S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 1295–1313 (2024) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.081 MSC 60G50

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ПРОЦЕССОМ ЛЕВИ С МАЛЫМ СНОСОМ

В.И. Лотов, В.Р. Ходжибаев

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: We study the distribution of the crossings number of a strip by trajectories of a stationary stochastic process with independent increments (the Levy process). Assuming that negative drift of the process tends to zero, we establish the convergence of the distribution of the crossings number to the exponential one under appropriate normalization.

Keywords: stochastic process with independent increments (Levy process), number of strip crossings, limit theorems.

1. Введение

Пусть $\xi(t) = \xi_\mu(t)$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), выборочные функции которого непрерывны справа, $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$, и пусть для функции $\psi(\lambda) = \psi_\mu(\lambda) = \ln \mathbf{E} \exp\{\lambda\xi(1)\}$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ имеет место представление

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{|x|<1} \big(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\big) dS(x) + \int\limits_{|x|\ge 1} \big(e^{\lambda x} - 1\big) dS(x), \quad (1)$$

Lotov, V.I., Khodjibayev, V.R., Limit theorem for the number of crossings of a strip by the Levy process with small drift.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

Поступила 27 августа 2024 г., опубликована 4 декабря 2024 г.

где α и $\sigma \geq 0$ — некоторые вещественные числа, $\int\limits_{|x|<1} x^2 dS(x) < \infty$.

Для произвольных $a > 0$, $b > 0$ определим последовательность марковских моментов:

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0,$$

$$\tau_i^- = \inf\{t > \tau_{i-1}^+ :\ \xi(t) \leq -a\},\ \tau_i^+ = \inf\{t > \tau_i^- :\ \xi(t) \geq b\}, \qquad i \geq 1.$$

Полагаем, что $\inf \varnothing = \infty$. Введем случайную величину $\theta = \theta_\mu$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $\{-a < y < b\}$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного процесса $(t, \xi(t))_{t=0}^{\infty}$. С вероятностью единица случайная величина θ конечна в силу условия $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ (см. [1]). Нетрудно также видеть, что

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty), \qquad k \geq 1. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно определить случайную величину, равную числу пересечений полосы сверху вниз. Ясно, что количества пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз траекторией $(t, \xi(t))_{t=0}^{\infty}$ отличаются друг от друга самое большее на единицу. Поэтому мы ограничимся изучением числа пересечений полосы снизу вверх. С другой стороны, изучение пересечений сверху вниз может быть проведено по аналогичной схеме.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящены работы многих авторов. Вычисление в точном виде характеристик функционалов в граничных задачах для случайных процессов, связанных с моментом выхода из интервала, в том числе распределения числа пересечений полосы, доступно только в некоторых частных ситуациях, некоторые сведения о точных формулах для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания можно найти в [2]. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам. Для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, в [3] найдены асимптотические представления для распределения числа пересечений расширяющей полосы за бесконечный промежуток времени в случаях, когда распределение скачка блуждания имеет лёгкий или тяжёлый правый хвост. В [4] получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за конечный промежуток времени траекториями целочисленного случайного блуждания с нулевым средним. При этом предполагалось, что выполнено условие Крамера на распределение скачков блуждания и ширина полосы неограниченно растет с различными скоростями одновременно с расширением рассматриваемого промежутка времени. Аналогичная задача для однородных случайных процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [5], [6]. Задача получения двусторонних оценок для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$, которые являются естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам для случайных блужданий, решалась в [2]. Эта же задача для случайных процессов с непрерывным временем рассматривалась в [7]. Еще одно направление асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос процесса стремится к нулю. Ясно, что при этом число пересечений полосы неограниченно возрастает. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю отрицательного сноса получено в [8] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В недавней работе [9] аналогичные результаты получены также для весьма широкого класса случайных блужданий.

В данной работе в условиях крамеровского типа изучается предельное поведение распределения нормированной случайной величины θ при условии, что $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0,\ \mu \to 0$. Основной результат содержится в теореме 1, где установлено асимптотическое представление вероятности $\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \ge t),\ t > 0$, при $\mu \to 0$. Анализируются также некоторые частные ситуации. Тем самым основные результаты [9] переносятся на случай процессов с непрерывным временем. Здесь используется известная факторизационная техника и методы работы [9].

2. Формулировка основного результата

Введем функцию
$$r_u(\lambda) = \frac{u}{u - \psi(\lambda)},$$
которая при $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, $u > 0$ представляет собой двойное преобразование Лапласа-Стилтьеса (по времени и по пространству) над распределением процесса $\xi(t)$, т.е.
$$\frac{u}{u - \psi(\lambda)} = u\int\limits_0^\infty e^{-ut}\Big\{\int\limits_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\xi(t) < x)\Big\}dt.$$

В дальнейшем будет использоваться ряд свойств функции $\psi(\lambda)$ и компонент так называемой безгранично делимой факторизации функции $r_u(\lambda)$, введенной и изученной в [1], [10]. Эти нужные нам свойства будут иметь место при соответствующих ограничениях на распределение $\xi(1)$.

Приведем эти условия.

(A_1) $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$ и для $\mu \le \mu_0$ при некотором $\mu_0 > 0$ существует не зависящее от μ число $\delta > 0$ такое, что
$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\xi(1)} < \infty \text{ при } -\delta \le \lambda \le \delta,\quad \psi(\delta) > 0.$$

(A_2) Если $\sigma = 0$, то $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dS(x) < \infty$ и $\displaystyle\alpha - \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dS(x) \ne 0.$

(A_3) Для всех $\mu \le \mu_0$ выполняется $\displaystyle\limsup_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ -\delta\le\mathrm{Re}\lambda\le\delta}} \frac{|\mathbf{E}\,\exp\{\lambda\,\xi(1)\}|}{\mathbf{E}\,\exp\{\mathrm{Re}\lambda\,\xi(1)\}} < 1.$

Заметим, что при выполнении условия (A_1) существуют моменты любого порядка случайной величины $\xi(1)$, поэтому (1) можно переписать в виде

$$\psi(\lambda) = -\mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\right) dS(x), \tag{3}$$

где $\mu = -\alpha - \int\limits_{|x \geq 1|} x\, dS(x)$, функция $S(x)$ та же, что и в (1),

$$\psi'(0) = \mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu, \quad \psi''(0) = \sigma^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, dS(x), \quad \psi'''(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3\, dS(x).$$

Условие (A_3) является усилением свойства хребтовости функции $\psi(\lambda)$ (см. [10]). Оно эквивалентно следующему: при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $|\mathrm{Im}\lambda| > \delta_1$, $-\delta \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \delta$ выполняется $\psi(\mathrm{Re}\lambda) \geq \mathrm{Re}\,\psi(\lambda) + \varepsilon_1$.

Достаточными условиями, обеспечивающими выполнение условия (A_3), будут, в частности, неравенства $\sigma^2 > 0$ или наличие абсолютно непрерывной компоненты у $S(x)$. Условие (A_2) означает, что у процесса $\xi(t)$ существует диффузионная компонента или $\xi(t)$ является процессом с ограниченной вариацией и с ненулевым сносом.

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3)*. Тогда для* $t \geq 0$

$$\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \geq t) = \exp\left\{ -\frac{2(a+b+c)}{l}\, t \right\} + O(\mu), \qquad \mu \to 0,$$

где

$$c = c_\mu = \frac{\psi_\mu'''(0)}{3\psi_\mu''(0)}, \qquad l = l_\mu = \psi_\mu''(0).$$

Доказательство теоремы разбивается на несколько этапов (см. секции 3–7) ниже.

3. Предварительные сведения

Представление функции $r_u(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, $u > 0$ в виде $r_u(\lambda) = r_{u+}(\lambda)\, r_{u-}(\lambda)$ называется безгранично делимой факторизацией, если $r_{u+}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной полуоси, а $r_{u-}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неположительной полуоси. Функция $r_{u+}(\lambda)$ ($r_{u_-}(\lambda)$) называется положительной (отрицательной) компонентой факторизации. В [1] установлено, что функция $r_u(\lambda)$ допускает безгранично делимую факторизацию, компоненты которой имеют вид

$$r_{u+}(\lambda) = u\int_0^\infty e^{-ut}\Big\{\int_0^\infty e^{\lambda x}d_x\mathbf{P}(\bar{\xi}(t)<x)\Big\}dt$$

$$= \exp\Big\{-\int_0^\infty (e^{\lambda x}-1)\,d_x\int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi(t)>x)\,e^{-ut}dt\Big\},$$

$$r_{u-}(\lambda) = u\int_0^\infty e^{-ut}\Big\{\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x}d_x\mathbf{P}(\bar{\bar{\xi}}(t)>x)\Big\}dt$$

$$= \exp\Big\{\int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x}-1)\,d_x\int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi(t)>x)\,e^{-ut}dt\Big\}.$$

Здесь $\bar{\xi}(t) = \sup\limits_{0\le s\le t}\xi(s)$, $\bar{\bar{\xi}}(t) = \inf\limits_{0\le s\le t}\xi(s)$.

Очевидно, что функция $r_{u+}(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda<0$, непрерывна и не обращается в 0 при $\operatorname{Re}\lambda\le 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. Функция $r_{u-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости.

Если обозначить через $L(A)$ множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x}dG(x), \qquad \text{где} \quad \int_A |dG(x)|<\infty,$$

и где A — произвольное борелевское множество, то нетрудно заметить, что $r_{u+}(\lambda)\in L([0,\infty))$, $r_{u-}(\lambda)\in L((-\infty,0])$, и $r_{u\pm}(0)=1$.

Пусть функция $g(\lambda) \in L(\mathbb{R})$, то есть она допускает на прямой $\{\operatorname{Re}\lambda=0\}$ представление

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y}\,dG(y), \tag{4}$$

в котором полная вариация функции G ограничена. Следуя [11], для функций вида (4) при $u>0$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ введем операторы

$$(Ag)(u,\lambda) = r_{u-}^{-1}(\lambda)\big[r_{u-}(\lambda)g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(u,\lambda) = r_{u+}^{-1}(\lambda)\big[r_{u+}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

где для любого борелевского множества $D\subset\mathbb{R}$ по определению

$$\Big[\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y}dG(y)\Big]^D = \int_D e^{\lambda y}dG(y).$$

В [5] доказано, что при $u>0$, $\operatorname{Re}\lambda=0$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_1^- + \lambda\xi(\tau_1^-)\}; \tau_1^- < \infty\big) = (Ae)(u,\lambda),$$
$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_1^+ + \lambda\xi(\tau_1^+)\}; \tau_1^+ < \infty\big) = (BAe)(u,\lambda),$$
$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_2^- + \lambda\xi(\tau_2^-)\}; \tau_2^- < \infty\big) = (ABAe)(u,\lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k\geq 1$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_k^+ + \lambda\xi(\tau_k^+)\}; \tau_k^+ < \infty\big) = \big((BA)^k e\big)(u,\lambda), \tag{5}$$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_{k+1}^- + \lambda\xi(\tau_{k+1}^-)\}; \tau_{k+1}^- < \infty\big) = \big(A(BA)^k\big)e)(u,\lambda), \tag{6}$$

где $e(\lambda)\equiv 1$ и степень оператора понимается как суперпозиция.

Если положить $\lambda=0$ в (5), то получается преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения случайной величины τ_k^+:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ut}\, d\mathbf{P}(\tau_k^+ < t) = \big((BA)^k e\big)(u,0),$$

откуда следует

$$\mathbf{P}(\theta\geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{u\to 0}\big((BA)^k e\big)(u,0). \tag{7}$$

Это соотношение лежит в основе дальнейших рассуждений.

Остановимся более подробно на свойствах функции $\psi(\lambda)$ при выполнении условия (A_1). Она аналитична внутри полосы $-\delta\leq \mathrm{Re}\lambda\leq\delta$ и является выпуклой при $-\delta\leq\lambda\leq\delta$. Поэтому она достигает своего минимума на этом отрезке. Пусть λ_0 является точкой минимума, $\psi(\lambda_0)=u_0\leq 0$. Из выпуклости следует, что уравнение $\psi(\lambda)=u$ на отрезке $-\delta\leq\lambda\leq\delta$ имеет не более двух вещественных корней $\lambda_+(u)\geq\lambda_-(u)$. При этом функция $\lambda_+(u)$ определена для $u\in[u_0,u_+]$, $u_+=\psi(\delta)>0$, (см. условие (A_1)), $\lambda_0\leq\lambda_+(u)\leq\delta$, а $\lambda_-(u)$ удовлетворяет неравенству $-\delta\leq\lambda_-(u)\leq u_0$ для $u\in[u_0,u_-]$, где $u_-=\psi(-\delta)$. Если $-\mu=\mathbf{E}\,\xi(1)<0$ и выполняется условие (A_1), то $u_->0$ и существует единственное неотрицательное (неположительное) решение $\lambda_+(u)$ $(\lambda_-(u))$ уравнения $\psi(\lambda)=u$ при $-\delta\leq\lambda\leq\delta$, $0<u\leq\varepsilon$, где $\varepsilon=\min\{u_-,u_+\}>0$. Здесь с необходимостью $r_{u+}^{-1}(\lambda_+(u))=0$, $r_{u-}^{-1}(\lambda_-(u))=0$. Для дальнейшего отметим, что в этом случае $0<\lambda_+(0)=h<\delta$, $\lambda_-(0)=0$, функции $\lambda_\pm(u)$ непрерывны на отрезке $[0,\varepsilon]$ и

$$\lambda_+(u)=h+\beta_1 u+O(u^2),\quad \beta_1=(\psi'(h))^{-1}>0,\quad \lambda_-(u)=-\frac{u}{\mu}+O(u^2),\quad u\to 0.$$

Введем далее следующие обозначения:

$$w_u(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_-(u))r_{u-}(\lambda)}{\lambda_-(u)},\qquad v_u(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_+(u))r_{u+}(\lambda)}{\lambda_+(u)}.$$

Сразу отметим, что

$$w_u(\lambda_-(u))=\frac{1}{\lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))},\qquad v_u(\lambda_+(u))=\frac{1}{\lambda_+(u)(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}, \tag{8}$$

где

$$(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) = \frac{\partial r_{u-}^{-1}(\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_-(u)}, \qquad (r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = \frac{\partial r_{u+}^{-1}(\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_+(u)}.$$

Отметим также(см. [11], [12]), что $w_u^{\pm 1}(\lambda)$, $v_u^{\pm 1}(\lambda)$ являются аналитическим функциями соответственно в областях $\mathrm{Re}\lambda < \delta$, $\mathrm{Re}\lambda > -\delta$ и равномерно ограничены в указанных областях значений u и λ, где они определены. Функции $w_u(\lambda_-(u))$, $v_u(\lambda_+(u))$ также определены по непрерывности при $u = 0$ и

$$w_0(0) = \lim_{u\to 0} w_u(\lambda_-(u)) = -1, \qquad v_0(0) = \lim_{u\to 0} v_u(\lambda_+(u)) = -1.$$

Необходимая в дальнейшем принадлежность

$$v_u^{-1}(\lambda) \in L([0,\infty)), \qquad w_u^{-1}(\lambda) \in L((-\infty, 0]))$$

при $u \in (0,\varepsilon)$ и некотором $\delta > 0$ следует из результатов [5]. В [5] доказаны, а в [12] уточнены следующие леммы.

Лемма 1 ([12]) *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3) *и пусть при* $-\delta \le \mathrm{Re}\lambda \le 0$, $u \in (0,\varepsilon)$ *функция* $g_1(u,\lambda)$ *имеет вид*

$$g_1(u,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG_1(u,x), \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{Re}\lambda x} |dG_1(u,x)| \le C_1 < \infty$$

равномерно по u. *Тогда справедливо равенство*

$$(Ag_1)(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u)) g_1(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda)\, e^{\lambda a}} + (\lambda - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\, \varphi_1(u,x) dx,$$

где $|\varphi_1(u,x)| \le C_2 e^{\delta x}$ *равномерно по* $u < \varepsilon$, $x < -a$. *Если* $\int\limits_{-\infty}^{b} |dG_1|(u,x) = 0$, *то* $|\varphi_1(u,x)| \le C_3 e^{\delta(x-b)}, \quad x < -a$.

Лемма 2 ([12]) *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3) *и пусть при* $0 \le \mathrm{Re}\lambda \le \delta$, $u \in (0,\varepsilon)$ *функция* $g_2(u,\lambda)$ *имеет вид*

$$g_2(u,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG_2(u,x), \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{Re}\lambda x} |dG_2(u,x)| \le C_4 < \infty$$

равномерно по u. *Тогда справедливо равенство*

$$(Bg_2)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u)) g_2(u,\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u) b}} + (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2(u,x) dx,$$

где $|\varphi_2(u,x)| \le C_5 e^{-\delta x}$ *равномерно по* $u < \varepsilon$, $x \ge b$. *Если* $\int\limits_{-a}^{\infty} |dG_2|(u,x) = 0$, *то* $|\varphi_2(u,x)| \le C_6 e^{-\delta(x+a)}, \quad x \ge b$.

Здесь буквой C с индексами обозначены положительные постоянные.

Замечание. Оценки точности в леммах 1 и 2 в оригинале даны для некоторого фиксированного распределения $\xi(1)$, однако в силу выполнения условий (A_1)–(A_3) равномерно по μ порядок точности этих оценок сохраняется, если изменять μ в малой окрестности нуля. Основывается этот вывод на технике доказательства лемм 1 и 2: при стремлении к нулю числа μ будет иметь место сходимость преобразований $\psi_\mu(\lambda) \to \psi_0(\lambda)$ и одновременно будет происходить сближение соответствующих компонент факторизации. Оценки точности определяются как раз свойствами компонент факторизации, а они незначительно меняются при изменении μ в окрестности нуля.

Более того, приведенные леммы из [12] дают экспоненциальные оценки для интегралов вида $\int e^{\lambda x}\varphi_1(u,x)dx$ и $\int e^{\lambda x}\varphi_2(u,x)dx$, что в свое время требовалось для рассмотрения ситуации, когда $a \to \infty$, $b \to \infty$. В нашем же случае границы полосы не меняются, поэтому достаточно иметь для этих интегралов всего лишь равномерные по μ оценки константами, причем, как следует из (7), достаточно иметь такие оценки только при $\lambda = 0$ и $u \to 0$. Это нетрудно сделать для малых значений числа h и, как будет показано ниже, равномерность оценок по h будет эквивалентна равномерности по μ.

4. Асимптотика распределения θ при $h \to 0$

В качестве первого шага доказательства теоремы 1 с помощью лемм 1, 2 будет исследована асимптотика распределения θ при $h \to 0$. Отметим, что числа h и μ непрерывно связаны и стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$\psi(h) = \psi(0) + h\psi'(0) + \frac{h^2}{2}\psi''(0) + \cdots,$$

где

$$\psi(h) = \psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = -\mu = \mathbf{E}\,\xi(1), \qquad \psi''(0) = \mathbf{D}\,\xi(1),$$

следует

$$\mu = \frac{\psi''(0)}{2}\,h + \frac{\psi'''(0)}{6}\,h^2 + O(h^3), \quad h \to 0. \tag{9}$$

Здесь величины $\psi''(0)$, $\psi'''(0)$ равномерно ограничены для малых значений $\mu > 0$. Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \to 0$ одновременно есть $o(1)$ при $\mu \to 0$ и наоборот. Отметим дополнительно, что выполнение условий (A_1)–(A_3) равномерно по малым значениям μ эквивалентно равномерному выполнению этих условий по малым значениям h.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда при* $h \to 0$

$$\mathbf{P}(\theta \ge k) = d^k(h)e^{-kh(a+b)} + O(h), \qquad k \ge 1, \tag{10}$$

$$d(h) = 1 - \rho h + O(h^2), \qquad \rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{2(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))}, \tag{11}$$

здесь h — единственное положительное решение уравнения $\psi(\lambda) = 0$.

Доказательство. Для $k = 1$ из (7) имеем $\mathbf{P}(\theta \geq 1) = \lim_{u\to 0} (BAe)(u, 0)$. Далее применяем леммы 1 и 2:

$$(Ae)(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda)\, e^{\lambda a}} + (\lambda - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\, \varphi_1(u,x)dx,$$

$$(BAe)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u)b}} \times$$

$$\times \left[\frac{w_u(\lambda_-(u))\, e^{(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))a}}{w_u(\lambda_+(u))} + (\lambda_+(u) - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\, \varphi_1(u,x)dx \right]$$

$$+ (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2(u,x)dx,$$

где для функций $\varphi_1(u,x)$, $\varphi_2(u,x)$ имеют место оценки из лемм 1, 2 соответственно. Напомним, что функции $w_u^{\pm 1}(\lambda)$, $v_u^{\pm 1}(\lambda)$ равномерно ограничены в областях значений u и λ, где они определены,

$$w_0(0) = \lim_{u\to 0} w_u(\lambda_-(u)) = -1, \qquad v_0(0) = \lim_{u\to 0} v_u(\lambda_+(u)) = -1.$$

Поэтому при $h \to 0$

$$\lim_{u\to 0} (BAe)(u,0) = \frac{v_0(h)\, e^{-hb}}{v_0(0)} \left[\frac{w_0(0)\, e^{-ha}}{w_0(h)} + h \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{hx}\, \varphi_1(0,x)dx \right]$$

$$- h \int\limits_{b}^{\infty} \varphi_2(0,x)dx = \frac{v_0(h)}{w_0(h)}\, e^{-h(a+b)} + O(h). \tag{12}$$

Равномерная ограниченность последних интегралов при малых значениях числа μ отмечалась в замечании после формулировок лемм 1 и 2.

Обозначим

$$d(h) = \lim_{u\to 0} \frac{v_u(\lambda_+(u))}{w_u(\lambda_+(u))} = \frac{v_0(h)}{w_0(h)}. \tag{13}$$

Покажем, что эта величина отделена от единицы при малых значениях h. Поскольку $r_{u+}^{-1}(\lambda_+(u)) = 0$, имеет место следующее разложение функции $r_{u+}^{-1}(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda_+(u)$:

$$r_{u+}^{-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(u))(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(u))^2}{2} (r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) + \dots.$$

При $\lambda = 0$ из (8) имеем $(r_{u+}^{-1}(0) = 1)$

$$v_u(\lambda_+(u)) = \frac{1}{\lambda_+(u)(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = -1 + \frac{\lambda_+(u)}{2}\,\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + \ldots.$$

Здесь отметим, что $(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) \neq 0$, поскольку $\lambda_+(u)$ является простым нулем функции $r_{u+}^{-1}(\lambda)$. Устремив u к нулю, получаем

$$v_0(h) = -1 + \frac{h}{2}\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + O(h^2), \qquad h \to 0. \tag{14}$$

Аналогично, поскольку $r_{u-}^{-1}(\lambda_-(u)) = 0$, имеет место следующее разложение функции $r_{u-}^{-1}(\lambda)$ в точке $\lambda_-(u)$:

$$r_{u-}^{-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-(u))(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) + \frac{(\lambda-\lambda_-(u))^2}{2}(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) + \ldots.$$

Поэтому

$$w_u^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda_-(u)r_{u-}^{-1}(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(u)} = \frac{\lambda_-(u)}{\lambda-\lambda_-(u)}\times$$

$$\times\left[(\lambda-\lambda_-(u))(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) + \frac{(\lambda-\lambda_-(u))^2}{2}(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) + \ldots\right] =$$

$$= \lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)\left[1 + \frac{\lambda-\lambda_-(u)}{2}\,\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + \ldots\right],$$

и в силу того,что $\lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u) = \dfrac{1}{w_u(\lambda_-(u))}$ (см. (8)), при $\lambda = \lambda_+(u)$ имеем

$$\frac{1}{w_u(\lambda_+(u))} = \frac{1}{w_u(\lambda_-(u))}\left[1 + \frac{\lambda_+(u)-\lambda_-(u)}{2}\,\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + \ldots\right].$$

При $u \to 0$ $(w_0(0) = -1)$ получаем

$$\frac{1}{w_0(h)} = -1 - \frac{h}{2}\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + O(h^2). \tag{15}$$

Из (7) и (12)–(15) следует доказательство леммы 3 при $k = 1$.

Далее используем метод индукции. При $k = 1$ соотношение (10) доказано. Пусть (10) выполнено для некоторого $k \geq 1$. Покажем, что это соотношение выполняется и для $k+1$. Для этого с помощью лемм 1 и 2 будем исследовать асимптотику при $h \to 0$ выражений вида $(Ag)(u,\lambda)$ и $(BAg)(u,\lambda)$, если $g(u,\lambda) = ((BA)^k e)(u,\lambda)$ или $g(u,\lambda) = (A(BA)^k e)(u,\lambda)$.

Как следует из (5) и (6), функции $g(u,\lambda)$ указанного вида являются двойными преобразованиями над распределениями пар $(\tau_k^\pm, \xi(\tau_k^\pm))$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(u,\lambda) = \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}dG_1(u,x), \qquad (BAg)(u,\lambda) = \int_{b}^{\infty} e^{\lambda x}dG_2(u,x)$$

величины $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG_i(u,x)|$ ограничены равномерно по u и $k \ge 1$, $i = 1,2$. Опять в силу лемм 1 и 2

$$\big(BA(BA)^k e\big)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u)b}}\ \frac{w_u(\lambda_-(u))((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda_+(u)a}}$$

$$+\frac{v_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u)b}}\ (\lambda_+(u)-\lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x)dx$$

$$+(\lambda-\lambda_+(u)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2^{(k)}(u,x)dx.$$

Здесь функция $\varphi_1^{(k)}(u,x)$ появляется вследствие применения леммы 1 к функции $g(u,\lambda) = ((BA)^k e)(u,\lambda)$, а функция $\varphi_2^{(k)}(u,x)$ — в результате применения леммы 2 к функции $g(u,\lambda) = (A(BA)^k e)(u,\lambda)$, и для них имеют место оценки из соответствующих лемм. Как и ранее, имеем равномерно по $k \ge 1$ и по u, близким к нулю,

$$(\lambda_+(u)-\lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x)dx = O(h), \qquad h \to 0,$$

а также $\lambda_+(u) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2^{(k)}(u,x)dx = O(h)$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\theta \ge k+1) = \lim_{u\to 0} \big(BA(BA)^k e\big)(u,0) =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{v_u(\lambda_+(u))}{e^{\lambda_+(u)b}}\ \frac{w_u(\lambda_-(u))((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda_+(u)a}} +$$

$$+\lim_{u\to 0} \frac{v_u(\lambda_+(u))}{e^{\lambda_+(u)b}} (\lambda_+(u)-\lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x)dx +$$

$$+\lim_{u\to 0} \lambda_+(u) \int\limits_{b}^{\infty} \varphi_2^{(k)}(u,x)dx =$$

$$= \frac{v_0(h)}{e^{hb}} \left[\frac{\lim_{u\to 0}((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{-ha}}{w_0(h)} + O(h)\right] + O(h) =$$

$$= \frac{v_0(h)\, e^{-h(a+b)}}{w_0(h)} \big[d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h)\big] = d^{k+1}(h)\, e^{-(k+1)h(a+b)} + O(h).$$

Лемма 3 доказана.

Отметим, что утверждение этой леммы не может рассматриваться в качестве основного результата по двум причинам. Во-первых, число ρ неизбежно зависит от h (и от μ), и эта зависимость требует уточнения.

Во-вторых, число h возникает в процессе доказательства, а в окончательной формулировке желательно использовать исходный малый параметр μ вместо h.

5. Асимптотика распределения $\mu\theta_\mu$ при $\mu \to 0$

Будем предполагать, что $\mu = \alpha + \int\limits_{|x \geq 1|} x\,dS(x) > 0$ — достаточно малое число, и рассматриваем $\xi(t)$ как семейство процессов, зависящее от малого параметра μ. При необходимости, чтобы указать зависимость процесса и его характеристик от μ, снабжаем эти величины индексом μ, например, ρ_μ, $\psi_\mu(\lambda)$, и т. д.

В дальнейшем положительные числа ε и δ будут выбираться такими, чтобы для $0 < u < \varepsilon$ и $0 \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \delta$ $(-\delta \leq \mathrm{Re}\lambda \leq 0)$ число $\lambda_+(u)$ $(\lambda_-(u))$ являлось единственным решением уравнения $\psi(\lambda) = u$. Утверждения лемм 1, 2 и связанные с ними последующие оценки остаются в силе и являются равномерными по малым значениям числа μ.

Из (9) следует $h = 2\mu/\psi''(0) + O(\mu^2)$, поэтому

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \lim_{u\to 0}\big((BA)^k e\big)(u,0) = d^k(h)\,e^{-kh(a+b)} + O(h)$$
$$= d^k(h)\exp\{-k(2\mu/\psi''(0) + O(\mu^2))(a+b)\} + O(h)$$
$$= d^k(h)\exp\{-k(2\mu/\psi''(0))(a+b)\} + O(\mu),$$

и при $t = k\mu$

$$\mathbf{P}(\mu\theta \geq t) = d^{t/\mu}(h)\exp\{-2t(a+b)/\psi''(0)\} + O(\mu).$$

Воспользовавшись далее (11), получаем при $\mu \to 0$

$$\log d^{t/\mu}(h) = \frac{t}{\mu}\log(1 - \rho h + O(h^2)) = \frac{-2\rho t}{\psi''(0)} + O(\mu).$$

Таким образом, в условиях леммы 3 имеем

$$\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \geq t) = \exp\left\{-\frac{2(a+b+\rho)}{\psi''(0)}\,t\right\} + O(\mu), \qquad \mu \to 0. \tag{16}$$

Как следует из (11), число $\rho = \rho_\mu$ весьма сложно выражается через компоненты факторизации, которые, в свою очередь, доступны для вычисления в явном виде далеко не всегда. Приведем сначала явные формулы для ρ в некоторых наиболее простых ситуациях, в которых известны формулы для компонент факторизации.

6. Рассмотрение частных случаев

1. Пусть $\xi(t)$ — винеровский процесс с отрицательным сносом (см. [1]), т. е.

$$\psi(\lambda) = \mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}, \qquad \mu < 0.$$

В этом случае имеем

$$r_{u\pm}(\lambda) = \frac{\lambda_\pm(u)}{\lambda_\pm(u) - \lambda},$$

где

$$\lambda_\pm(u) = \frac{\pm(\mu^2 + 2u\sigma^2)^{1/2} - \mu}{\sigma^2}, \quad (r_{u\pm}^{-1})'(\lambda) = -1, \quad (r_{u\pm}^{-1})''(\lambda) = 0.$$

Следовательно, $\rho = \rho_\mu \equiv 0$. Непосредственными вычислениями в [5] установлено, что

$$\big((BA)^k e\big)(u,\lambda) = \exp\big\{\lambda b + \lambda_-(u)\big((k-1)b + ka\big) - k\lambda_+(u)(b+a)\big\}.$$

Так как $\lambda_+(0) = -2\mu/\sigma^2$, $\lambda_-(0) = 0$, то из (2) и (7) следует

$$\mathbf{P}(\theta \ge k) = \lim_{u\to 0}\big((BA)^k e\big)(u,0) = \exp\{2\mu\sigma^{-2}k(a+b)\}.$$

Полагая $t = \mu k$, получаем

$$\mathbf{P}(\mu\theta \ge t) = \exp\{-2\sigma^{-2}(a+b)t\}.$$

2. Пусть $\xi(t)$ является обобщённым пуассоновским процессом с отрицательным сносом (параметр сноса $\alpha < 0$), показательно распределёнными скачками с параметром $\gamma > 0$ и показательно распределенными с параметром $\beta > 0$ интервалами времени между скачками, т. е.

$$\psi(\lambda) = \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi(1)} = \alpha\lambda + \beta\int_0^\infty \big(e^{\lambda x} - 1\big)\, dF(x),$$

где $F(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, если $x \ge 0$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\beta\lambda}{\gamma - \lambda}, \quad \mu = \psi'(0) = \alpha + \frac{\beta}{\gamma},$$

и уравнение $\psi(\lambda) = u$ при $u \ge 0$ имеет два решения

$$\lambda_\pm(u) = \frac{\beta + \alpha\gamma + u \pm \sqrt{(\beta + \alpha\gamma + u)^2 - 4\alpha\gamma u}}{2\alpha}.$$

При $u > 0$ имеем $\lambda_+(u) > 0$, $\lambda_-(u) < 0$ и, если $\mu < 0$, то

$$h = \lambda_+(0) = \gamma + \frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad \lambda_-(0) = 0, \quad \mu = \frac{\alpha}{\gamma}h.$$

Положим

$$R_{u+}(\lambda) = \frac{\lambda_+(u)(\gamma - \lambda)}{\gamma(\lambda_+(u) - \lambda)}, \qquad R_{u-}(\lambda) = \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_-(u) - \lambda}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\lambda_+(u)\lambda_-(u) = \frac{\gamma u}{\alpha}, \quad \lambda_+(u) + \lambda_-(u) = \frac{\beta + \gamma\alpha + u}{\alpha},$$

нетрудно показать, что $r_u(\lambda) = R_{u+}(\lambda)R_{u-}(\lambda)$, и это представление удовлетворяет необходимым требованиям к компонентам безгранично делимой факторизации. В силу единственности подобного представления заключаем, что $R_{u\pm}(\lambda) = r_{u\pm}(\lambda)$.

Здесь также $(r_{u-}^{-1})'(\lambda) = -1$, $(r_{u-}^{-1})''(\lambda) = 0$, и после некоторых простых вычислений находим

$$\rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\gamma - \lambda_+(u)} = \frac{1}{\gamma - h} = \frac{1}{\gamma} + O(\mu), \quad \mu \to 0.$$

3. Пусть теперь $\xi(t)$ — непрерывный снизу случайный процесс, т. е. он не имеет отрицательных скачков. Пусть по-прежнему $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$ и выполняются условия (A_1)–(A_3), соответствующие данному случаю. Тогда представление (3) принимает вид

$$\psi(\lambda) = \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi(1)} = \mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_0^\infty \bigl(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\bigr) dS(x).$$

Известно [10], что при этом функция $\psi(\lambda)$ аналитична по крайней мере при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, уравнение $\psi(\lambda) = u$ при $\lambda < 0$, $u \geq 0$ имеет единственное решение $\lambda_-(u)$, и при $u > 0$ выполняется $\lambda_-(u) < 0$, $\lambda_-(0) = 0$. Здесь

$$r_{u-}(\lambda) = \lambda_-(u)(\lambda_-(u) - \lambda)^{-1}, \qquad r_{u+}(\lambda) = \frac{u(\lambda_-(u) - \lambda)}{\lambda_-(u)(u - \psi(\lambda))}.$$

В этом случае также $(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) = 0$ и поэтому

$$\rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}.$$

Займемся вычислением этой величины. Имеем

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{u - \psi(\lambda)}{\lambda_-(u) - \lambda}\right]' = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{\psi'(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(u)} + \frac{u - \psi(\lambda)}{(\lambda_-(u) - \lambda)^2}\right],$$

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\,\frac{\psi'(\lambda_+(u))}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)},$$

$$(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{\psi''(\lambda_+(u))}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)} - \frac{2\psi'(\lambda_+(u))}{(\lambda_+(u) - \lambda_-(u))^2}\right],$$

$$\rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi''(\lambda_+(u))}{\psi'(\lambda_+(u))} - \frac{2}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)}\right].$$

Далее выпишем разложения в нуле функций $\psi(\lambda)$, $\psi'(\lambda)$, $\psi''(\lambda)$ по степеням λ, подставим в них значение $\lambda = \lambda_+(u)$ и устремим $u \to 0$. Приходим к соотношению

$$\rho = \frac{\psi''(0) + \psi'''(0)h + O(h^2)}{2\bigl(\psi'(0) + \psi''(0)h + \frac{\psi'''(0)}{2}h^2 + O(h^3)\bigr)} - \frac{1}{h}.$$

Заменяя стоящее в знаменателе $\psi'(0)$ на его выражение в соответствии с (9), получаем

$$\rho = \frac{\psi''(0) + \psi'''(0)h + O(h^2)}{\psi''(0)h + \dfrac{2\psi'''(0)}{3}h^2 + O(h^3))} - \frac{1}{h} = \frac{\psi''(0)}{3\psi'''(0)} + O(h).$$

7. Представление величины ρ в общем случае

Рассмотренные примеры подсказывают вид представления для величины ρ в общем случае, охватываемом условиями (A_1)–(A_3).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда при* $\mu \to 0$

$$\rho = \rho_\mu = \frac{\psi''_\mu(0)}{3\psi'''_\mu(0)} + O(\mu).$$

Доказательство Обозначим

$$\tau_+(x) = \inf\{t:\ \xi(t) \ge x\}, \quad \tau_-(y) = \inf\{t:\ \xi(t) \le y\}, \quad x > 0, \quad y < 0,$$

$$\chi_+(x) = \xi(\tau_+(x)) - x, \qquad \chi_-(y) = \xi(\tau_-(y)) - y.$$

В [13] установлено, что для произвольного однородного процесса с независимыми приращениями при $\operatorname{Re}\nu < 0$, $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ и $u > 0$

$$\int\limits_0^\infty e^{\nu x}\mathbf{E}\left(e^{-u\tau_+(x)}e^{\lambda\chi_+(x)};\ \tau_+(x) < \infty\right)dx = \frac{1}{\lambda - \nu}\left[1 - \frac{r_{u+}(\nu)}{r_{u+}(\lambda)}\right].$$

Известно также из [14], что если $0 < \mathbf{E}\,\xi(1) < \infty$ или $\mathbf{E}\,\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\,\xi^2(1) < \infty$, то существует предельное при $y \to \infty$ собственное распределение $\mathbf{P}(\chi_+ < x) = \lim_{y\to\infty}\mathbf{P}(\chi_+(y) < x)$ величины перескока через бесконечно удалённый барьер, и

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_+} = \lim_{\nu\to 0}\nu\int\limits_0^\infty e^{\nu y}e^{\lambda\chi_+(y)}dy = \frac{\psi^*(\lambda)}{\lambda\mathbf{E}\,\xi^*}, \qquad \psi^*(\lambda) = -\lim_{u\to 0}\frac{r_{u+}(-1)}{r_{u+}(\lambda)} =$$

$$= (\lambda+1)\int\limits_0^\infty e^{-y}e^{\lambda\chi_+(y)}dy - 1, \qquad \left[\psi^*(\lambda)\right]'_{\lambda=0} = \mathbf{E}\,\xi^* > 0.$$

Здесь $\psi^*(\lambda)$ является логарифмом преобразования Лапласа-Стилтьеса безгранично делимого распределения некоторой положительной случайной величины ξ^*, построенной по рассматриваемому процессу $\xi(t)$.

Аналогично, рассмотрев процесс $-\xi(t)$ вместо $\xi(t)$, получаем при $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ и $u > 0$ и (см. [14])

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{\nu x}\mathbf{E}\left(e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)};\ \tau_-(x) < \infty\right)dx = \frac{1}{\nu - \lambda}\left[1 - \frac{r_{u-}(\nu)}{r_u(\lambda)}\right]. \qquad (17)$$

Также для $-\infty < \mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ существует предельное при $x \to -\infty$ собственное распределение $\mathbf{P}(\chi_{>}y) = \lim_{x\to-\infty}\mathbf{P}(\chi_-(x) > y)$ величины перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер, и

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-} = \lim_{\nu\to 0}\nu\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\nu y}e^{\lambda\chi_-(y)}dy = \frac{\psi^{**}(\lambda)}{\lambda\mathbf{E}\,\xi^{**}}, \qquad \psi^{**}(\lambda) = -\lim_{u\to 0}\frac{r_{u-}(-1)}{r_{u-}(\lambda)} =$$

$$= (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1, \qquad \big[\psi^{**}(\lambda)\big]'_{\lambda=0} = \mathbf{E}\,\xi^{**} < 0. \tag{18}$$

Здесь $\psi^{**}(\lambda)$ также является логарифмом преобразования Лапласа-Стилтьеса безгранично делимого распределения некоторой отрицательной случайной величины ξ^{**}.

Из (18) следует $\psi^{**}(\lambda) = \lambda\mathbf{E}\,\xi^{**}\,\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-}$ и

$$(\psi^{**})'(\lambda) = \mathbf{E}\,\xi^{**}\big(\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-} + \lambda\mathbf{E}\,\chi_- e^{\lambda\chi_-}\big), \qquad (\psi^{**})'(0) = \mathbf{E}\,\xi^{**}, \tag{19}$$

$$(\psi^{**})''(\lambda) = \mathbf{E}\,\xi^{**}\big(2\mathbf{E}\,\chi_- e^{\lambda\chi_-} + \lambda\mathbf{E}\,\chi_-^2\,e^{\lambda\chi_-}\big), \qquad (\psi^{**})''(0) = 2\mathbf{E}\,\xi^{**}\mathbf{E}\,\chi_-. \tag{20}$$

С другой стороны, из (18) получаем

$$(\psi^{**})'(\lambda) = \left((1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathbf{E}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1\right)' = -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathbf{E}e^{\lambda\chi_-(x)}dx +$$

$$+(1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx, \quad (\psi^{**})'(0) = -1 + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-(x)dx, \tag{21}$$

$$(\psi^{**})''(\lambda) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx + (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-^2(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx,$$

$$(\psi^{**})''(0) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}\chi_-^2(x)dx. \tag{22}$$

Из (17) при $\nu = 1$ следует

$$-\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)} = (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\mathbf{E}e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1.$$

Продифференцируем дважды по переменной λ обе части последнего равенства:

$$-\left(\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)}\right)'_{\lambda} = -r_{u-}(1)(r_u^{-1})'(\lambda) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E} e^{-u\tau_-(x)} e^{\lambda\chi_-(x)} dx + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-(x) e^{-u\tau_-(x)} e^{\lambda\chi_-(x)} dx, \tag{23}$$

$$-\left(\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)}\right)''_\lambda = -r_{u-}(1)(r_u^{-1})''(\lambda) = -2\int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-(x)\, e^{-u\tau_-(x)} e^{\lambda\chi_-(x)} dx +$$

$$+ (1-\lambda) \int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-^2(x) e^{-u\tau_-(x)} e^{\lambda\chi_-(x)} dx. \tag{24}$$

Положим $\lambda = \lambda_-(u)$ в (23) и (24) и устремим u к нулю. В результате в силу (18)–(22) будем иметь

$$-\lim_{u\to 0} r_{u-}(1)(r_u^{-1})'(\lambda(u)) = -1 + \int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-(x) dx = (\psi^{**})'(0) = \mathbf{E}\xi^{**},$$

$$-\lim_{u\to 0} r_{u-}(1)(r_u^{-1})''(\lambda(u)) =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-(x) dx + \int_{-\infty}^{0} e^x \mathbf{E}\chi_-^2(x) dx = (\psi^{**})'(0) = 2\mathbf{E}\xi^{**}\mathbf{E}\chi_-.$$

В итоге приходим к следующему соотношению:

$$\lim_{u\to 0} \frac{r_{u-}(1)(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{2r_{u-}(1)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} = \mathbf{E}\chi_-. \tag{25}$$

Напомним, что случайная величина χ_- имеет собственное распределение в силу неравенства $-\infty < \mathbf{E}\xi(1) < 0$, при этом $\mathbf{E}|\chi_-| < \infty$.

Число ρ определено в (11), поэтому остается исследовать выражение

$$\lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}.$$

Простыми вычислениями получаем следующие представления:

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = -\psi'(\lambda_+(u))\frac{r_{u-}(\lambda_+(u))}{u},$$

$$(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) = -\psi''(\lambda_+(u))\frac{r_{u-}(\lambda_+(u))}{u} - \frac{2\psi'(\lambda_+(u))}{ur_{u-}^{-1}(1)}\left(\frac{r_{u-}(\lambda)}{r_{u-}(1)}\right)'_{\lambda=\lambda_+(u)},$$

и затем

$$\lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \lim_{u\to 0} \frac{\psi''(\lambda_+(u))}{2\psi'(\lambda_+(u))} + \lim_{u\to 0} \left(\frac{r_{u-}(\lambda)}{r_{u-}(1)}\right)'_{\lambda=\lambda_+(u)} \frac{r_{u-}(1)}{r_{u-}(\lambda_+(u))} =$$

$$= \frac{\psi''(h)}{2\psi'(h)} + \psi^{**}(h)\left(\frac{1}{\psi^{**}(\lambda)}\right)'_{\lambda=h}.$$

Из (19), (20) находим

$$\psi^{**}(h)\left(\frac{1}{\psi^{**}(\lambda)}\right)'_{\lambda=h} = -\psi^{**}(h)\,\frac{(\psi^{**})'(h)}{(\psi^{**}(h))^2} = -\frac{\mathbf{E}\,e^{h\chi_-} + h\mathbf{E}\chi_-\,e^{h\chi_-}}{h\mathbf{E}\,e^{h\chi_-}} =$$

$$= -\frac{1}{h}\left[1 + \frac{h\mathbf{E}\chi_-\,e^{h\chi_-}}{\mathbf{E}\,e^{h\chi_-}}\right].$$

В итоге получаем

$$\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \frac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)} - \mathbf{E}\,\chi_- + O(h), \qquad h \to 0.$$

Так как h и μ стремятся к нулю одновременно, то последнее соотношение вместе с (25) дает

$$\rho = \rho_\mu = \frac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)} + O(\mu), \qquad \mu \to 0.$$

Этим завершается доказательство леммы 4.

Остается заметить, что асимптотическая формула (16) сохраняется в силе после замены числа ρ в ней на $c = \dfrac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)}$. Теорема 1 доказана.

References

[1] B.A. Rogozin, *On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580–591. Zbl 0178.52701

[2] V.I. Lotov, A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, J. Math. Sci., **230**:1 (2018), 112–117. Zbl 1413.60036

[3] V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Sib. Math. J., **54**:2 (2013), 265–270. Zbl 1274.60122

[4] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Sib. Math. J. , **45**:4 (2004), 680–698. Zbl 1061.60048

[5] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On the number of crossings of a strip for stochastic processes with independent increments*, Siberian Adv. Math., **3**:2 (1993), 145–152. Zbl 0848.60072

[6] V.R. Hodjibaev, A.A. Atahodjaev, *Raspredelenie chisla peresechenij polosy dlya sluchajnyh processov s nezavisimymi prirashcheniyami*, Uzb. Math. J., **1** (2010), 150–169.

[7] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On the distribution of the crossing number of a strip by trajectories of a stochastic process with independent increments*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 1013–1025. Zbl 1544.60046

[8] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Mat. Sb., **194**:6 (2003), 927–939. Zbl 1062.60046

[9] V.I. Lotov, *Transient phenomena in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 1152–1166.

[10] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J., **10**:6 (1969), 989–1010. Zbl 0198.22302

[11] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. I*, Siberian Adv. Math., **8**:3 (1998), 90–113. Zbl 0920.60059

[12] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. II*, Siberian Adv. Math., **8**:4 (1998), 41–59. Zbl 0920.60060

[13] E.A. Pecherskii, B.A. Rogozin, *On joint distributions of random variables associated with fluctuations of a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **14**:3 (1969), 410–423. Zbl 0194.49001

[14] A.A. Mogul'skii, *On the size of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21**:3 (1977), 470–481. Zbl 0361.60038

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lotov@math.nsc.ru

Vali Rakhimdjanovich Khodjibayev
Namangan Engineering - construction Institute,
Islam Karimov str., 12,
160103, Namangan, Uzbekistan,
Institute of Mathematics Uzbekistan Akademy of Sciences,
Universitetskaya str., 46,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: vkhodjibayev@mail.ru