УДК 519.21

Предельная теорема для числа пересечений полосы процессом Леви с малым сносом

В. И. Лотов[1], В. Р. Ходжибаев

Аннотация

Изучается распределение числа пересечений полосы с прямолинейными параллельными границами траекториями однородного случайного процесса с независимыми приращениями (процесса Леви). В предположении, что отрицательный снос процесса стремится к нулю, при соответствующей нормировке установлена сходимость распределения числа пересечений к показательному.

Ключевые слова: однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), число пересечений полосы, предельные теоремы

Keywords: stationary stochastic process with independent increments (Levy process), number of strip crossings, limit theorems

1. Введение

Пусть $\xi(t) = \xi_\mu(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), выборочные функции которого непрерывны справа, $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$, и пусть для функции $\psi(\lambda) = \psi_\mu(\lambda) = \ln \mathbf{E} \exp\{\lambda\xi(1)\}$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ имеет место представление

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{|x|<1} \big(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\big) dS(x) + \int\limits_{|x|\geq 1} \big(e^{\lambda x} - 1\big) dS(x), \tag{1}$$

где α и $\sigma \geq 0$ — некоторые вещественные числа, $\int\limits_{|x|<1} x^2 dS(x) < \infty$.

Для произвольных $a > 0$, $b > 0$ определим последовательность марковских моментов:

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0,$$

$$\tau_i^- = \inf\{t > \tau_{i-1}^+ :\ \xi(t) \leq -a\},\ \tau_i^+ = \inf\{t > \tau_i^- :\ \xi(t) \geq b\}, \qquad i \geq 1.$$

Полагаем, что $\inf\varnothing = \infty$. Введем случайную величину $\theta = \theta_\mu$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $\{-a < y < b\}$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного процесса $(t, \xi(t))_{t=0}^\infty$. С вероятностью единица случайная величина θ конечна в силу условия $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ (см. [1]). Нетрудно также видеть, что

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty), \qquad k \geq 1. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно определить случайную величину, равную числу пересечений полосы сверху вниз. Ясно, что количества пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз траекторией $(t, \xi(t))_{t=0}^\infty$ отличаются друг от друга самое большее на единицу. Поэтому мы ограничимся изучением числа пересечений полосы снизу вверх. С

[1]Работа выполнялась при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

другой стороны, изучение пересечений сверху вниз может быть проведено по аналогичной схеме.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящены работы многих авторов. Вычисление в точном виде характеристик функционалов в граничных задачах для случайных процессов, связанных с моментом выхода из интервала, в том числе распределения числа пересечений полосы, доступно только в некоторых частных ситуациях, некоторые сведения о точных формулах для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания можно найти в [2]. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам. Для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, в [3] найдены асимптотические представления для распределения числа пересечений расширяющей полосы за бесконечный промежуток времени в случаях, когда распределение скачка блуждания имеет лёгкий или тяжёлый правый хвост. В [4] получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за конечный промежуток времени траекториями целочисленного случайного блуждания с нулевым средним. При этом предполагалось, что выполнено условие Крамера на распределение скачков блуждания и ширина полосы неограниченно растет с различными скоростями одновременно с расширением рассматриваемого промежутка времени. Аналогичная задача для однородных случайных процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [5], [6]. Задача получения двусторонних оценок для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$, которые являются естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам для случайных блужданий, решалась в [2]. Эта же задача для случайных процессов с непрерывным временем рассматривалась в [7]. Еще одно направление асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос процесса стремится к нулю. Ясно, что при этом число пересечений полосы неограниченно возрастает. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю отрицательного сноса получено в [8] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В недавней работе [9] аналогичные результаты получены также для весьма широкого класса случайных блужданий.

В данной работе в условиях крамеровского типа изучается предельное поведение распределения нормированной случайной величины θ при условии, что $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0,\ \mu \to 0$. Основной результат содержится в теореме 1, где установлено асимптотическое представление вероятности $\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \geq t),\ t > 0$, при $\mu \to 0$. Анализируются также некоторые частные ситуации. Тем самым основные результаты [9] переносятся на случай процессов с непрерывным временем. Здесь используется известная факторизационная техника и методы работы [9].

2. Формулировка основного результата

Введем функцию
$$r_u(\lambda) = \frac{u}{u - \psi(\lambda)},$$
которая при $\operatorname{Re}\lambda = 0,\ u > 0$ представляет собой двойное преобразование Лапласа-Стилтьеса (по времени и по пространству) над распределением процесса $\xi(t)$, т.е.

$$\frac{u}{u - \psi(\lambda)} = u \int\limits_0^\infty e^{-ut} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\xi(t) < x) \Big\} dt.$$

В дальнейшем будет использоваться ряд свойств функции $\psi(\lambda)$ и компонент так называемой безгранично делимой факторизации функции $r_u(\lambda)$, введенной и изученной в [1], [10]. Эти нужные нам свойства будут иметь место при соответствующих ограничениях на распределение $\xi(1)$.

Приведем эти условия.

(A_1) $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$ и для $\mu \le \mu_0$ при некотором $\mu_0 > 0$ существует не зависящее от μ число $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\xi(1)} < \infty \text{ при } -\delta \le \lambda \le \delta, \quad \psi(\delta) > 0.$$

(A_2) Если $\sigma = 0$, то $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,dS(x) < \infty$ и $\displaystyle\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} x dS(x) \ne 0$.

(A_3) Для всех $\mu \le \mu_0$ выполняется $\displaystyle\limsup_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ -\delta\le \mathrm{Re}\lambda\le\delta}} \frac{|\mathbf{E}\,\exp\{\lambda\,\xi(1)\}|}{\mathbf{E}\,\exp\{\mathrm{Re}\lambda\,\xi(1)\}} < 1$.

Заметим, что при выполнении условия (A_1) существуют моменты любого порядка случайной величины $\xi(1)$, поэтому (1) можно переписать в виде

$$\psi(\lambda) = -\mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\big) dS(x), \tag{3}$$

где $\mu = -\alpha - \int_{|x\ge 1|} x\,dS(x)$, функция $S(x)$ та же, что и в (1),

$$\psi'(0) = \mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu, \quad \psi''(0) = \sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dS(x), \quad \psi'''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dS(x).$$

Условие (A_3) является усилением свойства хребтовости функции $\psi(\lambda)$ (см. [10]). Оно эквивалентно следующему: при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $|\mathrm{Im}\lambda| > \delta_1$, $-\delta \le \mathrm{Re}\lambda \le \delta$ выполняется $\psi(\mathrm{Re}\lambda) \ge \mathrm{Re}\,\psi(\lambda) + \varepsilon_1$.

Достаточными условиями, обеспечивающими выполнение условия (A_3), будут, в частности, неравенства $\sigma^2 > 0$ или наличие абсолютно непрерывной компоненты у $S(x)$. Условие (A_2) означает, что у процесса $\xi(t)$ существует диффузионная компонента или $\xi(t)$ является процессом с ограниченной вариацией и с ненулевым сносом.

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда для* $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \ge t) = \exp\left\{ -\frac{2(a+b+c)}{l}\,t \right\} + O(\mu), \qquad \mu \to 0,$$

где

$$c = c_\mu = \frac{\psi'''_\mu(0)}{3\psi''_\mu(0)}, \qquad l = l_\mu = \psi''_\mu(0).$$

Доказательство теоремы разбивается на несколько этапов (см. секции 3–7) ниже.

3. Предварительные сведения

Представление функции $r_u(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $u > 0$ в виде $r_u(\lambda) = r_{u+}(\lambda)\, r_{u-}(\lambda)$ называется безгранично делимой факторизацией, если $r_{u+}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной полуоси, а $r_{u-}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неположительной полуоси. Функция $r_{u+}(\lambda)$ ($r_{u_-}(\lambda)$) называется положительной (отрицательной) компонентой факторизации. В [1] установлено, что функция $r_u(\lambda)$ допускает безгранично делимую факторизацию, компоненты которой имеют вид

$$r_{u+}(\lambda) = u\int_0^\infty e^{-ut}\Big\{\int_0^\infty e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\xi}(t) < x)\Big\}dt$$

$$= \exp\Big\{-\int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1)\, d_x \int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi(t) > x)\, e^{-ut}dt\Big\},$$

$$r_{u-}(\lambda) = u\int_0^\infty e^{-ut}\Big\{\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\bar{\xi}}(t) > x)\Big\}dt$$

$$= \exp\Big\{\int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1)\, d_x \int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}(\xi(t) > x)\, e^{-ut}dt\Big\}.$$

Здесь $\bar{\xi}(t) = \sup\limits_{0\le s\le t} \xi(s)$, $\bar{\bar{\xi}}(t) = \inf\limits_{0\le s\le t} \xi(s)$.

Очевидно, что функция $r_{u+}(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна и не обращается в 0 при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. Функция $r_{u-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости.

Если обозначить через $L(A)$ множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x} dG(x), \qquad \text{где} \quad \int_A |dG(x)| < \infty,$$

и где A — произвольное борелевское множество, то нетрудно заметить, что $r_{u+}(\lambda) \in L([0,\infty))$, $r_{u-}(\lambda) \in L((-\infty, 0])$, и $r_{u_\pm}(0) = 1$.

Пусть функция $g(\lambda) \in L(\mathbb{R})$, то есть она допускает на прямой $\{\operatorname{Re}\lambda = 0\}$ представление

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y}\, dG(y), \tag{4}$$

в котором полная вариация функции G ограничена. Следуя [11], для функций вида (4) при $u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ введем операторы

$$(Ag)(u,\lambda) = r_{u-}^{-1}(\lambda)\big[r_{u-}(\lambda) g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(u,\lambda) = r_{u+}^{-1}(\lambda)\big[r_{u+}(\lambda) g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

где для любого борелевского множества $D \subset \mathbb{R}$ по определению

$$\Big[\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} dG(y)\Big]^D = \int_D e^{\lambda y} dG(y).$$

В [5] доказано, что при $u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_1^- + \lambda\xi(\tau_1^-)\}; \tau_1^- < \infty\big) = (Ae)(u,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_1^+ + \lambda\xi(\tau_1^+)\}; \tau_1^+ < \infty\big) = (BAe)(u,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_2^- + \lambda\xi(\tau_2^-)\}; \tau_2^- < \infty\big) = (ABAe)(u,\lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k \geq 1$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_k^+ + \lambda\xi(\tau_k^+)\}; \tau_k^+ < \infty\big) = \big((BA)^k e\big)(u,\lambda), \tag{5}$$

$$\mathbf{E}\big(\exp\{-u\tau_{k+1}^- + \lambda\xi(\tau_{k+1}^-)\}; \tau_{k+1}^- < \infty\big) = \big(A(BA)^k\big)e\big)(u,\lambda), \tag{6}$$

где $e(\lambda) \equiv 1$ и степень оператора понимается как суперпозиция.

Если положить $\lambda = 0$ в (5), то получается преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения случайной величины τ_k^+:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ut}\, d\mathbf{P}(\tau_k^+ < t) = \big((BA)^k e\big)(u,0),$$

откуда следует

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{u\to 0}\big((BA)^k e\big)(u,0). \tag{7}$$

Это соотношение лежит в основе дальнейших рассуждений.

Остановимся более подробно на свойствах функции $\psi(\lambda)$ при выполнении условия (A_1). Эта функция аналитична внутри полосы $-\delta \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \delta$ и является выпуклой при $-\delta \leq \lambda \leq \delta$. Поэтому она достигает своего минимума на этом отрезке. Пусть λ_0 является точкой минимума, $\psi(\lambda_0) = u_0 \leq 0$. Из выпуклости следует, что уравнение $\psi(\lambda) = u$ на отрезке $-\delta \leq \lambda \leq \delta$ имеет не более двух вещественных корней $\lambda_+(u) \geq \lambda_-(u)$. При этом функция $\lambda_+(u)$ определена для $u \in [u_0, u_+]$, $u_+ = \psi(\delta) > 0$, (см. условие (A_1)), $\lambda_0 \leq \lambda_+(u) \leq \delta$, а $\lambda_-(u)$ удовлетворяет неравенству $-\delta \leq \lambda_-(u) \leq u_0$ для $u \in [u_0, u_-]$, где $u_- = \psi(-\delta)$. Если $-\mu = \mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ и выполняется условие (A_1), то $u_- > 0$ и существует единственное неотрицательное (неположительное) решение $\lambda_+(u)$ $(\lambda_-(u))$ уравнения $\psi(\lambda) = u$ при $-\delta \leq \lambda \leq \delta$, $0 < u \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = \min\{u_-, u_+\} > 0$. Здесь с необходимостью $r_{u+}^{-1}(\lambda_+(u)) = 0$, $\;r_{u-}^{-1}(\lambda_-(u)) = 0$. Для дальнейшего отметим, что в этом случае $0 < \lambda_+(0) = h < \delta$, $\lambda_-(0) = 0$, функции $\lambda_\pm(u)$ непрерывны на отрезке $[0,\varepsilon]$ и

$$\lambda_+(u) = h + \beta_1 u + O(u^2), \qquad \beta_1 = (\psi'(h))^{-1} > 0, \quad \lambda_-(u) = -\frac{u}{\mu} + O(u^2), \qquad u \to 0.$$

Введем далее следующие обозначения:

$$w_u(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_-(u))r_{u-}(\lambda)}{\lambda_-(u)}, \qquad v_u(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_+(u))r_{u+}(\lambda)}{\lambda_+(u)}.$$

Сразу отметим, что

$$w_u(\lambda_-(u)) = \frac{1}{\lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))}, \qquad v_u(\lambda_+(u)) = \frac{1}{\lambda_+(u)(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}, \tag{8}$$

где

$$(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) = \frac{\partial r_{u-}^{-1}(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_-(u)}, \qquad (r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = \frac{\partial r_{u+}^{-1}(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_+(u)}.$$

Отметим также(см. [11], [12]), что $w_u^{\pm 1}(\lambda)$, $v_u^{\pm 1}(\lambda)$ являются аналитическим функциями соответственно в областях $\mathrm{Re}\lambda < \delta$, $\mathrm{Re}\lambda > -\delta$ и равномерно ограничены в указанных областях значений u и λ, где они определены. Функции $w_u(\lambda_-(u))$, $v_u(\lambda_+(u))$ также определены по непрерывности при $u = 0$ и

$$w_0(0) = \lim_{u\to 0} w_u(\lambda_-(u)) = -1, \qquad v_0(0) = \lim_{u\to 0} v_u(\lambda_+(u)) = -1.$$

Необходимая в дальнейшем принадлежность

$$v_u^{-1}(\lambda) \in L([0,\infty)), \qquad w_u^{-1}(\lambda) \in L((-\infty,0]))$$

при $u \in (0,\varepsilon)$ и некотором $\delta > 0$ следует из результатов [5]. В [5] доказаны, а в [12] уточнены следующие леммы.

Лемма 1 ([12]) *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3) *и пусть при* $-\delta \le \mathrm{Re}\lambda \le 0$, $u \in (0,\varepsilon)$ *функция* $g_1(u,\lambda)$ *имеет вид*

$$g_1(u,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG_1(u,x), \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{Re}\lambda x} |dG_1(u,x)| \le C_1 < \infty$$

равномерно по u*. Тогда справедливо равенство*

$$(Ag_1)(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u)) g_1(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda)\, e^{\lambda a}} + (\lambda - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\, \varphi_1(u,x) dx,$$

где $|\varphi_1(u,x)| \le C_2 e^{\delta x}$ *равномерно по* $u < \varepsilon$, $x < -a$*. Если* $\int\limits_{-\infty}^{b} |dG_1|(u,x) = 0$, *то* $|\varphi_1(u,x)| \le C_3 e^{\delta(x-b)}, \quad x < -a.$

Лемма 2 ([12]) *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3) *и пусть при* $0 \le \mathrm{Re}\lambda \le \delta$, $u \in (0,\varepsilon)$ *функция* $g_2(u,\lambda)$ *имеет вид*

$$g_2(u,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG_2(u,x), \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{Re}\lambda x} |dG_2(u,x)| \le C_4 < \infty$$

равномерно по u*. Тогда справедливо равенство*

$$(Bg_2)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u)) g_2(u,\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u)b}} + (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2(u,x) dx,$$

где $|\varphi_2(u,x)| \le C_5 e^{-\delta x}$ *равномерно по* $u < \varepsilon$, $x \ge b$*. Если* $\int\limits_{-a}^{\infty} |dG_2|(u,x) = 0$, *то* $|\varphi_2(u,x)| \le C_6 e^{-\delta(x+a)}, \quad x \ge b.$

Здесь буквой C с индексами обозначены положительные постоянные.

4. Асимптотика распределения θ при $h \to 0$

В качестве первого шага доказательства теоремы 1 с помощью лемм 1, 2 будет исследована асимптотика распределения θ при $h \to 0$. Отметим, что числа h и μ

непрерывно связаны и стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$\psi(h) = \psi(0) + h\psi'(0) + \frac{h^2}{2}\psi''(0) + \cdots,$$

где

$$\psi(h) = \psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = -\mu = \mathbf{E}\,\xi(1), \qquad \psi''(0) = \mathbf{D}\,\xi(1),$$

следует

$$\mu = \frac{\psi''(0)}{2}\,h + \frac{\psi'''(0)}{6}\,h^2 + O(h^3), \quad h \to 0. \tag{9}$$

Здесь величины $\psi''(0)$, $\psi'''(0)$ равномерно ограничены для малых значений $\mu > 0$. Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \to 0$ одновременно есть $o(1)$ при $\mu \to 0$ и наоборот. Отметим дополнительно, что выполнение условий (A_1)–(A_3) равномерно по малым значениям μ эквивалентно равномерному выполнению этих условий по малым значениям h.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_3). *Тогда при* $h \to 0$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = d^k(h)e^{-kh(a+b)} + O(h), \qquad k \geq 1, \tag{10}$$

$$d(h) = 1 - \rho h + O(h^2), \qquad \rho = \lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + \lim_{u\to 0}\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{2(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))}, \tag{11}$$

здесь h *— единственное положительное решение уравнения* $\psi(\lambda) = 0$.

Доказательство. Для $k = 1$ из (7) имеем $\mathbf{P}(\theta \geq 1) = \lim_{u\to 0}(BAe)(u, 0)$. Далее применяем леммы 1 и 2:

$$(Ae)(u,\lambda) = \frac{w_u(\lambda_-(u))\,e^{\lambda_-(u)a}}{w_u(\lambda)\,e^{\lambda a}} + (\lambda - \lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\,\varphi_1(u,x)dx,$$

$$(BAe)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u))\,e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\,e^{\lambda_+(u)b}}\times$$

$$\times\left[\frac{w_u(\lambda_-(u))\,e^{(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))a}}{w_u(\lambda_+(u))} + (\lambda_+(u) - \lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\,\varphi_1(u,x)dx\right]$$

$$+(\lambda - \lambda_+(u))\int_b^{\infty} e^{\lambda x}\,\varphi_2(u,x)dx,$$

где для функций $\varphi_1(u,x)$, $\varphi_2(u,x)$ имеют место оценки из лемм 1, 2 соответственно. Напомним, что функции $w_u^{\pm 1}(\lambda)$, $v_u^{\pm 1}(\lambda)$ равномерно ограничены в областях значений u и λ, где они определены,

$$w_0(0) = \lim_{u\to 0} w_u(\lambda_-(u)) = -1, \qquad v_0(0) = \lim_{u\to 0} v_u(\lambda_+(u)) = -1.$$

Поэтому при $h \to 0$

$$\lim_{u\to 0}(BAe)(u,0) = \frac{v_0(h)\,e^{-hb}}{v_0(0)}\left[\frac{w_0(0)\,e^{-ha}}{w_0(h)} + h\int_{-\infty}^{-a} e^{hx}\,\varphi_1(0,x)dx\right]$$

$$-h\int_b^{\infty}\varphi_2(0,x)dx = \frac{v_0(h)}{w_0(h)}\,e^{-h(a+b)} + O(h). \tag{12}$$

Равномерная ограниченность последних интегралов при малых значениях числа h также без труда следует из лемм 1 и 2. Обозначим

$$d(h) = \lim_{u\to 0} \frac{v_u(\lambda_+(u))}{w_u(\lambda_+(u))} = \frac{v_0(h)}{w_0(h)}. \tag{13}$$

Покажем, что эта величина отделена от единицы при малых значениях h. Поскольку $r_{u+}^{-1}(\lambda_+(u)) = 0$, имеет место следующее разложение функции $r_{u+}^{-1}(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda_+(u)$:

$$r_{u+}^{-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(u))(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(u))^2}{2}(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) + \dots .$$

При $\lambda = 0$ из (8) имеем $(r_{u+}^{-1}(0) = 1)$

$$v_u(\lambda_+(u)) = \frac{1}{\lambda_+(u)(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = -1 + \frac{\lambda_+(u)}{2}\,\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + \dots .$$

Здесь отметим, что $(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) \neq 0$, поскольку $\lambda_+(u)$ является простым нулем функции $r_{u+}^{-1}(\lambda)$. Устремив u к нулю, получаем

$$v_0(h) = -1 + \frac{h}{2} \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} + O(h^2), \qquad h \to 0. \tag{14}$$

Аналогично, поскольку $r_{u-}^{-1}(\lambda_-(u)) = 0$, имеет место следующее разложение функции $r_{u-}^{-1}(\lambda)$ в точке $\lambda_-(u)$:

$$r_{u-}^{-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-(u))(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) + \frac{(\lambda - \lambda_-(u))^2}{2}(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) + \dots .$$

Поэтому

$$w_u^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda_-(u) r_{u-}^{-1}(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(u)} = \frac{\lambda_-(u)}{\lambda - \lambda_-(u)} \times$$

$$\times \left[(\lambda - \lambda_-(u))(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u)) + \frac{(\lambda - \lambda_-(u))^2}{2}(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) + \dots \right] =$$

$$= \lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u) \left[1 + \frac{\lambda - \lambda_-(u)}{2}\,\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + \dots \right],$$

и в силу того,что $\lambda_-(u)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u) = \dfrac{1}{w_u(\lambda_-(u))}$ (см. (8)), при $\lambda = \lambda_+(u)$ имеем

$$\frac{1}{w_u(\lambda_+(u))} = \frac{1}{w_u(\lambda_-(u))} \left[1 + \frac{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)}{2}\,\frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + \dots \right].$$

При $u \to 0$ $(w_0(0) = -1)$ получаем

$$\frac{1}{w_0(h)} = -1 - \frac{h}{2} \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} + O(h^2). \tag{15}$$

Из (7) и (12)–(15) следует доказательство леммы 3 при $k = 1$.

Далее используем метод индукции. При $k = 1$ соотношение (10) доказано. Пусть (10) выполнено для некоторого $k \geq 1$. Покажем, что это соотношение выполняется и для $k + 1$. Для этого с помощью лемм 1 и 2 будем исследовать асимптотику при

$h \to 0$ выражений вида $(Ag)(u,\lambda)$ и $(BAg)(u,\lambda)$, если $g(u,\lambda) = ((BA)^k e)(u,\lambda)$ или $g(u,\lambda) = (A(BA)^k e)(u,\lambda)$.

Как следует из (5) и (6), функции $g(u,\lambda)$ указанного вида являются двойными преобразованиями над распределениями пар $(\tau_k^{\pm}, \xi(\tau_k^{\pm}))$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(u,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x} dG_1(u,x), \qquad (BAg)(u,\lambda) = \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x} dG_2(u,x)$$

величины $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG_i(u,x)|$ ограничены равномерно по u и $k \geq 1$, $i = 1,2$. Опять в силу лемм 1 и 2

$$\big(BA(BA)^k e\big)(u,\lambda) = \frac{v_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)\, e^{\lambda_+(u) b}} \times$$

$$\times \left[\frac{w_u(\lambda_-(u))((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u) a}}{w_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda_+(u) a}} + (\lambda_+(u) - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u) x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x) dx \right]$$

$$+ (\lambda - \lambda_+(u)) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2^{(k)}(u,x) dx.$$

Здесь функция $\varphi_1^{(k)}(u,x)$ появляется вследствие применения леммы 1 к функции $g(u,\lambda) = ((BA)^k e)(u,\lambda)$, а функция $\varphi_2^{(k)}(u,x)$ — в результате применения леммы 2 к функции $g(u,\lambda) = (A(BA)^k e)(u,\lambda)$, и для них имеют место оценки из соответствующих лемм. Как и ранее, имеем равномерно по $k \geq 1$ и по u, близким к нулю,

$$(\lambda_+(u) - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u) x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x) dx = O(h), \qquad h \to 0,$$

а также $\lambda_+(u) \int\limits_{b}^{\infty} e^{\lambda x}\, \varphi_2^{(k)}(u,x) dx = O(h)$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\theta \geq k+1) = \lim_{u \to 0} \big(BA(BA)^k e\big)(u,0) = \lim_{u \to 0} \frac{v_u(\lambda_+(u))}{e^{\lambda_+(u) b}} \times$$

$$\times \left[\frac{w_u(\lambda_-(u))((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{\lambda_-(u) a}}{w_u(\lambda_+(u))\, e^{\lambda_+(u) a}} + (\lambda_+(u) - \lambda_-(u)) \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u) x}\, \varphi_1^{(k)}(u,x) dx \right]$$

$$+ \lim_{u \to 0} \lambda_+(u) \int\limits_{b}^{\infty} \varphi_2^{(k)}(u,x) dx = \frac{v_0(h)}{e^{hb}} \left[\frac{\lim_{u \to 0}((BA)^k e)(u,\lambda_-(u))\, e^{-ha}}{w_0(h)} + O(h) \right] + O(h)$$

$$= \frac{v_0(h)\, e^{-h(a+b)}}{w_0(h)} \big[d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h) \big] = d^{k+1}(h)\, e^{-(k+1)h(a+b)} + O(h).$$

Лемма 3 доказана.

Отметим, что утверждение этой леммы не может рассматриваться в качестве основного результата по двум причинам. Во-первых, число ρ неизбежно зависит от h (и от μ), и эта зависимость требует уточнения. Во-вторых, число h возникает в процессе доказательства, а в окончательной формулировке желательно использовать исходный малый параметр μ вместо h.

5. Асимптотика распределения $\mu\theta_\mu$ при $\mu \to 0$

Будем предполагать, что $\mu = \alpha + \int\limits_{|x \geq 1|} x\,dS(x) > 0$ — достаточно малое число, и рассматриваем $\xi(t)$ как семейство процессов, зависящее от малого параметра μ. При необходимости, чтобы указать зависимость процесса и его характеристик от μ, снабжаем эти величины индексом μ, например, ρ_μ, $\psi_\mu(\lambda)$, и т.д.

В дальнейшем положительные числа ε и δ будут выбираться такими, чтобы для $0 < u < \varepsilon$ и $0 \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \delta$ $(-\delta \leq \mathrm{Re}\lambda \leq 0)$ число $\lambda_+(u)$ $(\lambda_-(u))$ являлось единственным решением уравнения $\psi(\lambda) = u$. Утверждения лемм 1, 2 и связанные с ними последующие оценки остаются в силе и являются равномерными по малым значениям числа μ.

Из (9) следует $h = 2\mu/\psi''(0) + O(\mu^2)$, поэтому

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \lim_{u \to 0} \big((BA)^k e\big)(u, 0) = d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h)$$

$$= d^k(h) \exp\{-k(2\mu/\psi''(0) + O(\mu^2))(a + b)\} + O(h)$$
$$= d^k(h) \exp\{-k(2\mu/\psi''(0))(a + b)\} + O(\mu),$$

и при $t = k\mu$

$$\mathbf{P}(\mu\theta \geq t) = d^{t/\mu}(h) \exp\{-2t(a + b)/\psi''(0)\} + O(\mu).$$

Воспользовавшись далее (11), получаем при $\mu \to 0$

$$\log d^{t/\mu}(h) = \frac{t}{\mu} \log(1 - \rho h + O(h^2)) = \frac{-2\rho t}{\psi''(0)} + O(\mu).$$

Таким образом, в условиях леммы 3 имеем

$$\mathbf{P}(\mu\theta_\mu \geq t) = \exp\left\{-\frac{2(a + b + \rho)}{\psi''(0)}\, t\right\} + O(\mu), \qquad \mu \to 0. \tag{16}$$

Как следует из (11), число $\rho = \rho_\mu$ весьма сложно выражается через компоненты факторизации, которые, в свою очередь, доступны для вычисления в явном виде далеко не всегда. Приведем сначала явные формулы для ρ в некоторых наиболее простых ситуациях, в которых известны формулы для компонент факторизации.

6. Рассмотрение частных случаев

1. Пусть $\xi(t)$ — винеровский процесс с отрицательным сносом (см. [1]), т.е.

$$\psi(\lambda) = \mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}, \qquad \mu < 0.$$

В этом случае имеем

$$r_{u\pm}(\lambda) = \frac{\lambda_\pm(u)}{\lambda_\pm(u) - \lambda},$$

где

$$\lambda_\pm(u) = \frac{\pm(\mu^2 + 2u\sigma^2)^{1/2} - \mu}{\sigma^2}, \qquad (r_{u\pm}^{-1})'(\lambda) = -1, \quad (r_{u\pm}^{-1})''(\lambda) = 0.$$

Следовательно, $\rho = \rho_\mu \equiv 0$. Непосредственными вычислениями в [5] установлено, что

$$\big((BA)^k e\big)(u,\lambda) = \exp\big\{\lambda b + \lambda_-(u)\big((k-1)b + ka\big) - k\lambda_+(u)(b+a)\big\}.$$

Так как $\lambda_+(0) = -2\mu/\sigma^2$, $\lambda_-(0) = 0$, то из (2) и (7) следует

$$\mathbf{P}(\theta \ge k) = \lim_{u\to 0}\big((BA)^k e\big)(u,0) = \exp\{2\mu\sigma^{-2}k(a+b)\}.$$

Полагая $t = \mu k$, получаем

$$\mathbf{P}(\mu\theta \ge t) = \exp\{-2\sigma^{-2}(a+b)t\}.$$

2. Пусть $\xi(t)$ является обобщённым пуассоновским процессом с отрицательным сносом (параметр сноса $\alpha < 0$), показательно распределёнными скачками с параметром $\gamma > 0$ и показательно распределенными с параметром $\beta > 0$ интервалами времени между скачками, то есть

$$\psi(\lambda) = \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi(1)} = \alpha\lambda + \beta\int\limits_0^\infty \big(e^{\lambda x} - 1\big)\,dF(x),$$

где $F(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, если $x \ge 0$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\beta\lambda}{\gamma - \lambda}, \quad \mu = \psi'(0) = \alpha + \frac{\beta}{\gamma},$$

и уравнение $\psi(\lambda) = u$ при $u \ge 0$ имеет два решения

$$\lambda_\pm(u) = \frac{\beta + \alpha\gamma + u \pm \sqrt{(\beta + \alpha\gamma + u)^2 - 4\alpha\gamma u}}{2\alpha}.$$

При $u > 0$ имеем $\lambda_+(u) > 0$, $\lambda_-(u) < 0$ и, если $\mu < 0$, то

$$h = \lambda_+(0) = \gamma + \frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad \lambda_-(0) = 0, \quad \mu = \frac{\alpha}{\gamma}h.$$

Положим

$$R_{u+}(\lambda) = \frac{\lambda_+(u)(\gamma - \lambda)}{\gamma(\lambda_+(u) - \lambda)}, \qquad R_{u-}(\lambda) = \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_-(u) - \lambda}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\lambda_+(u)\lambda_-(u) = \frac{\gamma u}{\alpha}, \qquad \lambda_+(u) + \lambda_-(u) = \frac{\beta + \gamma\alpha + u}{\alpha},$$

нетрудно показать, что $r_u(\lambda) = R_{u+}(\lambda)R_{u-}(\lambda)$, и это представление удовлетворяет необходимым требованиям к компонентам безгранично делимой факторизации. В силу единственности подобного представления заключаем, что $R_{u\pm}(\lambda) = r_{u\pm}(\lambda)$.

Здесь также $(r_{u-}^{-1})'(\lambda) = -1$, $(r_{u-}^{-1})''(\lambda) = 0$, и после некоторых простых вычислений находим

$$\rho = \lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\gamma - \lambda_+(u)} = \frac{1}{\gamma - h} = \frac{1}{\gamma} + O(\mu), \quad \mu \to 0.$$

3. Пусть теперь $\xi(t)$ — непрерывный снизу случайный процесс, т.е. он не имеет отрицательных скачков. Пусть по-прежнему $\mathbf{E}\,\xi(1) = -\mu < 0$ и выполняются условия

(A_1)–(A_3), соответствующие данному случаю. Тогда представление (3) принимает вид

$$\psi(\lambda) = \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi(1)} = \mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_0^\infty \big(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\big) dS(x).$$

Известно [10], что при этом функция $\psi(\lambda)$ аналитична по крайней мере при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, уравнение $\psi(\lambda) = u$ при $\lambda < 0$, $u \geq 0$ имеет единственное решение $\lambda_-(u)$, и при $u > 0$ выполняется $\lambda_-(u) < 0$, $\lambda_-(0) = 0$. Здесь

$$r_{u-}(\lambda) = \lambda_-(u)(\lambda_-(u) - \lambda)^{-1}, \qquad r_{u+}(\lambda) = \frac{u(\lambda_-(u) - \lambda)}{\lambda_-(u)(u - \psi(\lambda))}.$$

В этом случае также $(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u)) = 0$ и поэтому

$$\rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}.$$

Займемся вычислением этой величины. Имеем

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{u - \psi(\lambda)}{\lambda_-(u) - \lambda}\right]' = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{\psi'(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(u)} + \frac{u - \psi(\lambda)}{(\lambda_-(u) - \lambda)^2}\right],$$

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\,\frac{\psi'(\lambda_+(u))}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)},$$

$$(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) = \frac{\lambda_-(u)}{u}\left[\frac{\psi''(\lambda_+(u))}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)} - \frac{2\psi'(\lambda_+(u))}{(\lambda_+(u) - \lambda_-(u))^2}\right],$$

$$\rho = \lim_{u\to 0} \frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi''(\lambda_+(u))}{\psi'(\lambda_+(u))} - \frac{2}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)}\right].$$

Далее выпишем разложения в нуле функций $\psi(\lambda)$, $\psi'(\lambda)$, $\psi''(\lambda)$ по степеням λ, подставим в них значение $\lambda = \lambda_+(u)$ и устремим $u \to 0$. Приходим к соотношению

$$\rho = \frac{\psi''(0) + \psi'''(0)h + O(h^2)}{2\big(\psi'(0) + \psi''(0)h + \dfrac{\psi'''(0)}{2}h^2 + O(h^3)\big)} - \frac{1}{h}.$$

Заменяя стоящее в знаменателе $\psi'(0)$ на его выражение в соответствии с (9), получаем

$$\rho = \frac{\psi''(0) + \psi'''(0)h + O(h^2)}{\psi''(0)h + \dfrac{2\psi'''(0)}{3}h^2 + O(h^3)\big)} - \frac{1}{h} = \frac{\psi''(0)}{3\psi'''(0)} + O(h).$$

7. Представление величины ρ в общем случае

Рассмотренные примеры подсказывают вид представления для величины ρ в общем случае, охватываемом условиями (A_1)–(A_3).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (A_1)–(A_3). Тогда при $\mu \to 0$*

$$\rho = \rho_\mu = \frac{\psi''_\mu(0)}{3\psi'''_\mu(0)} + O(\mu).$$

Доказательство Обозначим

$$\tau_+(x) = \inf\{t:\ \xi(t) \geq x\}, \quad \tau_-(y) = \inf\{t:\ \xi(t) \leq y\}, \quad x > 0, \ \ y < 0,$$

$$\chi_+(x) = \xi(\tau_+(x)) - x, \qquad \chi_-(y) = \xi(\tau_-(y)) - y.$$

В [13] установлено, что для произвольного однородного процесса с независимыми приращениями при $\operatorname{Re}\nu < 0$, $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ и $u > 0$

$$\int_0^\infty e^{\nu x}\mathbf{E}\left(e^{-u\tau_+(x)}e^{\lambda\chi_+(x)};\ \tau_+(x) < \infty\right)dx = \frac{1}{\lambda-\nu}\left[1 - \frac{r_{u+}(\nu)}{r_{u+}(\lambda)}\right].$$

Известно также из [14], что если $0 < \mathbf{E}\,\xi(1) < \infty$ или $\mathbf{E}\,\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\,\xi^2(1) < \infty$, то существует предельное при $y \to \infty$ собственное распределение $\mathbf{P}(\chi_+ < x) = \lim_{y\to\infty}\mathbf{P}(\chi_+(y) < x)$ величины перескока через бесконечно удалённый барьер, и

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_+} = \lim_{\nu\to 0}\nu\int_0^\infty e^{\nu y}e^{\lambda\chi_+(y)}dy = \frac{\psi^*(\lambda)}{\lambda\mathbf{E}\,\xi^*}, \qquad \psi^*(\lambda) = -\lim_{u\to 0}\frac{r_{u+}(-1)}{r_{u+}(\lambda)} =$$

$$= (\lambda+1)\int_0^\infty e^{-y}e^{\lambda\chi_+(y)}dy - 1, \qquad \left[\psi^*(\lambda)\right]'_{\lambda=0} = \mathbf{E}\,\xi^* > 0.$$

Здесь $\psi^*(\lambda)$ является логарифмом преобразования Лапласа-Стилтьеса безгранично делимого распределения некоторой положительной случайной величины ξ^*, построенной по рассматриваемому процессу $\xi(t)$.

Аналогично, рассмотрев процесс $-\xi(t)$ вместо $\xi(t)$, получаем при $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ и $u > 0$ и (см. [14])

$$\int_{-\infty}^0 e^{\nu x}\mathbf{E}\left(e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)};\ \tau_-(x) < \infty\right)dx = \frac{1}{\nu-\lambda}\left[1 - \frac{r_{u-}(\nu)}{r_u(\lambda)}\right]. \tag{17}$$

Также для $-\infty < \mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ существует предельное при $x \to -\infty$ собственное распределение $\mathbf{P}(\chi_> y) = \lim_{x\to-\infty}\mathbf{P}(\chi_-(x) > y)$ величины перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер, и

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-} = \lim_{\nu\to 0}\nu\int_{-\infty}^0 e^{\nu y}e^{\lambda\chi_-(y)}dy = \frac{\psi^{**}(\lambda)}{\lambda\mathbf{E}\,\xi^{**}}, \qquad \psi^{**}(\lambda) = -\lim_{u\to 0}\frac{r_{u-}(-1)}{r_{u-}(\lambda)} =$$

$$= (1-\lambda)\int_{-\infty}^0 e^{x}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1, \qquad \left[\psi^{**}(\lambda)\right]'_{\lambda=0} = \mathbf{E}\,\xi^{**} < 0. \tag{18}$$

Здесь $\psi^{**}(\lambda)$ также является логарифмом преобразования Лапласа-Стилтьеса безгранично делимого распределения некоторой отрицательной случайной величины ξ^{**}.

Из (18) следует $\psi^{**}(\lambda) = \lambda\mathbf{E}\,\xi^{**}\,\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-}$ и

$$(\psi^{**})'(\lambda) = \mathbf{E}\,\xi^{**}\left(\mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-} + \lambda\mathbf{E}\,\chi_- e^{\lambda\chi_-}\right), \qquad (\psi^{**})'(0) = \mathbf{E}\,\xi^{**}, \tag{19}$$

$$(\psi^{**})''(\lambda) = \mathbf{E}\,\xi^{**}\left(2\mathbf{E}\,\chi_- e^{\lambda\chi_-} + \lambda\mathbf{E}\,\chi_-^2\, e^{\lambda\chi_-}\right), \qquad (\psi^{**})''(0) = 2\mathbf{E}\,\xi^{**}\mathbf{E}\,\chi_-. \tag{20}$$

С другой стороны, из (18) получаем

$$(\psi^{**})'(\lambda) = \left((1-\lambda)\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathbf{E}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1\right)' = -\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathbf{E}e^{\lambda\chi_-(x)}dx +$$

$$+(1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx, \qquad (\psi^{**})'(0) = -1+\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)dx, \tag{21}$$

$$(\psi^{**})''(\lambda) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx + (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-^2(x)\,e^{\lambda\chi_-(x)}dx,$$

$$(\psi^{**})''(0) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-^2(x)dx. \tag{22}$$

Из (17) при $\nu = 1$ следует

$$-\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)} = (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx - 1.$$

Продифференцируем дважды по переменной λ обе части последнего равенства:

$$-\left(\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)}\right)'_\lambda = -r_{u-}(1)(r_u^{-1})'(\lambda) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx + (1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx, \tag{23}$$

$$-\left(\frac{r_{u-}(1)}{r_u(\lambda)}\right)''_\lambda = -r_{u-}(1)(r_u^{-1})''(\lambda) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)\,e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx +$$

$$+(1-\lambda)\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-^2(x)e^{-u\tau_-(x)}e^{\lambda\chi_-(x)}dx. \tag{24}$$

Положим $\lambda = \lambda_-(u)$ в (23) и (24) и устремим u к нулю. В результате в силу (18)–(22) будем иметь

$$-\lim_{u\to 0} r_{u-}(1)(r_u^{-1})'(\lambda(u)) = -1+\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)dx = (\psi^{**})'(0) = \mathbf{E}\xi^{**},$$

$$-\lim_{u\to 0} r_{u-}(1)(r_u^{-1})''(\lambda(u)) = -2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^x\mathbf{E}\chi_-^2(x)dx = (\psi^{**})'(0) = 2\mathbf{E}\xi^{**}\mathbf{E}\chi_-.$$

В итоге приходим к следующему соотношению:

$$\lim_{u\to 0}\frac{r_{u-}(1)(r_{u-}^{-1})''(\lambda_-(u))}{2r_{u-}(1)(r_{u-}^{-1})'(\lambda_-(u))} = \mathbf{E}\chi_-. \tag{25}$$

Напомним, что случайная величина χ_- имеет собственное распределение в силу неравенства $-\infty < \mathbf{E}\xi(1) < 0$, при этом $\mathbf{E}|\chi_-| < \infty$.

Число ρ определено в (11), поэтому остается исследовать выражение

$$\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))}.$$

Простыми вычислениями получаем следующие представления:

$$(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u)) = -\psi'(\lambda_+(u))\frac{r_{u-}(\lambda_+(u))}{u},$$

$$(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u)) = -\psi''(\lambda_+(u))\frac{r_{u-}(\lambda_+(u))}{u} - \frac{2\psi'(\lambda_+(u))}{ur_{u-}^{-1}(1)}\left(\frac{r_{u-}(\lambda)}{r_{u-}(1)}\right)'_{\lambda=\lambda_+(u)},$$

и затем

$$\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \lim_{u\to 0}\frac{\psi''(\lambda_+(u))}{2\psi'(\lambda_+(u))} + \lim_{u\to 0}\left(\frac{r_{u-}(\lambda)}{r_{u-}(1)}\right)'_{\lambda=\lambda_+(u)}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{r_{u-}(1)}{r_{u-}(\lambda_+(u))} =$$

$$= \frac{\psi''(h)}{2\psi'(h)} + \psi^{**}(h)\left(\frac{1}{\psi^{**}(\lambda)}\right)'_{\lambda=h}.$$

Из (19), (20) получаем

$$\psi^{**}(h)\left(\frac{1}{\psi^{**}(\lambda)}\right)'_{\lambda=h} = -\psi^{**}(h)\,\frac{(\psi^{**})'(h)}{(\psi^{**}(h))^2} = -\frac{\mathbf{E}\,e^{h\chi_-} + h\mathbf{E}\chi_-\,e^{h\chi_-}}{h\mathbf{E}\,e^{h\chi_-}} =$$

$$= -\frac{1}{h}\left[1 + \frac{h\mathbf{E}\chi_-\,e^{h\chi_-}}{\mathbf{E}\,e^{h\chi_-}}\right].$$

В итоге получаем

$$\lim_{u\to 0}\frac{(r_{u+}^{-1})''(\lambda_+(u))}{2(r_{u+}^{-1})'(\lambda_+(u))} = \frac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)} - \mathbf{E}\,\chi_- + O(h), \qquad h\to 0.$$

Так как h и μ стремятся к нулю одновременно, то последнее соотношение вместе с (25) дает

$$\rho = \rho_\mu = \frac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)} + O(\mu), \qquad \mu\to 0.$$

Этим завершается доказательство леммы 4.

Остается заметить, что асимптотическая формула (16) сохраняется в силе после замены числа ρ в ней на $c = \dfrac{\psi'''(0)}{3\psi''(0)}$. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] B.A. Rogozin, *On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580–591.

[2] V.I. Lotov, A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Math. Sciences, 2018, V. **230**:1 (2018), 112–117.

[3] V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54**:2 (2013), 265–270.

[4] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **45**:4 (2004), 680–698.

[5] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On the number of crossings of a strip for stochastic processes with independent increments*, Siberian Adv. Math., 1993, **3**:2 (1993), 145–152.

[6] V.R. Hodjibaev, A.A. Atahodjaev, *Raspredelenie chisla peresechenij polosy dlya sluchajnyh processov s nezavisimymi prirashcheniyami*, Uz. mat. zhurnal, **1** (2010), 150–169.

[7] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On the distribution of the crossing number of a strip by trajectories of a stochastic process with independent increments*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 1013–1025.

[8] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Sbornik: Mathematics, **194**:6 (2003), 927–939.

[9] В.И. Лотов, *О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий*, Сибирские электронные математические известия, 2024 (в печати).

[10] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J., **10**:6 (1969), 989–1010.

[11] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. I*, Siberian Adv. Math., **8**:3 (1998), 90–113.

[12] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. II*, Siberian Adv. Math., **8**:4 (1998)1998, 41–59.

[13] E.A. Pecherskii, B.A. Rogozin, *On joint distributions of random variables associated with fluctuations of a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **14**:3 (1969), 410–423.

[14] A.A. Mogul'skii, *On the distribution of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21**:3 (1977), 470–481.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru

Вали Рахимджанович Ходжибаев,
Наманганский инженерно-строительный институт,
ул. Ислама Каримова 12, Наманган,
160103 Узбекистан;
Институт Математики имени В.И.Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская 46, Ташкент,
100174 Узбекистан
vkhodjibayev@mail.ru