

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ХАОТИЧНОЙ ДИНАМИКЕ
ПОЛИМЕРНОЙ МОЛЕКУЛЫВ. Н. СТАРОВОЙТОВ , А. А. ТИТОВА

Abstract: In this paper, it is shown that the problem of chaotic dynamics of a polymer molecule in a liquid can be written as a coefficient inverse problem for a nonlocal in time parabolic equation. The weak solvability of this inverse problem is established for the cases of the Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Keywords: polymer chain, chaotic dynamics, nonlocal parabolic equation, inverse problem, solvability.

1 Введение

Пусть $T > 0$ и Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Данная работа посвящена задаче об определении функций $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют в пространственно-временном цилиндре $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ следующему нелинейному параболическому уравнению:

$$\partial_t u - \Delta u + \varphi\left(\int_0^T u(\cdot, t) dt\right) u - \lambda u = 0, \quad (1)$$

STAROVOITOV, V. N., TITOVA, A. A. INVERSE PROBLEM ON CHAOTIC DYNAMICS OF A POLYMER MOLECULE.

© 2023 Старовойтов В. Н., Титова А. А.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00261, <https://rscf.ru/project/23-21-00261/>).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

начальному и граничному условиям:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

а также дополнительному уравнению, называемому обычно условием переопределения:

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = 1 \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (4)$$

В этих уравнениях $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ является заданной функцией, n — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, x — радиус-вектор точек в \mathbb{R}^d и t — скалярная переменная, которую по традиции будем называть временем. Функцию $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ мы будем называть потенциалом взаимодействия, что будет пояснено далее в работе. Коэффициент $\lambda = \lambda(t)$ в уравнении (1) является одной из искомым функций, а для его определения к начально-краевой задаче (1)–(3) добавлено условие переопределения (4). Такого рода задачи относят к классу коэффициентных обратных задач. Задачу (1)–(4) мы в дальнейшем будем называть *задачей AN*. Буква N в названии означает, что речь идёт о задаче Неймана. В данной работе ещё будет рассмотрена *задача AD*, которая отличается от задачи AN тем, что краевое условие Неймана (3) заменено условием Дирихле:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Изучению теории обратных задач посвящено огромное количество математических работ. Это объясняется как многочисленными приложениями, так и множеством разновидностей обратных задач. Поэтому практически невозможно в рамках статьи сделать претендующий на полноту обзор полученных результатов. Мы и не ставим такой цели. Наиболее близкий к данной статье круг рассматриваемых вопросов представлен в книге [1]. Следует отметить, что нам не удалось найти работы, где изучались бы задачи, подобные нашей. Во-первых, уравнение (1) содержит член с интегралом от решения по всему интервалу времени, на котором решается задача. Эта ситуация необычна не только для обратных задач, но и вообще для параболических уравнений. Появление такого интеграла в уравнении будет объяснено далее. Даже если предположить, что член с λ отсутствует, то есть рассматривается прямая задача, то, например, единственность решения доказана лишь с некоторыми ограничениями на величину данных задачи [2, 3]. Фактически T должно быть достаточно малым. Это обстоятельство вносит определённые трудности при доказательстве разрешимости обратной задачи, поскольку обычно требуется однозначная разрешимость приближённой прямой задачи [1, 4], что необходимо при построении отображения для использования какой-либо теоремы о неподвижной точке. В работе [5] рассмотрена обратная

задача с подобным нелокальным по времени членом в граничном условии. Для её решения применён довольно оригинальный метод, заключающийся во включении условия переопределения в уравнение, выписанное для лапласиана от решения исходной задачи. К сожалению, мы не смогли адаптировать данный метод к нашему случаю, при этом существенную роль сыграло наличие нелинейного члена в уравнении (1). В общем случае, когда от функции φ требуется лишь непрерывность без ограниченности, этот нелинейный член не является младшим членом в уравнении. Этот факт вносит значительные трудности в доказательство разрешимости задачи, которые мы не смогли преодолеть. По этой причине в данной работе существование решения доказано лишь в случае ограниченной функции φ . При этом не накладывается никаких ограничений на величину данных задачи.

Следует отметить, что во многих работах по обратным задачам предполагается выполненными масса условий на коэффициенты уравнения, на начальные данные и др., что диктуется невозможностью провести доказательство разрешимости в более общем случае. Например, условие переопределения (4) записывают с весовой функцией под интегралом, которая обращается в нуль на границе $\partial\Omega$. Такая постановка очень помогает при рассмотрении задачи Дирихле и визуально не сильно отличается от нашей. Однако наша постановка задачи возникла при описании конкретного физического процесса, а именно, хаотичной динамики полимерной цепочки в жидкости. Переменная t играет роль параметра длины дуги вдоль цепочки, искомая функция $u = u(x, t)$ представляет собой плотность вероятности того, что t -е звено цепи находится в точке x . В силу того, на положение каждого звена цепи влияют все остальные звенья, в уравнении присутствует упомянутый выше интеграл от u по всей длине цепочки. Этот интеграл стоит в аргументе функции φ , которая отвечает за взаимодействие звеньев цепи. По этой причине φ называется потенциалом взаимодействия. Условие переопределения (4) нельзя записать иначе, поскольку интеграл от плотности вероятности по всей области Ω должен быть равен единице для всех t . То есть все звенья цепи с вероятностью единица должны быть в Ω . Подобная ситуация имеет место и с другими данными задачи. Вводимые на них ограничения не должны противоречить физическому смыслу.

Модель хаотичной динамики полимерной молекулы, соответствующая исследуемой обратной задаче, была предложена в [6]. Цель данной работы состоит в установлении эквивалентной формулировки этой модели в виде обратной задачи, что, вообще говоря, является более естественным для задач теории вероятности.

Для решения задач AN и AD мы воспользуемся их спецификой и запишем в виде задач CN и CD соответственно. Последние как раз и представляют предложенную в [6] модель для случая краевого условия Дирихле. Обобщённая разрешимость задачи CD была доказана ранее в [7], а для задачи CN мы сделаем это в данной работе. Задача с условием

Неймана рассмотрена нами из соображений общности. В конце концов, обратные задачи, подобные AN и AD , могут встретиться и других областях.

2 Преобразование задачи

2.1. Задача AN . В постановке задачи AN нет уравнения для определения неизвестной функции λ . Следуя распространённому подходу к исследованию коэффициентных обратных задач, из уравнений (1)–(4) можно получить соотношение для λ . Проинтегрировав уравнение (1) по Ω , с учётом условий (3) и (4) не сложно получить, что

$$\lambda(t) = \int_{\Omega} \varphi \left(\int_0^T u(x, s) ds \right) u(x, t) dx, \quad t \in (0, T]. \quad (6)$$

Систему уравнений (1)–(3), (6) назовём *задачей BN* . Эта задача при выполнении некоторых условий гладкости и интегрируемости функций u и λ эквивалентна задаче AN .

Для исследования разрешимости задачи BN используются разные подходы, однако они неприменимы в нашем случае. Мы проведём дальнейшее преобразование задачи. Заметим, что в постановке задачи BN не требуется выполнения условия (4). Введём обозначение:

$$v(x, t) = u(x, t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}.$$

Как следует из уравнения (1), функция v удовлетворяет в Ω_T следующему уравнению

$$\partial_t v - \Delta v + \varphi \left(\int_0^T u(\cdot, t) dt \right) v = 0, \quad (7)$$

причём

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (7) по Ω с учётом (6) даёт:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \varphi \left(\int_0^T u(x, t) dt \right) v(x, t) dx \\ &= -e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \int_{\Omega} \varphi \left(\int_0^T u(x, t) dt \right) u(x, t) dx = -\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = \frac{d\mu(t)}{dt}, \end{aligned}$$

где $\mu(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$. Отсюда следует, что

$$\mu(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx - \int_{\Omega} u_0(x) dx + 1.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\int_{\Omega} u_0(x) dx = 1$, поэтому задача BN приводит к задаче CN для функций v и μ :

$$\partial_t v - \Delta v + \varphi \left(\int_0^T \frac{v(\cdot, t)}{\mu(t)} dt \right) v = 0, \quad (8)$$

$$\mu(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx, \quad (9)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \mu(0) = 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

где $v_0 = u_0$. Фактически это прямая задача с двойной нелокальностью — по времени и по пространству. Подобная задача с условием Дирихле вместо условия Неймана (11) уже рассматривалась в работе [7], поэтому в следующем пункте мы проведём аналогичное преобразование задачи AD .

2.2. Задача AD . Аналогично уравнению (6) в случае условия Дирихле мы получим следующее уравнение для λ :

$$\lambda(t) = \int_{\Omega} \left(-\Delta u(x, t) + \varphi \left(\int_0^T u(x, s) ds \right) u(x, t) \right) dx, \quad t \in (0, T]. \quad (12)$$

Систему уравнений (1)–(3), (12) назовём задачей BD . Видим, что в (12) под интегралом появилось неприятное слагаемое, которое делает необходимой интегрируемость вторых производных решения. Это обстоятельство может показаться несущественным, поскольку можно поискать более гладкие решения. Однако при этом возникнут значительные сложности, связанные с замыканием оценок решения. Поэтому, так же как в предыдущем пункте, мы проведём дальнейшее преобразование задачи. Используя те же обозначения с помощью тех же рассуждений, мы получим задачу CD для функций v и μ , удовлетворяющих уравнениям (8)–(10), а также краевому условию

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Задача CD исследована в работе [7] в случае ограниченного потенциала взаимодействия φ . Доказана её обобщённая разрешимость для произвольного $T \in (0, \infty)$ без ограничений на величину начальных данных. Используя этот результат, мы при таких же условиях выведем обобщённую разрешимость задачи AD . Тем самым будет установлена эквивалентность задач AD и CD .

Задача CN до настоящего времени не исследовалась. Мы докажем её обобщённую разрешимость и, так же как и в случае краевого условия Дирихле, покажем её эквивалентность задаче AN .

3 Обобщённая разрешимость задач CD и AD

Мы будем использовать стандартные функциональные пространства Лебега и Соболева $L^p(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $L^q(0, T; L^p(\Omega))$ и $L^q(0, T; H_0^1(\Omega))$, где $p, q \in [1, \infty]$. Норма в $L^2(\Omega)$ будет обозначаться через $\|\cdot\|$.

Определение 1. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $T \in (0, \infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ и $v_0 \geq 0$. Функцию $v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовём обобщённым решением задачи CD , если

(1) $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, а также $\varphi(\zeta)v \in L^1(\Omega_T)$, где

$$\zeta(x) = \int_0^T \varrho(x, t) dt, \quad \varrho(x, t) = \frac{v(x, t)}{\int_{\Omega} v(x, t) dx};$$

(2) интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega} (v \partial_t h - \nabla v \cdot \nabla h - \varphi(\zeta) v h) dx dt + \int_{\Omega} v_0 h_0 dx = 0 \quad (14)$$

выполняется для произвольной гладкой в Ω_T функции h , такой что $h(x, t) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и при $t = T$. Здесь $h_0 = h|_{t=0}$.

Напомним основной результат работы [7].

Теорема 1. Предположим, что $T \in (0, \infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} v_0 dx > 0$, $v_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ задачи CD , такое что $v \geq 0$, $\partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\frac{1}{2} \|v(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v(\cdot, s)\|^2 ds + \int_{\Omega} \varphi(\zeta) v^2(\cdot, t) dx \leq \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \quad (15)$$

и $\int_{\Omega} v(x, t) dx > 0$ для всех $t \in [0, T]$, где

$$\zeta(x) = \int_0^T \frac{v(x, t)}{\int_{\Omega} v(x, t) dx} dt.$$

Из этой теоремы несложно вывести обобщённую разрешимость задачи AD . Сначала дадим определение обобщённого решения этой задачи.

Определение 2. Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ и $\int_{\Omega} u_0 dx = 1$. Пару функций $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ назовём обобщённым решением задачи AD , если

(1) $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\varphi(\int_0^T u(\cdot, t) dt) u \in L^1(\Omega_T)$, $\lambda \in L^1(0, T)$;

(2) $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 1$ для почти всех $t \in [0, T]$;

(3) *интегральное тождество*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(u \partial_t \psi - \nabla u \cdot \nabla \psi - \varphi \left(\int_0^T u(\cdot, s) ds \right) u \psi + \lambda u \psi \right) dx dt + \int_{\Omega} u_0 \psi_0 dx = 0 \quad (16)$$

выполняется для произвольной гладкой в Ω_T функции ψ , такой что $\psi(x, t) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и при $t = T$. Здесь $\psi_0 = \psi|_{t=0}$.

В качестве функции u мы возьмём

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{\mu(t)}, \quad \mu(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx,$$

где v — обобщённое решение задачи CD с $v_0 = u_0$. Как следует из теоремы 1, $\mu \in C[0, T]$ и $\mu(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$. Поэтому существуют положительные постоянные M_1 и M_2 , такие что $M_1 \leq \mu(t) \leq M_2$ для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, определение функции u корректно. Заметим, что u совпадает с функцией ρ из определения 1. Кроме того, $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$, $u \geq 0$ в Ω_T и $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 1$ для всех $t \in [0, T]$.

Далее, заметив, что $\mu(0) = 1$, возьмём функцию λ , такую что

$$e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = \mu(t),$$

то есть

$$\lambda(t) = -\frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

где $\mu'(t) = d\mu(t)/dt$. Видим, что для определения функции $\lambda \in L^1(0, T)$ нам требуется, чтобы $\mu' \in L^1(0, T)$. Такой оценки в теореме 1 и в [7] нет, однако в [8] показано, что

$$\int_{\Omega_T} t |\partial_t v(x, t)|^2 dx dt \leq \frac{1}{4} \|v_0\|^2. \quad (17)$$

Эта оценка получается простым домножением уравнения (8) на $t\partial_t v$ и использованием энергетической оценки. Заметим, что при условии $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ вес t в левой части этого неравенства можно убрать. Таким образом,

$$\int_0^T t |\mu'(t)|^2 dt \leq \frac{|\Omega|}{4} \|v_0\|^2,$$

где $|\Omega|$ — мера Лебега области Ω . Поскольку μ отделена от нуля и $v_0 = u_0$, отсюда следует, что определена функция λ , такая что $\int_0^T t \lambda^2(t) dt \leq C$, где постоянная C зависит от M_1 , $|\Omega|$ и $\|u_0\|$. Более того, далее мы покажем, что $\lambda \geq 0$, поэтому из определения этой функции и того, что $M_1 \leq \mu \leq M_2$, будет следовать, что $\lambda \in L^1(0, T)$. Этот факт сразу получается из того, что

$$\int_0^T \lambda(t) dt = -\ln \mu(T).$$

Покажем, что $\lambda \geq 0$ почти всюду на $[0, T]$. Из оценки (17), ограниченности потенциала φ и энергетической оценки (15) следует, что

$$\int_{\Omega_T} t |\Delta v(x, t)|^2 dx dt \leq C$$

для некоторой постоянной C . Поэтому для почти всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} \Delta v(x, t) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(x, t)}{\partial n} ds \leq 0.$$

Это неравенство следует из того, что $v \geq 0$ в Ω и $v = 0$ на $\partial\Omega$, а n — внешняя нормаль. Таким образом, интегрируя уравнение (8) по Ω , мы получим, что

$$\mu'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(x, t) dx \leq 0,$$

а значит, $\lambda(t) \geq 0$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Поскольку $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$, из непрерывности μ следует, что $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$. В силу оценки (15) справедлива энергетическая оценка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi \left(\int_0^T u(x, p) dp \right) u^2(x, s) dx ds \leq \frac{1}{2M_1^2} \|u_0\|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

для всех $t \in [0, T]$.

Заметим ещё, что

$$\int_0^T \lambda(t) dt \leq \ln \frac{1}{M_1},$$

а $M_2 = \mu(0) = 1$.

Нам осталось показать, что функции u и λ удовлетворяют интегральному тождеству (16). Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных гладких функций, сходящаяся к функции λ в $L^1(0, T)$, и $\mu_k(t) = e^{-\int_0^t \lambda_k(s) ds}$. Очевидно, что последовательность $\{\mu_k\}$ сходится равномерно на $[0, T]$ к функции μ . Возьмём произвольную гладкую функцию $\psi : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойствами из п. 3 определения 2, и положим $h = \psi/\mu_k$ в (14). Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\mu u \partial_t \left(\frac{\psi}{\mu_k} \right) - \frac{\mu}{\mu_k} \nabla u \cdot \nabla \psi - \frac{\mu}{\mu_k} \varphi \left(\int_0^T u(x, s) ds \right) u \psi \right) dx dt \\ + \int_{\Omega} u_0 \psi_0 dx = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как

$$\mu u \partial_t \left(\frac{\psi}{\mu_k} \right) = \frac{\mu}{\mu_k} u \partial_t \psi - \frac{\mu}{\mu_k^2} \frac{d\mu_k}{dt} u \psi = \frac{\mu}{\mu_k} u \partial_t \psi + \frac{\mu}{\mu_k} \lambda_k u \psi,$$

переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (19), получаем (16).

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Предположим, что $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} u_0 dx = 1$, $u_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение (u, λ) задачи AD , такое что $u \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$, $\int_{\Omega} u(x, t) dx > 0$ для всех $t \in [0, T]$ и справедлива оценка (18).*

Заметим, что нами доказано немного больше, чем утверждается в теореме. В частности, функция $\sqrt{t}\Delta u$ лежит в $L^2(\Omega_T)$. Можно что-нибудь сказать и о $\partial_t u$. Вывод этих фактов и других свойств гладкости полученного решения требует дополнительных рассуждений и не является целью данной работы.

4 Задача AN

Разрешимость задачи AN доказывается по той же схеме, что и задачи AD . Сначала мы докажем разрешимость задачи CN , которая до настоящего времени никем не рассматривалась.

4.1. Обобщённая разрешимость задачи CN . По большому счёту, обобщённая разрешимость задачи CN в случае ограниченного потенциала взаимодействия φ доказывается так же, как в [7] для задачи CD и даже проще. По этой причине мы опустим некоторые подробности. Определение обобщённого решения задачи CN совпадает с определением 1 с той лишь разницей, что мы отказываемся от требования обращения в нуль функций v и h на $\partial\Omega$. То есть в этом определении пространство $H_0^1(\Omega)$ необходимо заменить на $H^1(\Omega)$.

Теорема 3. *Предположим, что $T \in (0, \infty)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} v_0 dx > 0$, $v_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ задачи CN , такое что $v \geq 0$, $\partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$,*

$$\frac{1}{2} \|v(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v(\cdot, s)\|^2 ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\zeta(x)) v^2(x, s) dx ds \leq \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \quad (20)$$

и

$$\int_{\Omega} v(x, t) dx \geq C_* > 0$$

для всех $t \in [0, T]$, где

$$\zeta(x) = \int_0^T \frac{v(x, t)}{\int_{\Omega} v(x, t) dx} dt \quad \text{и} \quad C_* = e^{-KT} \int_{\Omega} v_0(x) dx.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Шаудера о неподвижной точке. Пусть B_R — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $L^1(\Omega)$. Число R будет определено позднее. Определим отображение

$\Psi : B_R \rightarrow B_R$, о котором говорится в теореме Шаудера. Для каждого $w \in B_R$ обозначим через v_w обобщённое решение следующей задачи:

$$\partial_t v_w - \Delta v_w + \varphi(w) v_w = 0, \quad \frac{\partial v_w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v_w|_{t=0} = v_0. \quad (21)$$

Из классической теории параболических уравнений (см., например, [9, Ch. 3]) следует, что эта задача имеет единственное обобщённое решение. Положим

$$\Psi(w) = \int_0^T \varrho_w(\cdot, t) dt, \quad \varrho_w = \frac{v_w}{\int_{\Omega} v_w dx}.$$

Если некоторая функция w является неподвижной точкой отображения Ψ , то, как нетрудно видеть, v_w — обобщённое решение задачи CN . Таким образом, согласно теореме Шаудера необходимо доказать, что $\Psi(B_R) \subset B_R$ для некоторого $R > 0$ и $\Psi : B_R \rightarrow L^1(\Omega)$ — непрерывное компактное отображение.

Сначала покажем, что v_w — неотрицательная функция. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная гладкая выпуклая функция, такая что $f'(\xi) < 0$ при $\xi < 0$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi \geq 0$. Умножение уравнения (21) на $f'(v_w)$ и интегрирование по Ω даёт равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(v_w) dx + \int_{\Omega} (f''(v_w) |\nabla v_w|^2 + \varphi(w) v_w f'(v_w)) dx = 0,$$

из которого мы получаем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(v_w) dx \leq 0, \quad t \in (0, T).$$

Так как $v_0 \geq 0$, $f(v_0) = 0$. Поэтому $f(v_w) = 0$ и, как следствие, $v_w \geq 0$ для всех $t > 0$.

Теперь покажем, что существует такая положительная постоянная C_* , что

$$\int_{\Omega} v_w(x, t) dx \geq C_* > 0 \quad (22)$$

для всех $t \in [0, T]$ и для произвольной измеримой функции w . Эта оценка нам потребуется в дальнейшем. Кроме того, из неё следует, что знаменатель в определении функции ϱ_w не обращается в нуль. Проинтегрировав уравнение (21) по Ω , мы получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_w(x, t) dx = - \int_{\Omega} \varphi(w(x)) v_w(x, t) dx \geq -K \int_{\Omega} v_w(x, t) dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} v_w(x, t) dx \geq e^{-Kt} \int_{\Omega} v_0(x) dx > 0$$

для всех $t > 0$. Таким образом, мы можем взять $C_* = e^{-KT} \int_{\Omega} v_0(x) dx$ в оценке (22).

Из (22) следует, что $\|\varrho_w(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varrho_w(x, t) dx = 1$ для всех $t \in [0, T]$ и справедлива оценка:

$$\|\Psi(w)\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_0^T \|\varrho_w\|_{L^1(\Omega)} dt = T.$$

Таким образом, если мы возьмём $R = T$, то получим, что $\Psi(B_R) \subset B_R$.

Докажем непрерывность отображения Ψ . Энергетическая оценка для задачи (21) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \|v_w(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla v_w(\cdot, s)\|^2 ds + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(w(x)) v_w^2(x, s) dx ds \leq \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \quad (23)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Возьмём произвольную последовательность $\{w_k\}$ в B_R , которая сходится в $L^1(\Omega)$ к некоторой функции $w \in B_R$. Тогда $w_k \rightarrow w$ по мере (Лебега) на Ω и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $\varphi(w_k) \rightarrow \varphi(w)$ в $L^p(\Omega)$ для всех $p \in [1, \infty)$. В силу (23) существует подпоследовательность $\{w_{k'}\}$, такая что $v_{w_{k'}} \rightarrow V$ и $\nabla v_{w_{k'}} \rightarrow \nabla V$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ для некоторой функции $V \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Из единственности решения задачи (21) следует, что $V = v_w$. Более того, в силу оценки (22) $\nabla \varrho_{w_{k'}} \rightarrow \nabla \varrho_w$ слабо в $L^2(\Omega_T)$, а значит, $\int_0^T \varrho_{w_{k'}} dt \rightarrow \int_0^T \varrho_w dt$ сильно в $L^2(\Omega)$. То есть $\Psi(w_{k'}) \rightarrow \Psi(w)$ в $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Опять используя единственность решения задачи (21), мы получим, что и вся последовательность $\{\Psi(w_k)\}$ сходится к $\Psi(w)$ в $L^1(\Omega)$, то есть отображение Ψ непрерывно.

Остаётся доказать компактность Ψ . Пусть $\{w_k\}$ — произвольная последовательность в B_R . Необходимо показать, что существует такая её подпоследовательность $\{w_{k'}\}$, что $\Psi(w_{k'})$ сходится в $L^1(\Omega)$. Согласно оценке (23), последовательность $\{v_{w_k}\}$ ограничена в $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Поэтому, в силу (22), последовательность $\{\nabla \varrho_{w_k}\}$ ограничена в $L^2(\Omega_T)$ и, как следствие, последовательность $\{\nabla \Psi(w_k)\}$ ограничена в $L^2(\Omega)$. Поскольку $H^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L^2(\Omega)$, существует подпоследовательность $\{\Psi(w_{k'})\}$, которая сходится в $L^2(\Omega)$. Таким образом, отображение $\Psi : B_R \rightarrow B_R$ является компактным.

Итак, все условия теоремы Шаудера выполнены и существует $w \in B_R$, такое что $\Psi(w) = w$. Тогда $v = v_w$ является обобщённым решением задачи SN . Заметим, что выполнение энергетической оценки (20) для почти всех $t \in [0, T]$ следует из (23). Она будет справедлива для всех t , если $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Покажем справедливость этого включения. Из ограниченности функции φ вытекает, что $\partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Следовательно, $v \in C(0, T; L_w^2(\Omega))$, то есть

$$\int_{\Omega} v(x, t) \eta(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v(x, t_0) \eta(x) dx \quad (24)$$

при $t \rightarrow t_0$ для произвольной функции $\eta \in L^2(\Omega)$. В то же время,

$$\|v(\cdot, t)\|^2 - \|v(\cdot, t_0)\|^2 = -2 \int_{t_0}^t \|\nabla v(\cdot, s)\|^2 ds - \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \varphi(\zeta(x)) v^2(x, s) dx ds.$$

Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что правая часть этого равенства стремится к нулю при $t \rightarrow t_0$. Поэтому функция $t \mapsto \|v(\cdot, t)\|$ непрерывна, а это вместе с (24) означает, что $v \in C(0, T; L^2(\Omega))$.

Теорема доказана. \square

4.2. Обобщённая разрешимость задачи AN. Теперь мы можем доказать разрешимость задачи AN по той же схеме, что и разрешимость задачи AD в параграфе 3. Отказавшись в определении 2 от требования обращения в нуль функций u и ψ на $\partial\Omega$, мы получим определение обобщённого решения задачи AN. Как и в п. 4.1, пространство $H_0^1(\Omega)$ в этом определении необходимо заменить на $H^1(\Omega)$.

Теорема 4. *Предположим, что $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} u_0 dx = 1$, $u_0 \geq 0$ и $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая что $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_+$ и некоторого $K > 0$. Тогда существует обобщённое решение (u, λ) задачи AN, такое что*

$$(1) \quad u \geq 0, \quad u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad u \in C(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\zeta(x)) u^2(x, s) dx ds \leq \frac{e^{2KT}}{2} \|u_0\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

для всех $t \in [0, T]$, где $\zeta(x) = \int_0^T u(x, t) dt$.

$$(2) \quad \lambda \in L^1(0, T), \quad \lambda \geq 0 \text{ и}$$

$$\int_0^T \lambda(t) dt \leq KT. \quad (26)$$

Доказательство. Воспользуемся той же схемой, что и при доказательстве разрешимости задачи AD в теореме 2. Положим

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{\mu(t)}, \quad \mu(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx,$$

где v — обобщённое решение задачи CN с $v_0 = u_0$. Как следует из теоремы 3, $\mu \in C[0, T]$ и $\mu(t) \geq C_* > 0$ для всех $t \in [0, T]$. Поэтому $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Кроме того, $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 1$ для всех $t \in [0, T]$ и $u \geq 0$ в Ω_T .

Заметив, что $\mu(0) = 1$, возьмём функцию λ , такую что $e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = \mu(t)$, то есть

$$\lambda(t) = -\frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

где $\mu'(t) = d\mu(t)/dt$. Существование функции λ , такой что $\int_0^T t\lambda^2(t) dt \leq C$, где постоянная C зависит от C_* , $|\Omega|$ и $\|u_0\|$, устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 2. Более того,

$$\int_0^T \lambda(t) dt = -\ln \mu(T).$$

Заметим, что $\lambda(t) \geq 0$ для почти всех $t \in [0, T]$, поскольку, интегрируя уравнение (8) по Ω , мы получим, что

$$\mu'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(x, t) dx \leq 0.$$

Таким образом, $\lambda \in L^1(0, T)$ и

$$\int_0^T \lambda(t) dt \leq \ln \frac{1}{C_*}.$$

Как следует из теоремы 3, $C_* = e^{-KT} \int_{\Omega} v_0(x) dx = e^{-KT}$, поэтому справедлива оценка (26).

В силу (20) справедлива энергетическая оценка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|^2 ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi\left(\int_0^T u(x, p) dp\right) u^2(x, s) dx ds \leq \frac{1}{2C_*^2} \|u_0\|^2 \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$, из которой следует (25).

Наконец, так же как в доказательстве теоремы 2 легко установить, что функции u и λ удовлетворяют аналогу интегрального тождества (16), выписанному для случая краевого условия Неймана. Таким образом, эти функции образуют обобщённое решение задачи AN.

Теорема доказана. \square

References

- [1] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [2] V. N. Starovoirov, *Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **44**:1 (2021), 1118–1126.
- [3] C. Walker, *Strong solutions to a nonlocal-in-time semilinear heat equation*, Quart. Appl. Math., **79** (2021), 265–272.
- [4] J. R. Cannon, Y. Lin, *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations*, Inverse Problems, **4**:1 (1988), 35–45.
- [5] A. I. Kozhanov, *Parabolic equations with unknown time-Dependent coefficients*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **57**:6 (2017), 956–966.
- [6] V. N. Starovoirov, B. N. Starovoirova, *Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design*, Journal of Physics: Conference series, **894** (2017), 012088.

- [7] V. N. Starovoitov, *Solvability of boundary value problem of chaotic dynamics of polymer molecule in the case of bounded interaction potential*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1714–1719.
- [8] V. N. Starovoitov, *Solvability of a regularized boundary value problem of chaotic dynamics of a polymer molecule.*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 1597–1604.
- [9] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, AMS Translations of Mathematical Monographs, V. 23, 1968.

VICTOR N. STAROVOITOV, ANASTASIA A. TITOVA
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
PR. LAVRENTYEVA, 15,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: starovoitov@hydro.nsc.ru, mestnikova@hydro.nsc.ru