S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 1167–1180 (2024) УДК 517.956.4
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.077 MSC 35K58, 35Q92

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ХАОТИЧНОЙ ДИНАМИКЕ ПОЛИМЕРНОЙ МОЛЕКУЛЫ

В. Н. Старовойтов, А. А. Титова

Представлено О.С. Розановой

Abstract: In this paper, it is shown that the problem of chaotic dynamics of a polymer molecule in a liquid can be written as a coefficient inverse problem for a nonlocal in time parabolic equation. The weak solvability of this inverse problem is established for the cases of the Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Keywords: polymer chain, chaotic dynamics, nonlocal parabolic equation, inverse problem, solvability.

1 Введение

Пусть $T > 0$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Данная работа посвящена задаче об определении функций $u : \Omega_T \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют в пространственно–временном цилиндре $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ следующему нелинейному параболическому уравнению:

$$\partial_t u - \Delta u + \varphi\Big(\int_0^T u(\cdot, t)\, dt \Big)\, u - \lambda\, u = 0, \tag{1}$$

Starovoitov, V. N., Titova, A. A. Inverse problem on chaotic dynamics of a polymer molecule.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00261, https://rscf.ru/project/23-21-00261/).

Поступила 26 августа 2024 г., опубликована 4 декабря 2024 г.

начальному и граничному условиям:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

а также дополнительному уравнению, называемому обычно условием переопределения:

$$\int_\Omega u(x,t)\,dx = 1 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

В этих уравнениях $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ является заданной функцией, n — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, x — радиус–вектор точек в $\mathbb{R}^d$ и t — скалярная переменная, которую по традиции будем называть временем. Функцию $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ мы будем называть потенциалом взаимодействия, что будет пояснено далее в работе. Коэффициент $\lambda = \lambda(t)$ в уравнении (1) является одной из искомых функций, а для его определения к начально-краевой задаче (1)–(3) добавлено условие переопределения (4). Такого рода задачи относят к классу коэффициентных обратных задач. Задачу (1)–(4) мы в дальнейшем будем называть *задачей* AN. Буква N в названии означает, что речь идёт о задаче Неймана. В данной работе ещё будет рассмотрена *задача* AD, которая отличается от задачи AN тем, что краевое условие Неймана (3) заменено условием Дирихле:

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Изучению теории обратных задач посвящено огромное количество математических работ. Это объясняется как многочисленными приложениями, так и множеством разновидностей обратных задач. Поэтому практически невозможно в рамках статьи сделать претендующий на полноту обзор полученных результатов. Мы и не ставим такой цели. Наиболее близкий к данной статье круг рассматриваемых вопросов представлен в книге [1]. Следует отметить, что нам не удалось найти работы, где изучались бы задачи, подобные нашей. Во-первых, уравнение (1) содержит член с интегралом от решения по всему интервалу времени, на котором решается задача. Эта ситуация необычна не только для обратных задач, но и вообще для параболических уравнений. Появление такого интеграла в уравнении будет объяснено далее. Даже если предположить, что член с λ отсутствует, то есть рассматривается прямая задача, то, например, единственность решения доказана лишь с некоторыми ограничениями на величину данных задачи [2, 3]. Фактически T должно быть достаточно малым. Это обстоятельство вносит определённые трудности при доказательстве разрешимости обратной задачи, поскольку обычно требуется однозначная разрешимость приближённой прямой задачи [1, 4], что необходимо при построении отображения для использования какой-либо теоремы о неподвижной точке. В работе [5] рассмотрена обратная задача с подобным нелокальным по времени членом в граничном условии. Для её решения применён довольно оригинальный метод, заключающийся во включении условия переопределения в уравнение, выписанное для лапласиана от решения исходной задачи. К сожалению, мы не смогли адаптировать данный метод к нашему случаю, при этом существенную роль сыграло наличие нелинейного члена в уравнении (1). В общем случае, когда от функции φ требуется лишь непрерывность без ограниченности, этот нелинейный член не является младшим членом в уравнении. Этот факт вносит значительные трудности в доказательство разрешимости задачи, которые мы не смогли преодолеть. По этой причине в данной работе существование решения доказано лишь в случае ограниченной функции φ. При этом не накладывается никаких ограничений на величину данных задачи.

Следует отметить, что во многих работах по обратным задачам предполагается выполненными масса условий на коэффициенты уравнения, на начальные данные и др., что диктуется невозможностью провести доказательство разрешимости в более общем случае. Например, условие переопределения (4) записывают с весовой функцией под интегралом, которая обращается в нуль на границе $\partial\Omega$. Такая постановка очень помогает при рассмотрении задачи Дирихле и визуально не сильно отличается от нашей. Однако наша постановка задачи возникла при описании конкретного физического процесса, а именно, хаотичной динамики полимерной цепочки в жидкости. Переменная t играет роль параметра длины дуги вдоль цепочки, искомая функция $u = u(x,t)$ представляет собой плотность вероятности того, что t-е звено цепи находится в точке x. В силу того, на положение каждого звена цепи влияют все остальные звенья, в уравнении присутствует упомянутый выше интеграл от u по всей длине цепочки. Этот интеграл стоит в аргументе функции φ, которая отвечает за взаимодействие звеньев цепи. По этой причине φ называется потенциалом взаимодействия. Условие переопределения (4) нельзя записать иначе, поскольку интеграл от плотности вероятности по всей области Ω должен быть равен единице для всех t. То есть все звенья цепи с вероятностью единица должны быть в Ω. Подобная ситуация имеет место и с другими данными задачи. Вводимые на них ограничения не должны противоречить физическому смыслу.

Модель хаотичной динамики полимерной молекулы, соответствующая исследуемой обратной задаче, была предложена в [6]. Цель данной работы состоит в установлении эквивалентной формулировки этой модели в виде обратной задачи, что, вообще говоря, является более естественным для задач теории вероятности.

Для решения задач AN и AD мы воспользуемся их спецификой и запишем в виде задач CN и CD соответственно. Последние как раз и представляют предложенную в [6] модель для случая краевого условия Дирихле. Обобщённая разрешимость задачи CD была доказана ранее в [7], а для задачи CN мы сделаем это в данной работе. Задача с условием

Неймана рассмотрена нами из соображений общности. В конце концов, обратные задачи, подобные AN и AD, могут встретиться и других областях.

2 Преобразование задачи

2.1. Задача *AN*. В постановке задачи AN нет уравнения для определения неизвестной функции λ. Следуя распространённому подходу к исследованию коэффициентных обратных задач, из уравнений (1)–(4) можно получить соотношение для λ. Проинтегрировав уравнение (1) по Ω, с учётом условий (3) и (4) не сложно получить, что

$$\lambda(t) = \int_\Omega \varphi\Big(\int_0^T u(x,s)\,ds\Big)\, u(x,t)\,dx, \quad t \in (0,T]. \tag{6}$$

Систему уравнений (1)–(3), (6) назовём *задачей* BN. Эта задача при выполнении некоторых условий гладкости и интегрируемости функций u и λ эквивалентна задаче AN.

Для исследования разрешимости задачи BN используются разные подходы, однако они неприменимы в нашем случае. Мы проведём дальнейшее преобразование задачи. Заметим, что в постановке задачи BN не требуется выполнения условия (4). Введём обозначение:

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds}.$$

Как следует из уравнения (1), функция v удовлетворяет в Ω_T следующему уравнению

$$\partial_t v - \Delta v + \varphi\Big(\int_0^T u(\cdot,t)\,dt\Big)\, v = 0, \tag{7}$$

причём

$$v(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$
$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T].$$

Интегрирование уравнения (7) по Ω с учётом (6) даёт:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)\,dx = -\int_\Omega \varphi\Big(\int_0^T u(x,t)\,dt\Big)\, v(x,t)\,dx =$$
$$-\, e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} \int_\Omega \varphi\Big(\int_0^T u(x,t)\,dt\Big)\, u(x,t)\,dx = -\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} = \frac{d\mu(t)}{dt},$$

где $\mu(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds}$. Отсюда следует, что

$$\mu(t) = \int_\Omega v(x,t)\,dx - \int_\Omega u_0(x)\,dx + 1.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\int_\Omega u_0(x)\,dx = 1$, поэтому задача BN приводит к *задаче* CN для функций v и μ:

$$\partial_t v - \Delta v + \varphi\Big(\int_0^T \frac{v(\cdot,t)}{\mu(t)}\,dt\Big)\,v = 0, \tag{8}$$

$$\mu(t) = \int_\Omega v(x,t)\,dx, \tag{9}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \mu(0) = 1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

где $v_0 = u_0$. Фактически это прямая задача с двойной нелокальностью — по времени и по пространству. Подобная задача с условием Дирихле вместо условия Неймана (11) уже рассматривалась в работе [7], поэтому в следующем пункте мы проведём аналогичное преобразование задачи AD.

2.2. Задача *AD*. Аналогично уравнению (6) в случае условия Дирихле мы получим следующее уравнение для λ:

$$\lambda(t) = \int_\Omega \Big(-\Delta u(x,t) + \varphi\Big(\int_0^T u(x,s)\,ds\Big)\,u(x,t)\Big)\,dx, \quad t \in (0,T]. \tag{12}$$

Систему уравнений (1)–(3), (12) назовём *задачей* BD. Видим, что в (12) под интегралом появилось неприятное слагаемое, которое делает необходимой интегрируемость вторых производных решения. Это обстоятельство может показаться несущественным, поскольку можно поискать более гладкие решения. Однако при этом возникнут значительные сложности, связанные с замыканием оценок решения. Поэтому, так же как в предыдущем пункте, мы проведём дальнейшее преобразование задачи. Используя те же обозначения с помощью тех же рассуждений, мы получим *задачу* CD для функций v и μ, удовлетворяющих уравнениям (8)–(10), а также краевому условию

$$v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Задача CD исследована в работе [7] в случае ограниченного потенциала взаимодействия φ. Доказана её обобщённая разрешимость для произвольного $T \in (0,\infty)$ без ограничений на величину начальных данных. Используя этот результат, мы при таких же условиях выведем обобщённую разрешимость задачи AD. Тем самым будет установлена эквивалентность задач AD и CD.

Задача CN до настоящего времени не исследовалась. Мы докажем её обобщённую разрешимость и, так же как и в случае краевого условия Дирихле, покажем её эквивалентность задаче AN.

3 Обобщённая разрешимость задач CD и AD

Мы будем использовать стандартные функциональные пространства Лебега и Соболева $L^p(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ и $L^q(0,T;H_0^1(\Omega))$, где $p,q \in [1,\infty]$. Норма в $L^2(\Omega)$ будет обозначаться через $\|\cdot\|$.

Определение 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $T \in (0,\infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ и $v_0 \geq 0$. Функцию $v : \Omega_T \to \mathbb{R}_+$ назовём обобщённым решением задачи CD, если*

(1) *$v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, а также $\varphi(\zeta)\, v \in L^1(\Omega_T)$, где*

$$\zeta(x) = \int_0^T \varrho(x,t)\,dt, \quad \varrho(x,t) = \frac{v(x,t)}{\int_\Omega v(x,t)\,dx};$$

(2) *интегральное тождество*

$$\int_0^T \int_\Omega \big(v\,\partial_t h - \nabla v \cdot \nabla h - \varphi(\zeta)\, v\, h\big)\,dx\,dt + \int_\Omega v_0 h_0\,dx = 0 \qquad (14)$$

выполняется для произвольной гладкой в Ω_T функции h, такой что $h(x,t) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и при $t = T$. Здесь $h_0 = h|_{t=0}$.

Напомним основной результат работы [7].

Теорема 1. *Предположим, что $T \in (0,\infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega v_0\,dx > 0$, $v_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение $v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ задачи CD, такое что $v \geq 0$, $\partial_t v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $v \in C(0,T;L^2(\Omega))$,*

$$\frac{1}{2}\,\|v(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v(\cdot,s)\|^2\,ds + \int_\Omega \varphi(\zeta)\, v^2(\cdot,t)\,dx \leq \frac{1}{2}\,\|v_0\|^2 \qquad (15)$$

и $\int_\Omega v(x,t)\,dx > 0$ для всех $t \in [0,T]$, где

$$\zeta(x) = \int_0^T \frac{v(x,t)}{\int_\Omega v(x,t)\,dx}\,dt.$$

Из этой теоремы несложно вывести обобщённую разрешимость задачи AD. Сначала дадим определение обобщённого решения этой задачи.

Определение 2. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $T \in (0,\infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ и $\int_\Omega u_0\,dx = 1$. Пару функций $u : \Omega_T \to \mathbb{R}_+$ и $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ назовём обобщённым решением задачи AD, если*

(1) *$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\varphi\big(\int_0^T u(\cdot,t)\,dt\big)\, u \in L^1(\Omega_T)$, $\lambda \in L^1(0,T)$;*

(2) *$\int_\Omega u(x,t)\,dx = 1$ для почти всех $t \in [0,T]$;*

(3) *интегральное тождество*

$$\int_0^T\int_\Omega\Big(u\,\partial_t\psi-\nabla u\cdot\nabla\psi-\varphi\big(\int_0^T u(\cdot,s)\,ds\big)\,u\psi+\lambda u\psi\Big)\,dx\,dt+\int_\Omega u_0\psi_0\,dx=0 \quad (16)$$

выполняется для произвольной гладкой в Ω_T *функции* ψ, *такой что* $\psi(x,t)=0$ *при* $x\in\partial\Omega$ *и при* $t=T$. *Здесь* $\psi_0=\psi|_{t=0}$.

В качестве функции u мы возьмём

$$u(x,t)=\frac{v(x,t)}{\mu(t)},\quad \mu(t)=\int_\Omega v(x,t)\,dx,$$

где v — обобщённое решение задачи CD с $v_0=u_0$. Как следует из теоремы 1, $\mu\in C[0,T]$ и $\mu(t)>0$ для всех $t\in[0,T]$. Поэтому существуют положительные постоянные M_1 и M_2, такие что $M_1\le\mu(t)\le M_2$ для всех $t\in[0,T]$. Таким образом, определение функции u корректно. Заметим, что u совпадает с функцией ϱ из определения 1. Кроме того, $u\in C(0,T;L^2(\Omega))$, $u\ge 0$ в Ω_T и $\int_\Omega u(x,t)\,dx=1$ для всех $t\in[0,T]$.

Далее, заметив, что $\mu(0)=1$, возьмём функцию λ, такую что

$$e^{-\int_0^t\lambda(s)\,ds}=\mu(t),$$

то есть

$$\lambda(t)=-\frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

где $\mu'(t)=d\mu(t)/dt$. Видим, что для определения функции $\lambda\in L^1(0,T)$ нам требуется, чтобы $\mu'\in L^1(0,T)$. Такой оценки в теореме 1 и в [7] нет, однако в [8] показано, что

$$\int_{\Omega_T} t\,|\partial_t v(x,t)|^2\,dx\,dt\le\frac14\,\|v_0\|^2. \quad (17)$$

Эта оценка получается простым домножением уравнения (8) на $t\partial_t v$ и использованием энергетической оценки. Заметим, что при условии $v_0\in H_0^1(\Omega)$ вес t в левой части этого неравенства можно убрать. Таким образом,

$$\int_0^T t\,|\mu'(t)|^2\,dt\le\frac{|\Omega|}{4}\,\|v_0\|^2,$$

где $|\Omega|$ — мера Лебега области Ω. Поскольку μ отделена от нуля и $v_0=u_0$, отсюда следует, что определена функция λ, такая что $\int_0^T t\lambda^2(t)\,dt\le C$, где постоянная C зависит от M_1, $|\Omega|$ и $\|u_0\|$. Более того, далее мы покажем, что $\lambda\ge 0$, поэтому из определения этой функции и того, что $M_1\le\mu\le M_2$, будет следовать, что $\lambda\in L^1(0,T)$. Этот факт сразу получается из того, что

$$\int_0^T\lambda(t)\,dt=-\ln\mu(T).$$

Покажем, что $\lambda \geq 0$ почти всюду на $[0,T]$. Из оценки (17), ограниченности потенциала φ и энергетической оценки (15) следует, что

$$\int_{\Omega_T} t\,|\Delta v(x,t)|^2\,dx\,dt \leq C$$

для некоторой постоянной C. Поэтому для почти всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство:

$$\int_\Omega \Delta v(x,t)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(x,t)}{\partial n}\,ds \leq 0.$$

Это неравенство следует из того, что $v \geq 0$ в Ω и $v = 0$ на $\partial\Omega$, а n — внешняя нормаль. Таким образом, интегрируя уравнение (8) по Ω, мы получим, что

$$\mu'(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)\,dx \leq 0,$$

а значит, $\lambda(t) \geq 0$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Поскольку $v \in C(0,T;L^2(\Omega))$, из непрерывности μ следует, что $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$. В силу оценки (15) справедлива энергетическая оценка:

$$\frac{1}{2}\,\|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot,s)\|^2\,ds + \int_0^t\int_\Omega \varphi\Big(\int_0^T u(x,p)\,dp\Big)\,u^2(x,s)\,dx\,ds \leq \frac{1}{2M_1^2}\,\|u_0\|^2 \quad (18)$$

для всех $t \in [0,T]$.

Заметим ещё, что

$$\int_0^T \lambda(t)\,dt \leq \ln\frac{1}{M_1},$$

а $M_2 = \mu(0) = 1$.

Нам осталось показать, что функции u и λ удовлетворяют интегральному тождеству (16). Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных гладких функций, сходящаяся к функции λ в $L^1(0,T)$, и $\mu_k(t) = e^{-\int_0^t \lambda_k(s)\,ds}$. Очевидно, что последовательность $\{\mu_k\}$ сходится равномерно на $[0,T]$ к функции μ. Возьмём произвольную гладкую функцию $\psi : \Omega_T \to \mathbb{R}$, обладающую свойствами из п. 3 определения 2, и положим $h = \psi/\mu_k$ в (14). Тогда

$$\int_0^T\int_\Omega \Big(\mu u\,\partial_t\Big(\frac{\psi}{\mu_k}\Big) - \frac{\mu}{\mu_k}\nabla u\cdot\nabla\psi - \frac{\mu}{\mu_k}\varphi\Big(\int_0^T u(x,s)\,ds\Big)\,u\,\psi\Big)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0\psi_0\,dx = 0 \quad (19)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как

$$\mu u\,\partial_t\Big(\frac{\psi}{\mu_k}\Big) = \frac{\mu}{\mu_k}\,u\,\partial_t\psi - \frac{\mu}{\mu_k^2}\frac{d\mu_k}{dt}\,u\psi = \frac{\mu}{\mu_k}\,u\,\partial_t\psi + \frac{\mu}{\mu_k}\lambda_k\,u\psi,$$

переходя к пределу при $k \to \infty$ в (19), получаем (16).

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Предположим, что* $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega u_0\, dx = 1$, $u_0 \geq 0$ *и* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— непрерывная функция, такая что* $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ *для всех* $\xi \in \mathbb{R}_+$ *и некоторого* $K > 0$. *Тогда существует обобщённое решение* (u, λ) *задачи* AD, *такое что* $u \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$, $\int_\Omega u(x, t)\, dx > 0$ *для всех* $t \in [0, T]$ *и справедлива оценка* (18).

Заметим, что нами доказано немного больше, чем утверждается в теореме. В частности, функция $\sqrt{t}\Delta u$ лежит в $L^2(\Omega_T)$. Можно что-нибудь сказать и о $\partial_t u$. Вывод этих фактов и других свойств гладкости полученного решения требует дополнительных рассуждений и не является целью данной работы.

4 Задача AN

Разрешимость задачи AN доказывается по той же схеме, что и задачи AD. Сначала мы докажем разрешимость задачи CN, которая до настоящего времени никем не рассматривалась.

4.1. Обобщённая разрешимость задачи CN . По большому счёту, обобщённая разрешимость задачи CN в случае ограниченного потенциала взаимодействия φ доказывается так же, как в [7] для задачи CD и даже проще. По этой причине мы опустим некоторые подробности. Определение обобщённого решения задачи CN совпадает с определением 1 с той лишь разницей, что мы отказываемся от требования обращения в нуль функций v и h на $\partial\Omega$. То есть в этом определении пространство $H_0^1(\Omega)$ необходимо заменить на $H^1(\Omega)$.

Теорема 3. *Предположим, что* $T \in (0, \infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega v_0\, dx > 0$, $v_0 \geq 0$ *и* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— непрерывная функция, такая что* $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ *для всех* $\xi \in \mathbb{R}_+$ *и некоторого* $K > 0$. *Тогда существует обобщённое решение* $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ *задачи* CN, *такое что* $v \geq 0$, $\partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\frac{1}{2}\,\|v(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v(\cdot, s)\|^2\, ds + \int_0^t \int_\Omega \varphi(\zeta(x))\, v^2(x, s)\, dx\, ds \leq \frac{1}{2}\,\|v_0\|^2 \tag{20}$$

и

$$\int_\Omega v(x, t)\, dx \geq C_* > 0$$

для всех $t \in [0, T]$, *где*

$$\zeta(x) = \int_0^T \frac{v(x, t)}{\int_\Omega v(x, t)\, dx}\, dt \quad \text{и} \quad C_* = e^{-KT} \int_\Omega v_0(x)\, dx.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Шаудера о неподвижной точке. Пусть B_R — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $L^1(\Omega)$. Число R будет определено позднее. Определим отображение

$\varPsi : B_R \to B_R$, о котором говорится в теореме Шаудера. Для каждого $w \in B_R$ обозначим через u_w обобщённое решение следующей задачи:

$$\partial_t v_w - \Delta v_w + \varphi(w)\, v_w = 0, \quad \frac{\partial v_w}{\partial n}\Big|_{\partial\varOmega} = 0, \quad v_w|_{t=0} = v_0. \tag{21}$$

Из классической теории параболических уравнений (см., например, [9, Ch. 3]) следует, что эта задача имеет единственное обобщённое решение. Положим

$$\varPsi(w) = \int_0^T \varrho_w(\cdot, t)\, dt, \quad \varrho_w = \frac{v_w}{\int_\varOmega v_w\, dx}.$$

Если некоторая функция w является неподвижной точкой отображения $\varPsi$, то, как нетрудно видеть, v_w — обобщённое решение задачи CN. Таким образом, согласно теореме Шаудера необходимо доказать, что $\varPsi(B_R) \subset B_R$ для некоторого $R > 0$ и $\varPsi : B_R \to L^1(\varOmega)$ — непрерывное компактное отображение.

Сначала покажем, что v_w — неотрицательная функция. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная гладкая выпуклая функция, такая что $f'(\xi) < 0$ при $\xi < 0$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi \geq 0$. Умножение уравнения (21) на $f'(v_w)$ и интегрирование по $\varOmega$ даёт равенство

$$\frac{d}{dt}\int_\varOmega f(v_w)\, dx + \int_\varOmega \big(f''(v_w)|\nabla v_w|^2 + \varphi(w) v_w f'(v_w)\big)\, dx = 0,$$

из которого мы получаем, что

$$\frac{d}{dt}\int_\varOmega f(v_w)\, dx \leq 0, \quad t \in (0, T).$$

Так как $v_0 \geq 0$, $f(v_0) = 0$. Поэтому $f(v_w) = 0$ и, как следствие, $v_w \geq 0$ для всех all $t > 0$.

Теперь покажем, что существует такая положительная постоянная C_*, что

$$\int_\varOmega v_w(x, t)\, dx \geq C_* > 0 \tag{22}$$

для всех $t \in [0, T]$ и для произвольной измеримой функции w. Эта оценка нам потребуется в дальнейшем. Кроме того, из неё следует, что знаменатель в определении функции ϱ_w не обращается в нуль. Проинтегрировав уравнение (21) по $\varOmega$, мы получим, что

$$\frac{d}{dt}\int_\varOmega v_w(x, t)\, dx = -\int_\varOmega \varphi(w(x))\, v_w(x, t)\, dx \geq -K \int_\varOmega v_w(x, t)\, dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\varOmega v_w(x, t)\, dx \geq e^{-Kt}\int_\varOmega v_0(x)\, dx > 0$$

для всех $t > 0$. Таким образом, мы можем взять $C_* = e^{-KT}\int_\varOmega v_0(x)\, dx$ в оценке (22).

Из (22) следует, что $\|\varrho_w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega \varrho_w(x,t)\,dx = 1$ для всех $t \in [0,T]$ и справедлива оценка:

$$\|\Psi(w)\|_{L^1(\Omega)} \le \int_0^T \|\varrho_w\|_{L^1(\Omega)}\,dt = T.$$

Таким образом, если мы возьмём $R = T$, то получим, что $\Psi(B_R) \subset B_R$.

Докажем непрерывность отображения Ψ. Энергетическая оценка для задачи (21) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\,\|v_w(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v_w(\cdot,s)\|^2\,ds + \int_0^t \int_\Omega \varphi(w(x))\,v_w^2(x,s)\,dx\,ds \le \frac{1}{2}\,\|v_0\|^2 \tag{23}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Возьмём произвольную последовательность $\{w_k\}$ в B_R, которая сходится в $L^1(\Omega)$ к некоторой функции $w \in B_R$. Тогда $w_k \to w$ по мере (Лебега) на Ω и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\varphi(w_k) \to \varphi(w)$ в $L^p(\Omega)$ для всех $p \in [1,\infty)$. В силу (23) существует подпоследовательность $\{w_{k'}\}$, такая что $v_{w_{k'}} \to V$ и $\nabla v_{w_{k'}} \to \nabla V$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ для некоторой функции $V \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Из единственности решения задачи (21) следует, что $V = v_w$. Более того, в силу оценки (22) $\nabla\varrho_{w_{k'}} \to \nabla\varrho_w$ слабо в $L^2(\Omega_T)$, а значит, $\int_0^T \varrho_{w_{k'}}\,dt \to \int_0^T \varrho_w\,dt$ сильно в $L^2(\Omega)$. То есть $\Psi(w_{k'}) \to \Psi(w)$ в $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Опять используя единственность решения задачи (21), мы получим, что и вся последовательность $\{\Psi(w_k)\}$ сходится к $\Psi(w)$ в $L^1(\Omega)$, то есть отображение Ψ непрерывно.

Остаётся доказать компактность Ψ. Пусть $\{w_k\}$ — произвольная последовательность в B_R. Необходимо показать, что существует такая её подпоследовательность $\{w_{k'}\}$, что $\Psi(w_{k'})$ сходится в $L^1(\Omega)$. Согласно оценке (23), последовательность $\{v_{w_k}\}$ ограничена в $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Поэтому, в силу (22), последовательность $\{\nabla\varrho_{w_k}\}$ ограничена в $L^2(\Omega_T)$ и, как следствие, последовательность $\{\nabla\Psi(w_k)\}$ ограничена в $L^2(\Omega)$. Поскольку $H^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L^2(\Omega)$, существует подпоследовательность $\{\Psi(w_{k'})\}$, которая сходится в $L^2(\Omega)$. Таким образом, отображение $\Psi : B_R \to B_R$ является компактным.

Итак, все условия теоремы Шаудера выполнены и существует $w \in B_R$, такое что $\Psi(w) = w$. Тогда $v = v_w$ является обобщённым решением задачи CN. Заметим, что выполнение энергетической оценки (20) для почти всех $t \in [0,T]$ следует из (23). Она будет справедлива для всех t, если $v \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Покажем справедливость этого включения. Из ограниченности функции φ вытекает, что $\partial_t v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Следовательно, $v \in C(0,T;L^2_w(\Omega))$, то есть

$$\int_\Omega v(x,t)\,\eta(x)\,dx \to \int_\Omega v(x,t_0)\,\eta(x)\,dx \tag{24}$$

при $t \to t_0$ для произвольной функции $\eta \in L^2(\Omega)$. В то же время,

$$\|v(\cdot,t)\|^2 - \|v(\cdot,t_0)\|^2 = -2\int_{t_0}^t \|\nabla v(\cdot,s)\|^2\,ds - \int_{t_0}^t \int_\Omega \varphi(\zeta(x))\,v^2(x,s)\,dx\,ds.$$

Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что правая часть этого равенства стремится к нулю при $t \to t_0$. Поэтому функция $t \mapsto \|v(\cdot,t)\|$ непрерывна, а это вместе с (24) означает, что $v \in C(0,T;L^2(\Omega))$.

Теорема доказана. □

4.2. Обобщённая разрешимость задачи $\boldsymbol{AN}$. Теперь мы можем доказать разрешимость задачи AN по той же схеме, что и разрешимость задачи AD в параграфе 3. Отказавшись в определении 2 от требования обращения в нуль функций u и ψ на $\partial\Omega$, мы получим определение обобщённого решения задачи AN. Как и в п. 4.1, пространство $H_0^1(\Omega)$ в этом определении необходимо заменить на $H^1(\Omega)$.

Теорема 4. *Предположим, что $T \in (0,\infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega u_0\,dx = 1$, $u_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение (u,λ) задачи AN, такое что*

(1) *$u \geq 0$, $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$,*

$$\frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot,s)\|^2\,ds + \int_0^t\int_\Omega \varphi(\zeta(x))\,u^2(x,s)\,dx\,ds \leq \frac{e^{2KT}}{2}\|u_0\|^2 \quad (25)$$

для всех $t \in [0,T]$, где $\zeta(x) = \int_0^T u(x,t)\,dt$.

(2) *$\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$ и*

$$\int_0^T \lambda(t)\,dt \leq KT. \quad (26)$$

Доказательство. Воспользуемся той же схемой, что и при доказательстве разрешимости задачи AD в теореме 2. Положим

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{\mu(t)}, \quad \mu(t) = \int_\Omega v(x,t)\,dx,$$

где v — обобщённое решение задачи CN с $v_0 = u_0$. Как следует из теоремы 3, $\mu \in C[0,T]$ и $\mu(t) \geq C_* > 0$ для всех $t \in [0,T]$. Поэтому $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Кроме того, $\int_\Omega u(x,t)\,dx = 1$ для всех $t \in [0,T]$ и $u \geq 0$ в Ω_T.

Заметив, что $\mu(0) = 1$, возьмём функцию λ, такую что $e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} = \mu(t)$, то есть

$$\lambda(t) = -\frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

где $\mu'(t) = d\mu(t)/dt$. Существование функции λ, такой что $\int_0^T t\lambda^2(t)\,dt \le C$, где постоянная C зависит от C_*, $|\Omega|$ и $\|u_0\|$, устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 2. Более того,

$$\int_0^T \lambda(t)\,dt = -\ln \mu(T).$$

Заметим, что $\lambda(t) \ge 0$ для почти всех $t \in [0, T]$, поскольку, интегрируя уравнение (8) по Ω, мы получим, что

$$\mu'(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)\,dx \le 0.$$

Таким образом, $\lambda \in L^1(0,T)$ и

$$\int_0^T \lambda(t)\,dt \le \ln\frac{1}{C_*}.$$

Как следует из теоремы 3, $C_* = e^{-KT}\int_\Omega v_0(x)\,dx = e^{-KT}$, поэтому справедлива оценка (26).

В силу (20) справедлива энергетическая оценка:

$$\frac{1}{2}\,\|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot,s)\|^2\,ds + \int_0^t\int_\Omega \varphi\Big(\int_0^T u(x,p)\,dp\Big)\,u^2(x,s)\,dx\,ds \le \frac{1}{2C_*^2}\,\|u_0\|^2$$

для всех $t \in [0, T]$, из которой следует (25).

Наконец, так же как в доказательстве теоремы 2 легко установить, что функции u и λ удовлетворяют аналогу интегрального тождества (16), выписанному для случая краевого условия Неймана. Таким образом, эти функции образуют обобщённое решение задачи AN.

Теорема доказана. $\square$

References

[1] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Marcel Dekker, New York, 2000. Zbl 0947.35173

[2] V.N. Starovoitov, *Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation*, Math. Methods Appl. Sci., **44**:1 (2021), 1118–1126. Zbl 1469.35124

[3] C. Walker, *Strong solutions to a nonlocal-in-time semilinear heat equation*, Q. Appl. Math., **79**:2 (2021), 265–272. Zbl 1461.35131

[4] J.R. Cannon, Y. Lin, *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations*, Inverse Probl., **4**:1 (1988), 35–45. Zbl 0697.35162

[5] A.I. Kozhanov, *Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients*, Comput. Math. Math. Phys., **57**:6 (2017), 956–966. Zbl 1516.35520

[6] V.N. Starovoitov, B.N. Starovoitova, *Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design*, J. Phys.: Conf. Ser., **894** (2017), Article ID 012088.

[7] V.N. Starovoitov, *Solvability of boundary value problem of chaotic dynamics of polymer molecule in the case of bounded interaction potential*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2 (2021), 1714–1719. Zbl 1491.35276

[8] V.N. Starovoitov, *Solvability of a regularized boundary value problem of chaotic dynamics of a polymer molecule.*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **20**:2 (2023), 1597–1604. Zbl 7896846

[9] O.A. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, **23**, AMS, Providence, 1968. Zbl 0174.15403

Victor N. Starovoitov, Anastasia A. Titova
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. Lavrentyeva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: starovoitov@hydro.nsc.ru, mestnikova@hydro.nsc.ru