}T^{-0,9\varepsilon}\mathcal{L}^{-2} +\right.\\ &\quad \left.+\varepsilon_1^{-2}T^{-0.9\varepsilon}\mathcal{L}^{-2} + \varepsilon_1 h^2 \ln P \ln^{-1} X + h^2 T^{-0,9\varepsilon} + h^2\mathcal{L}^{-10}\right). \end{aligned}$$

Учитывая значения величин X, h и H_1, то есть

$$X = T^{0.01\varepsilon}, \quad h = A\ln^{-1} T = A\mathcal{L}^{-1}, \quad H_1 = H + h,$$

имеем

$$\varepsilon_1^{-2}\ln^{-1} P\ln^{-1} X \le 4h^2A^{-2}\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-2}, \quad A\varepsilon_1^{-1}T^{-0,9\varepsilon}\mathcal{L}^{-2} = h^2A^{-1}\varepsilon_1^{-1}T^{-0,9\varepsilon},$$
$$\varepsilon_1^{-2}T^{-0,9\varepsilon}\mathcal{L}^{-2} = h^2A^{-2}\varepsilon_1^{-1}T^{-0,9\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_3 \le c_1 Hh^2\left(1 + A\mathcal{L}^{-2}H^{-1}\right)&\left(A^{-2}\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_1\varepsilon^{-1} +\right.\\ &\left.+(A^{-1}\varepsilon_1^{-1} + A^{-2}\varepsilon_1^{-2} + 1)T^{-0,9\varepsilon} + \mathcal{L}^{-10}\right). \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $1 + A\mathcal{L}^{-2}H^{-1} < 0,1$, поэтому полагая $c_2 = c_1$, имеем

$$I_3 \le c_2 Hh^2\left(A^{-2}\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_1\varepsilon^{-1} + \left(A^{-1}\varepsilon_1^{-1} + A^{-2}\varepsilon_1^{-2} + 1\right)T^{-0,9\varepsilon} + \mathcal{L}^{-10}\right).$$

А теперь возьмём

$$A = \left((32c_2 + 32)\,\varepsilon^{-1}\right)^{1.5}, \quad \varepsilon_1 = (32c_2 + 32)^{-1}\,\varepsilon,$$

тогда

$$A^2\varepsilon\varepsilon_1^2 = 32c_2 + 32, \quad \varepsilon_1\varepsilon^{-1} = (32c_2 + 32)^{-1}, \quad A\varepsilon_1 = (32c_2 + 32)^{1/2}\varepsilon^{-0,5}.$$

Тем самым, для I_3 находим

$$I_3 \le c_3 Hh^2,$$

где

$$c_3 \le \frac{1}{16} + \left[\left(\frac{\varepsilon}{32} + \frac{c_2^{1/2}\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{32}} + 1\right)T^{-0,9\varepsilon} + \mathcal{L}^{-10}\right].$$

Возьмём $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы выражение в квадратной скобке было меньше $1/16$, тогда

$$I_3 \le \frac{1}{8}Hh^2.$$

Таким образом, из оценок для I_1, I_2 и I_3 для соотношения (2), получим

$$\sqrt{\mu(E)I_2} \ge I_1 - \sqrt{HI_3} \ge hH - h^2 + O\left(T^{1/6}X\ln T\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}Hh \ge \frac{1}{2}hH,$$

$$\mu(E) \ge \frac{1}{4}h^2H^2I_2^{-1} \ge \frac{1}{4}h^2H^2\left(c(\varepsilon)h^2H_1\right)^{-1} = c_3H, \quad c_3 = c_3(\varepsilon) > 0.$$

Разделим интервал $(T, T+H)$ на интервалы вида $(nh, nh+h)$, где
$$n = \left[\frac{T}{h}\right], \left[\frac{T}{h}\right] + 1, \cdots, \left[\frac{T+H}{h}\right].$$
По крайней мере $\left[c_3 H h^{-1}\right] - 2$ из них содержат точки t из E. Но если интервал $(nh, nh+2h)$ содержит точку t из E, то в интервале $(t, t+h)$, а следовательно, и в интервале $(nh, nh+2h)$ содержится хотя бы один нуль нечётного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. Следовательно, нулей нечётного порядка функции $\zeta(1/2+it)$ на интервале $(T, T+H)$ не меньше чем
$$\frac{1}{2}\left(\left[c_3 H h^{-1}\right] - 2\right) \geq c_4 H \ln T, \quad c_4 > 0.$$
что и требовалось доказать. □

References

[1] B. Riemann, *On the number of prime numbers not exceeding a given value*, Moscow, OGIZ., 1948.

[2] G.H. Hardy, *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Compt.Rend. Acad.Sci., **158** (1914), 1012–1014.

[3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Contributions to the theory of Riemann zeta–function and the theory of distribution of primes*, Acta Math., **41** (1918), 119–196.

[4] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line*, Math.Zs., **10** (1921), 283–317.

[5] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta–function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, **10** (1942), 1–59.

[6] J. Moser, *On a Hardy–Littlewood theorem in the theory of the Riemann zeta function*, Acta Arith., **31** (1976), 45–59.; Addition Acta Arith., **3** (1979), 403–404.

[7] A.A. Karatsuba, *On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line*, Proceedings of the USSR Academy of Sciences, mathematical series, **48**:3 (1984), 569–584.

[8] S.W. Graham, G. Kolesnik, *Vander Corput's Method of Exponential sums*, Cambridge university press, 1991.

[9] Sh.A. Khayrulloev, *On the real zeros of the derivative of the Hardy function*, Chebyshevskii Sbornik, **81**:5 (2021), 235–242.

[10] Sh.A. Khayrulloev, *On the zeros of Dirichlet arithmetic series that do not have an Euler product*, Bulletin of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences, **173**:4 (2018), 7–25.

[11] Z.Kh. Rakhmonov, Sh.A. Khayrulloev, A.S. Aminov, *Zeros of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line*, Chebyshevskii Sbornik, **72**:4 (2019), 271–293.

[12] J. Bourgain, N. Watt, *Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5+it)|$*, http://arxiv.org/abs/1505.04161v1 [math.NT], 15 May 2015.

Shamsullo Amrulloevich Khayrulloev
Tajik National University,
Rudaki Avenue, 17,
734025, Dushanbe, Tajikistan
E-mail address: shamsullo@rambler.ru