

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ
ПО НОРМЕ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ
ДЛЯ ГРУПП \mathbb{Z}^d И \mathbb{R}^d

А.Г. Качуровский^{ID}, И.В. Подвигин,
и А.Ж. ХАКИМБАЕВ

Представлено ????????

Abstract: For d pairwise commuting automorphisms (flows) of a probability space, ergodic averages over parallelepipeds are considered. It is shown that the maximum rate of their convergence in the L_p -norm is $\mathcal{O}(\frac{1}{t_1 t_2 \dots t_d})$. A spectral criterion is also obtained for the maximum convergence rate in the L_2 -norm.

Keywords: скорости сходимости в эргодических теоремах, спектральная мера, кограницы, пучок гиперплоскостей.

1 Введение

1.1. Пусть T — сохраняющее меру преобразование пространства с вероятностной мерой (Ω, μ) . Хорошо известно, что эргодические средние

$$A_n^T f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega), \quad f \in L_p(\Omega, \mu), \quad p \in [1, +\infty)$$

KACHUROVSKI, A.G., PODVIGIN, I.V., KHAKIMBAEV, A.ZH., MAXIMUM RATE OF NORM CONVERGENCE IN THE ERGODIC THEOREM FOR GROUPS \mathbb{Z}^d AND \mathbb{R}^d .

© 2024 Качуровский А.Г., Подвигин И.В., ХАКИМБАЕВ А.Ж.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Поступила ??? 2024 г., опубликована ?????

сходятся по норме при $n \rightarrow \infty$ к своему пределу f^* со скоростью не быстрее, чем $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$. А именно, если $\|A_n^T f - f^*\|_p = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$, то $f = f^*$. Для $p > 1$ этот результат был получен в работе Батцера и Вестфала [1, теорема 1], где рассматривался более общий случай операторов с ограниченными степенями в рефлексивном банаховом пространстве. Гапошкиным было получено новое доказательство для случая L_2 -сходимости в [2, следствие 5], где использовалось спектральное представление стационарных последовательностей. При этом факт о максимальной скорости сразу следовал из неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \|A_n^T f\|_2 > 0$$

для ненулевой функции f . Седалищев в [3, лемма 1] получил простое доказательство этого неравенства для всех L_p , $p \in [1, +\infty]$, усилив его до следующего вида:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \|A_n^T f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2}.$$

Цель этой заметки — получить аналог утверждения о максимальной скорости сходимости для эргодических средних

$$A_{\vec{n}} f(\omega) = A_{n_1}^{T_1} \cdots A_{n_d}^{T_d} f(\omega), \quad \vec{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d,$$

где T_k , $k = 1, \dots, d$, есть попарно коммутирующие автоморфизмы вероятностного пространства (Ω, μ) ; а также для эргодических средних с непрерывным временем

$$\mathcal{A}_{\vec{t}} f(\omega) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d} \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u}, \quad \vec{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $\{T_k^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, $k = 1, \dots, d$, есть попарно коммутирующие потоки вероятностного пространства (Ω, μ) .

Мы покажем, что для всех $p \in [1, +\infty]$ максимальная скорость сходимости в L_p -норме есть $\mathcal{O}(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_d})$ при $n_1, \dots, n_d \rightarrow +\infty$ для дискретного времени, и $\mathcal{O}(\frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d})$ при $t_1, \dots, t_d \rightarrow +\infty$ для времени непрерывного. Это следствие теоремы 1. Положим

$$\pi(\vec{t}) = t_1 t_2 \cdots t_d, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d,$$

и будем писать $\vec{t} \geq \vec{s}$, если только для каждой координаты будет $t_j \geq s_j$.

Теорема 1. Пусть $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $p \in [1, \infty]$; тогда

$$\sup_{\vec{n} \geq \vec{n}} \|A_{\vec{n}} f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{n})} \quad \text{для всех } \vec{n} \in \mathbb{N}^d,$$

$$\sup_{\vec{s} \geq \vec{t}} \|A_{\vec{s}} f\|_p \geq \frac{\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}}} \left\| \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{t})} \quad \text{для всех } \vec{t} \in \mathbb{R}_+^d,$$

где $E_{\vec{t}} = \left\{ \vec{q} = (\frac{t_1}{n_1}, \dots, \frac{t_d}{n_d}) : \vec{n} \in \mathbb{N}^d, \vec{n} \geq \vec{t} \right\} \subset (0, 1]^d$.

1.2. Максимальная скорость сходимости $\mathcal{O}(\frac{1}{n_1 \cdots n_d})$ или $\mathcal{O}(\frac{1}{t_1 \cdots t_d})$ эргодических средних эквивалентна условию

$$\sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega) \right\|_p < \infty \quad \text{для дискретного времени,}$$

$$\sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}_+^d} \left\| \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p < \infty \quad \text{для непрерывного времени.}$$

Для случая одного сохраняющего меру преобразования хорошо известно, что последнее неравенство имеет место только для L_p -кограниц (или когомологических нулю функций из L_p), т.е. $f \in (I - T)L_p(\Omega, \mu)$. Замечательное изложение истории вопроса можно найти во введении работы Коэна и Лина [4]. В общем случае из работы Бредли [5] следует, что f является d -кратной L_p -кограницей для всех d сохраняющих меру преобразований, т.е.

$$f \in (I - T_1) \cdots (I - T_d)L_p(\Omega, \mu).$$

Коэном и Лином был получен [4], [6, предложение 3.1] спектральный критерий для двукратных L_2 -кограниц в случае двух коммутирующих преобразований. Мы приводим это утверждение (эквивалентность условий (1) и (2) далее) в общем случае $d \geq 1$. Отметим, что для одного сохраняющего меру преобразования спектральный критерий принадлежит Робинсону [7]. В недавней заметке [8] был получен аналогичный критерий для равномерной сходимости на подпространствах.

Теорема 2. Пусть T_1, \dots, T_d — попарно коммутирующие автоморфизмы вероятностного пространства (Ω, μ) . Тогда для $f \in L_2(\Omega, \mu)$ следующие условия эквивалентны:

$$f \in (I - T_1) \cdots (I - T_d)L_2(\Omega, \mu); \quad (1)$$

$$\int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} < \infty; \quad (2)$$

$$\left\| \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega) \right\|_2 = O\left(\frac{1}{n^d}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$\left\| \frac{1}{\pi(\vec{n})} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega) \right\|_2 = O\left(\frac{1}{\pi(\vec{n})}\right) \quad \text{при } n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_f(x_1, \dots, x_d)$ есть спектральная мера, построенная по функции f и автоморфизмам T_1, \dots, T_d (см., например, [9, 10]). В частности, с использованием спектральной меры можно выразить нормы эргодических

средних, а именно

$$\|A_{\vec{n}}f\|_2^2 = \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2} \int_{(-\pi, \pi)^d} \frac{\sin^2 \frac{n_1 x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{n_d x_d}{2}}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d).$$

Для непрерывного времени справедлив аналогичный результат. Чтобы его сформулировать, определим аналог L_p -кограниц. Пусть R_j — генератор группы $\{T_j^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, $j = 1, \dots, d$, т.е. в сильной операторной топологии $R_j = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(I - T_j^t)$. Нетрудно проверить, что на $\text{Dom } R = \bigcap_{j=1}^d \text{Dom } R_j$ генераторы коммутируют между собой, поэтому на этой области определения корректно определен оператор $R = R_1 \cdots R_d$. Будем говорить, что f есть d -кратная L_p -кограница, если она лежит в образе оператора R , т.е. найдется функция $g \in L_p(\Omega, \mu)$ такая, что $f = Rg$.

Теорема 3. Пусть $T_1^{t_1}, \dots, T_d^{t_d}$ — попарно коммутирующие потоки вероятностного пространства (Ω, μ) . Тогда для $f \in L_2(\Omega, \mu)$ следующие условия эквивалентны:

$$f \in RL_2(\Omega, \mu); \quad (1')$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{x_1^2 \cdots x_d^2} < \infty; \quad (2')$$

$$\left\| \frac{1}{t^d} \int_{[0, t]^d} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{t^d}\right) \text{ при } t \rightarrow \infty; \quad (3')$$

$$\left\| \frac{1}{\pi(\vec{t})} \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{\pi(\vec{t})}\right) \text{ при } t_1, \dots, t_d \rightarrow \infty. \quad (4')$$

Отметим, что в случае $d = 1$ эквивалентность (1') и (4') доказана в [11] (см. также [12]), а эквивалентность (2') и (3') рассмотрена в [13].

Задача перенесения известных результатов о скоростях сходимости в эргодических теоремах [14] с действия группы \mathbb{Z} на группы \mathbb{Z}^d и \mathbb{R}^d (и далее на максимально широкий класс групп) была поставлена первому соавтору этой статьи А.М. Вершиком и А.М. Степиным в середине 1990-х годов; ее решение было начато тогда же в [9] и [15]. Теоремы 2 и 3, в совокупности с результатами статьи [16], завершают решение этой задачи для степенных скоростей сходимости по норме (со всеми возможными показателями степеней) для действий групп \mathbb{Z}^d и \mathbb{R}^d .

2 Доказательство теоремы 1

2.1. Рассмотрим отображение $\mathcal{L} : \mathbb{N}^d \rightarrow \mathbb{N}^d$ такое, что

$$\vec{n} < \mathcal{L}(\vec{n}) \text{ для всех } \vec{n} \in \mathbb{N}^d, \text{ и } \mathcal{L}(\vec{n}) \leq \mathcal{L}(\vec{m}) \text{ при } \vec{n} \leq \vec{m}.$$

Будем говорить, что направленность $\{x_{\vec{n}}\}_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d}$ элементов некоторого нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ является (a, \mathcal{L}) -возвращающейся для

некоторого $a > 0$, если для любого $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$ найдется элемент $s(\vec{n}) \in \mathbb{N}^d$ такой, что $\vec{n} \leq s(\vec{n}) < \mathcal{L}(\vec{n})$ и $\|x_{s(\vec{n})}\| \geq a$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\{x_{\vec{n}}\}_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d}$ является (a, \mathcal{L}) -возвращающейся направленностью; тогда для всех $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$

$$\sup_{\vec{m} \geq \vec{n}} \left\| \frac{1}{\pi(\vec{m})} \sum_{0 \leq \vec{k} < \vec{m}} x_{\vec{k}} \right\| \geq \frac{a}{2^d \pi(\mathcal{L}(\vec{n}))}.$$

Теорема 4 доказана в [17] для комплекснозначных направленностей. Доказательство общего случая для направленностей со значениями в нормированном пространстве слово в слово повторяет оригинальный случай, поскольку, по-сути, используется лишь неравенство треугольника для нормы.

Из теоремы 4 сразу же следует теорема 1 для группового времени \mathbb{Z}^d . Действительно, для функции $f \in L_p(\Omega, \mu)$ рассмотрим направленность $x_{\vec{n}} = f(T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} \omega)$ и $\mathcal{L}(\vec{n}) = \vec{n} + (1, \dots, 1)$. Взяв $a = \|f\|_p$, получим, что направленность является (a, \mathcal{L}) -возвращающейся: $s(\vec{n}) = \vec{n}$ и $\|x_{s(\vec{n})}\|_p = a$. Следовательно, справедливо неравенство из теоремы 4, которое после применения оценки $\pi(\vec{n} + (1, \dots, 1)) \leq 2^d \pi(\vec{n})$ становится в точности неравенством из теоремы 1.

Теперь рассмотрим непрерывный случай — групповое время \mathbb{R}^d , и воспользуемся уже доказанным неравенством для дискретного времени. Зафиксируем \vec{t} и возьмем произвольный вектор $\vec{q} \in E_{\vec{t}}$. Положим

$$g_{\vec{q}}(\omega) = \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u}, \quad S_j = T_j^{q_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0, \vec{n}]$ на единичные кубы, т.е.

$$[0, \vec{n}] = \bigcup_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} P_{\vec{k}}, \quad P_{\vec{k}} = [0, 1]^d + \vec{k}, \quad \vec{k} \leq \vec{n}.$$

Покоординатное умножение векторов в \mathbb{R}^d обозначим как

$$\vec{t} \odot \vec{s} = (t_1 s_1, \dots, t_d s_d).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} \int_{P_{\vec{k}}} f(S_1^{u_1} \cdots S_d^{u_d} \omega) d\vec{u} &= \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} \int_{[0, 1]^d} f(S_1^{u_1+k_1} \cdots S_d^{u_d+k_d} \omega) d\vec{u} = \\ &= \frac{1}{\pi(\vec{q})} \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{t_1} S_1^{k_1} \cdots T_d^{t_d} S_d^{k_d} \omega) d\vec{t} = \frac{\pi(\vec{n})}{\pi(\vec{q})} A_{n_1}^{S_1} \cdots A_{n_d}^{S_d} g_{\vec{q}}(\omega). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\vec{t} = \vec{n}_0 \odot \vec{q}$ для некоторого $\vec{n}_0 \geq \vec{t}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \sup_{\vec{s} \geq \vec{t}} \|\mathcal{A}_{\vec{s}} f\|_p &\geq \sup_{\vec{s} \geq \vec{t}, \vec{s} = \vec{n} \odot \vec{q}, \vec{n} \in \mathbb{N}^d} \|\mathcal{A}_{\vec{s}} f\|_p = \\
 &= \sup_{\vec{n} \geq \vec{n}_0} \frac{1}{\pi(\vec{n} \odot \vec{q})} \left\| \int_{[0, \vec{n} \odot \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = \\
 &= \sup_{\vec{n} \geq \vec{n}_0} \frac{1}{\pi(\vec{n})} \left\| \int_{[0, \vec{n}]} f(T_1^{q_1 u_1} \cdots T_d^{q_d u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = \\
 &= \sup_{\vec{n} \geq \vec{n}_0} \frac{1}{\pi(\vec{n})} \left\| \sum_{0 \leq k \leq \vec{n}} \int_{P_k} f(S_1^{u_1} \cdots S_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = \\
 &= \sup_{\vec{n} \geq \vec{n}_0} \frac{1}{\pi(\vec{q})} \|\mathcal{A}_{n_1}^{S_1} \cdots \mathcal{A}_{n_d}^{S_d} g_{\vec{q}}(\omega)\|_p \geq \frac{\|g_{\vec{q}}\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{q}) \pi(\vec{n}_0)} = \frac{\|g_{\vec{q}}\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{t})}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{q} \in E_{\vec{t}}$ был произвольным, можно взять супремум по всем таким векторам. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. В.В. Рыжиков предложил следующее рассуждение, для обоснования неравенства для дискретного случая в теореме 1. Справедливо утверждение: для любого $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$ найдется $\vec{n}' \geq \vec{n}$, такой что $\|\vec{n} - \vec{n}'\|_\infty \leq 1$ и

$$\left\| \sum_{k_1=0}^{n'_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n'_d-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega) \right\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^d}.$$

Это неравенство усиливает неравенство Седалищева для одномерного случая. Доказательство проводится индукцией. Покажем лишь базу для $d = 1$. Из равенства

$$\sum_{k=0}^n f(T^k \omega) - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = f(T^n \omega)$$

следует, что нормы обеих сумм в правой части не могут быть одновременно меньше $\|f\|_p/2$.

Теперь, имея усиленное неравенство Седалищева, получаем

$$\sup_{\vec{m} \geq \vec{n}} \|\mathcal{A}_{\vec{m}} f\|_p \geq \sup_{\|\vec{m}' - \vec{n}\|_\infty \leq 1} \|\mathcal{A}_{\vec{m}'} f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^d \pi(\vec{n}')} \geq \frac{\|f\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{n})}.$$

2.2. Покажем, как из теоремы 1 следует утверждение о максимальной скорости сходимости эргодических средних.

Пусть $\|\mathcal{A}_{\vec{n}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{n_1 \cdots n_d}\right)$ при $n_1, \dots, n_d \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\frac{\|f - f^*\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{n})} \leq \sup_{\vec{m} \geq \vec{n}} \|\mathcal{A}_{\vec{m}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{\pi(\vec{n})}\right),$$

откуда $\|f - f^*\|_p = o(1)$, т.е. $f(\omega) = f^*(\omega)$ п.в.

Для непрерывного времени также предположим, что $\|\mathcal{A}_{\vec{t}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{t_1 \dots t_d}\right)$ при $t_1, \dots, t_d \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\frac{\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}}} \left\| \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} - \pi(\vec{q})f^* \right\|_p}{2^{2d} \pi(\vec{t})} \leq \sup_{\vec{s} \geq \vec{t}} \|\mathcal{A}_{\vec{s}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{\pi(\vec{t})}\right),$$

откуда $\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}}} \left\| \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} - \pi(\vec{q})f^* \right\|_p = o(1)$ при $t_1, \dots, t_d \rightarrow +\infty$.

Пусть $\vec{t} = n\vec{t}_0$, $n \rightarrow \infty$, а вектор \vec{t}_0 фиксирован. Поскольку $E_{\vec{t}_0} \subset E_{n\vec{t}_0} \subset (0, 1]^d$, то $\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}_0}} \left\| \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} - \pi(\vec{q})f^* \right\|_p = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, для любого $\vec{q} \in E_{\vec{t}_0}$

$$\left\| \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} - \pi(\vec{q})f^* \right\|_p = 0.$$

Тогда из локальной эргодической теоремы [18, §7.2] получим справедливое п.в. равенство

$$f^*(\omega) = \lim_{E_{\vec{t}_0} \ni \vec{q} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi(\vec{q})} \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = f(\omega).$$

3 Функции $\mathcal{J}_d(x)$ и $\mathcal{K}_d(x)$

3.1. Рассмотрим вспомогательную задачу, интересную саму по себе и полезную для доказательства спектрального критерия максимальной возможной скорости сходимости, т.е. теорем 2 и 3. Для $x = (x_1, \dots, x_d)$ определим функции

$$\mathcal{J}_d(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s / 2) ds, \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathcal{K}_d(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k n / 2), \quad x \in (-\pi, \pi]^d.$$

Наша цель — определить множество нулей этих функций и показать конечность множества их значений. Читатель, интересующийся непосредственно доказательством теорем 2 и 3, может перейти к следующим параграфам и позднее вернуться к §3.

Для вычисления пределов воспользуемся следующей конструкцией. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^d пучок $\mathcal{L}(a)$ всех гиперплоскостей, задаваемых равенствами $x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_d \varepsilon_d = a$, где $a \in \mathbb{R}$ фиксировано, и $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$ и не все они равны нулю одновременно. Ясно, что $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(-a)$ для каждого $a \in \mathbb{R}$. Индексом гиперповерхности L из пучка $\mathcal{L}(a)$ назовем количество всех ненулевых коэффициентов в задающем

ее уравнении, т.е. величину $\text{ind}L = \sum_{k=1}^d |\varepsilon_k| = \|\varepsilon\|_1$. В случае $a = 0$ гиперплоскости из пучка $\mathcal{L}(0)$, задаваемые векторами ε и $-\varepsilon$, условимся считать разными. С такими конструкциями связано много различных комбинаторных задач; см., например, [19]. Положим также

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}(0) \cup \mathcal{L}(2\pi) \cup \dots \cup \mathcal{L}(2\pi \lfloor d/2 \rfloor).$$

Предложение 1. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{J}_d(x) = \frac{1}{2^d} \left(1 + \sum_{k=1}^d \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}(0) \\ \text{ind}L=k}} I_{\{x \in L\}} \right), \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathcal{K}_d(x) = \frac{1}{2^d} \left(1 + \sum_{k=1}^d \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}_d \\ \text{ind}L=k}} I_{\{x \in L\}} \right), \quad x \in (-\pi, \pi]^d.$$

Доказательство. Докажем оба равенства одновременно. Пусть ν есть мера Лебега на \mathbb{R} или считающая мера на \mathbb{Z} . Тогда оба предела в определениях функций \mathcal{J}_d и \mathcal{K}_d записываются одинаково. Имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(0,T]} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) d\nu(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2^d T} \int_{(0,T]} \prod_{k=1}^d (1 - \cos(x_k s)) d\nu(s).$$

Используя формулу для произведения косинусов, перепишем произведение

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^d (1 - \cos(x_k s)) &= 1 - \sum_{k=1}^d \cos(x_k s) + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \cos(x_i s) \cos(x_j s) + \dots \\ &+ (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \cos(x_{i_1} s) \dots \cos(x_{i_k} s) + \dots + (-1)^d \cos(x_1 s) \dots \cos(x_d s) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^d \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \frac{1}{2} \sum_{\|\varepsilon\|_1=k} \cos((x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_d \varepsilon_d) s). \end{aligned}$$

Суммирование $\sum_{\|\varepsilon\|_1=k}$ идет по всем векторам $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$

с нормой $\|\varepsilon\|_1 = k$. Поскольку вектора ε и $-\varepsilon$ дают одинаковый вклад, то у каждой суммы появился дополнительный множитель $\frac{1}{2}$. Остается вычислить пределы вида $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(0,T]} \cos(y s) d\nu(s)$, где $y = \sum_{k=1}^d x_k \varepsilon_k$.

Если ν есть мера Лебега, то предел равен $I_{\{y=0\}}$. Проверим, что для считающей меры на \mathbb{Z} будет похожий результат. Используя известные формулы для суммы косинусов, получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(ny) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\cos(Ny/2) \sin((N+1)y/2)}{\sin(y/2)} - 1 \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{\{y=2\pi k\}}.$$

Последняя сумма на самом деле конечна и равна $\sum_{k=-\lfloor d/2 \rfloor}^{\lfloor d/2 \rfloor} I_{\{y=2\pi k\}}$, поскольку при $x \in (-\pi, \pi]^d$ точка $y \in (-d\pi, d\pi]$. Собирая все вычисления вместе, получаем требуемые равенства. \square

Из предложения 1 сразу же следует, что функции \mathcal{J}_d и \mathcal{K}_d принимают конечное число значений. Кроме того, для всех $x \in (-\pi, \pi]^d$ таких, что $x \notin \mathcal{L}_d \setminus \mathcal{L}(0)$, будет равенство $\mathcal{J}_d(x) = \mathcal{K}_d(x)$; в частности, для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}\right]^d$.

3.2. Определим нули функции \mathcal{J}_d и оценим ее минимальное положительное значение.

Предложение 2. Для функции \mathcal{J}_d справедливы утверждения:

$$(i) \mathcal{J}_d(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) ds \text{ для всех } x \in \mathbb{Z}^d.$$

(ii) $\mathcal{J}_d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\prod_{k=1}^d x_k = 0$. При этом для минимального значения $j_d := \min_{\prod_{k=1}^d x_k \neq 0} \mathcal{J}_d(x)$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2(2d+1)d^{(d-1)(2d+1)}} \leq j_d \leq \frac{1}{2^d}.$$

Доказательство. Учитывая, что при $x \in \mathbb{Z}^d$ квадраты синусов, участвующие в произведении, будут 2π -периодическими, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_d(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) ds = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) ds = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k(t + 2\pi n)/2) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k t/2) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k t/2) dt. \end{aligned}$$

Функция \mathcal{J}_d является однородной функцией нулевого порядка, т.е. для всякого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ верно равенство $\mathcal{J}_d(\alpha x) = \mathcal{J}_d(x)$. Если точка $x \in \mathbb{R}^d$ не лежит ни в одной гиперплоскости пучка $\mathcal{L}(0)$, то $\mathcal{J}_d(x) = 2^{-d}$. Одинаковые значения \mathcal{J}_d принимает на линейных подпространствах, являющихся пересечениями гиперплоскостей пучка $\mathcal{L}(0)$. Поскольку любое такое пересечение содержит целочисленные точки, то значения функции \mathcal{J}_d полностью определяются ее значениями на \mathbb{Z}^d . Более того, можно утверждать, что достаточно брать целочисленные точки из некоторого

куба. Чтобы найти границу этого куба, воспользуемся следующим утверждением из теории диофантовых уравнений (см. [20, теорема 6.1], [21, глава 1, §2.2], а также [22]). Пусть $m < d$, $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ и $A_i = \sum_{j=1}^d |a_{i,j}|$, $i = 1, \dots, m$; тогда система линейных однородных уравнений

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,d}x_d = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

имеет нетривиальное целочисленное решение, удовлетворяющее условию

$$\max_{1 \leq k \leq d} |x_k| \leq \sqrt[d-m]{A_1 \cdots A_m}.$$

В нашем случае все $A_i \leq d$, и граница куба оценивается как $\max_{1 \leq k \leq d} |x_k| \leq d^{d-1}$.

Из (i) и того факта, что \mathcal{J}_d полностью определяется значениями на \mathbb{Z}^d , сразу видно, что \mathcal{J}_d зануляется только, если одна из координат $x_k = 0$. Найдем теперь нижнюю оценку для \mathcal{J}_d ; верхняя оценка очевидна. Воспользуемся представлением (i), где для точки $x \in \mathbb{Z}^d$, $x_k \neq 0$ будем считать, что $D = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k| \leq d^{d-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_d(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s) ds \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2D)} \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s) ds. \end{aligned}$$

При $s \in [0, \frac{\pi}{2D}]$ будет $x_k s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и, следовательно, $\sin^2(x_k s) \geq (\frac{2}{\pi} x_k s)^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_d(x) &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2D)} \prod_{k=1}^d \frac{4x_k^2 s^2}{\pi^2} ds = \frac{4^d x_1^2 \cdots x_d^2}{\pi^{2d+1}} \int_0^{\pi/(2D)} s^{2d} ds = \\ &= \frac{4^d x_1^2 \cdots x_d^2}{\pi^{2d+1}} \frac{\pi^{2d+1}}{(2d+1)(2D)^{2d+1}} = \frac{x_1^2 \cdots x_d^2}{2(2d+1)D^{2d+1}} \geq \frac{1}{2(2d+1)d^{(d-1)(2d+1)}}. \end{aligned}$$

□

3.3. Перейдем к нахождению нулей функции $\mathcal{K}_d(x)$.

Предложение 3. $\mathcal{K}_d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\prod_{k=1}^d x_k = 0$.

Доказательство. Как видно из определения функции \mathcal{K}_d , если хотя бы одна координата точки $x \in (-\pi, \pi]^d$ равна нулю, то функция зануляется. Покажем, что других нулей нет. Предположим, что найдется точка $x \in (-\pi, \pi]^d$, такая, что $\prod_{k=1}^d x_k \neq 0$, и при этом $\mathcal{K}_d(x) = 0$. Противоречие

получим, используя теорию плотности для подмножеств множества натуральных чисел. А переход к этой теории осуществим с помощью леммы Купмана—фон Неймана (см., например, [23, лемма 2.41]): для ограниченной последовательности неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n \geq 1}$ справедлива эквивалентность

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, n \notin J$$

для некоторого множества J с нулевой асимптотической плотностью.

Напомним (см., например, [24]), что асимптотической плотностью $d(J)$ некоторого множества $J = \{j_1, j_2, \dots\}$ натуральных чисел называется предел (если он существует)

$$d(J) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : j_k \leq n\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{j_n}.$$

Возьмем $a_n = \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k n/2)$. Поскольку

$$0 = \mathcal{K}_d(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n,$$

то существует множество $J \subset \mathbb{N}$ единичной асимптотической плотности, вдоль которого $a_n \rightarrow 0$ (так как дополнение к множеству нулевой плотности имеет единичную плотность). Покажем, что такого не может быть. Для этого выясним, вдоль каких возрастающих последовательностей m_n натуральных чисел будет $\sin(y m_n) \rightarrow 0$ при $m_n \rightarrow \infty$ для $y \in (-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$.

Если $y = \pi \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, то с некоторого номера будет $m_n = b M_n$, $M_n \in \mathbb{N}$. Максимально плотным множеством будет арифметическая прогрессия $m_n = b n$, $n \in \mathbb{N}$; ее асимптотическая плотность есть $\frac{1}{b}$.

Если $y = \pi \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то асимптотическая плотность $\{m_n\}_{n \geq 1}$ будет нулевой. Действительно, покажем сначала, что $m_{n+1} - m_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть это не так; тогда найдется натуральное число c такое, что для бесконечного количества номеров будет $m_{n+1} - m_n = c$. Для таких номеров получим

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \sin(y m_{n+1}) = \lim_n \sin(y m_n + y c) = \\ &= \lim_n \sin(y m_n) \cos(y c) + \lim_n \cos(y m_n) \sin(y c) = \pm \sin(y c) = \pm \sin(\pi c \alpha). \end{aligned}$$

Знак \pm зависит от того, куда сходится $\cos(y m_n)$, к 1 или -1 . Откуда заключаем, что $c = 0$, чего не может быть. Используя теорему Штольца для вычисления пределов последовательностей, получим

$$d(\{m_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{m_{n+1}-m_n} = 0.$$

Вернемся к последовательности $a_n = \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k n/2)$. Множество J , вдоль которого она стремится к нулю, есть объединение множеств J_k , вдоль каждого из которых $\sin(x_k n/2)$ стремится к нулю. Среди J_k либо множества плотности ноль, либо арифметические прогрессии вида $\{b_k n\}_{n \geq 1}$, $b_k \in \mathbb{N}$, $b_k \geq 2$. Конечное объединение множеств с нулевой асимптотической плотностью будет множеством с нулевой плотностью. А конечное объединение рассмотренных арифметических прогрессий не может иметь плотность 1, поскольку в дополнении к нему всегда найдется другая арифметическая прогрессия. Действительно, арифметическая прогрессия $\{1 + b_1 \cdots b_\ell n\}_{n \geq 1}$ не имеет общих членов ни с одной из прогрессий $\{b_k n\}_{n \geq 1}$. Поскольку в противном случае диофантово уравнение

$$1 + b_1 \cdots b_\ell n = b_k m$$

имело бы решение $n, m \in \mathbb{N}$, чего не может быть.

Таким образом, асимптотическая плотность множества J не может быть равной 1. \square

4 Доказательство теоремы 2

Напомним, что эквивалентность (1) и (4) следует из [5]. Для остальных пунктов мы докажем следующую цепочку: (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4).

Из (4) легко можно получить (3), поставив $n_1 = \cdots = n_d = n$.

Покажем переход (3) \Rightarrow (2). Пусть для некоторой константы $B > 0$ при всех натуральных n будет $\|A_n f\|_2^2 \leq B n^{-2d}$. С учетом представления для L_2 -нормы эргодических средних перепишем эту оценку в виде

$$B \geq \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{nx_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d).$$

Суммируя это неравенство по n от 1 до N , получаем

$$B \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{(\pi, \pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{nx_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d).$$

Лемма Фату при переходе к нижнему пределу при $N \rightarrow +\infty$ дает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{nx_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d) &\geq \\ &\geq \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{nx_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d). \end{aligned}$$

Вспоминая определение функции $\mathcal{K}_d(x)$, получаем близкую к требуемой оценку

$$\int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\mathcal{K}_d(x)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d) \leq B.$$

Из условия (3), применяя оператор \mathbb{E}_j условного математического ожидания относительно σ -алгебры T_j -инвариантных множеств, получаем с одной стороны

$$\left\| \mathbb{E}_j \left(\sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} x) \right) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} x) \right\|_2 = \mathcal{O}(1),$$

а с другой, так как $\mathbb{E}_j T_j = \mathbb{E}_j$,

$$\left\| \mathbb{E}_j \left(\sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} x) \right) \right\|_2 = n \left\| \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} \mathbb{E}_j f(T_1^{k_1} \cdots \widehat{T_j^{k_j}} \cdots T_d^{k_d} x) \right\|_2.$$

Соединяя вместе, находим, что для эргодических средних, порожденных $d-1$ автоморфизмами (всеми, кроме T_j), справедлива оценка

$$\|A_n^{T_1} \cdots A_n^{T_d} \mathbb{E}_j f\|_2 = o\left(\frac{1}{n^{d-1}}\right).$$

Учитывая теорему 1, заключаем, что $\mathbb{E}_j f = 0$ для каждого $j = 1, \dots, d$. Отсюда выводим [10, следствие 1], что спектральная мера $\sigma_f(\mathbb{O}) = 0$ для

$$\mathbb{O} = \left\{ x \in (-\pi, \pi]^d : \prod_{i=1}^d x_i = 0 \right\}.$$

По предложению 3 на \mathbb{O} также зануляется функция $\mathcal{K}_d(x)$, поэтому

$$\int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\mathcal{K}_d(x)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d) \geq \min_{x \notin \mathbb{O}} \mathcal{K}_d(x) \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}.$$

Откуда, полагая $\kappa_d = \min_{x \notin \mathbb{O}} \mathcal{K}_d(x)$ и зная из предложений 1 и 3, что $\kappa_d > 0$, получаем

$$\int_{(\pi, \pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} \leq \frac{B}{\kappa_d} < \infty.$$

Покажем теперь импликацию (2) \Rightarrow (4). Если

$$\int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}} = A < \infty,$$

то при всех $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned} \|A_{\vec{n}}f\|_2^2 &= \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2} \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{\sin^2 \frac{n_1 x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{n_d x_d}{2}}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} d\sigma_f(x_1, \dots, x_d) \leq \\ &\leq \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2} \int_{(-\pi, \pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} \leq A \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2}. \end{aligned}$$

Теорема 2 полностью доказана.

5 Доказательство теоремы 3

Эквивалентность условий (2'), (3') и (4') доказывается слово в слово, как в теореме 2 доказывается эквивалентность условий (2), (3) и (4). Отличием является использование функции \mathcal{J}_d (вместо функции \mathcal{K}_d), нули которой образуют множество $\mathbb{O}' = \{x \in \mathbb{R}^d : \prod_{i=1}^d x_i = 0\}$. Докажем эквивалентность (1') и (4').

Предложение 4. Пусть T^{t_1}, \dots, T^{t_d} — попарно коммутирующие потоки пространства с вероятностной мерой (Ω, μ) . Для любой функции $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $p \in [1, +\infty)$ справедлива эквивалентность

$$f \in RL_p(\Omega, \mu) \Leftrightarrow \sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}_+^d} \left\| \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p < \infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать импликацию \Leftarrow . Сведем задачу к уже известному критерию для дискретного времени. Пусть

$$\sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}_+^d} \left\| \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = C < \infty.$$

Зафиксируем произвольный вектор $\vec{q} \in \mathbb{R}_+^d$, и положим, как и в доказательстве теоремы 1,

$$g_{\vec{q}}(\omega) = \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{t_1} T_2^{t_2} \cdots T_d^{t_d} \omega) dt, \quad S_j = T_j^{q_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогда, используя выкладки из доказательства теоремы 1, получим оценку

$$\begin{aligned} \sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}^d} \left\| \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p &\geq \sup_{\vec{t} = \vec{n} \odot \vec{q}, \vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \int_{[0, \vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = \\ &= \sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \int_{[0, \vec{n} \odot \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} \right\|_p = \sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} g_{\vec{q}}(S_1^{k_1} \cdots S_d^{k_d} \omega) \right\|_p. \end{aligned}$$

Таким образом, для коммутирующих автоморфизмов $S_j, j = 1, \dots, d$ и функции $g_{\vec{q}}$ получили

$$\sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} g_{\vec{q}}(S_1^{k_1} \dots S_d^{k_d} \omega) \right\|_p \leq C < \infty.$$

Из работы Бредли [5] следует, что найдется функция $h_{\vec{q}} \in L_p(\Omega, \mu)$ такая, что $\|h_{\vec{q}}\|_p \leq C$ и $g_{\vec{q}} = \prod_{j=1}^d (I - S_j) h_{\vec{q}}$, т.е.

$$\int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{q}}, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Запишем это равенство для вектора $\vec{q}/\vec{k} := \left(\frac{q_1}{k_1}, \dots, \frac{q_d}{k_d} \right)$, $\vec{k} \in \mathbb{N}^d$:

$$\int_{[0, \vec{q}/\vec{k}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{\frac{q_j}{k_j}}) h_{\vec{q}/\vec{k}}.$$

Действуя на это равенство слева оператором

$$\prod_{j=1}^d \left(I + T_j^{\frac{q_j}{k_j}} + T_j^{2\frac{q_j}{k_j}} + \dots + T_j^{(k_j-1)\frac{q_j}{k_j}} \right) = \sum_{0 \leq \vec{n} \leq \vec{k}} T_1^{n_1 \frac{q_1}{k_1}} \dots T_d^{n_d \frac{q_d}{k_d}},$$

получим равенство

$$\int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \dots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{q}/\vec{k}}.$$

Будем теперь считать, что вектор \vec{q} имеет двоично-рациональные координаты. Тогда найдется натуральное число $m_0 = m_0(\vec{q})$ такое, что для любого $m \geq m_0$ можно выбрать вектор $\vec{k} = \vec{k}(m)$, для которого

$$\vec{q}/\vec{k} = (2^{-m}, 2^{-m}, \dots, 2^{-m}) := \vec{v}_m.$$

Действительно, пусть $\vec{q} = \left(\frac{a_1}{2^{b_1}}, \dots, \frac{a_d}{2^{b_d}} \right)$, $a_j, b_j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$m_0 = b_1 b_2 \dots b_d, \quad \vec{k} = (a_1 2^{m-b_1}, a_2 2^{m-b_2}, \dots, a_d 2^{m-b_d}).$$

Поскольку последовательность функций $h_{\vec{v}_m}$ ограничена, то из рефлексивности пространства $L_p(\Omega, \mu)$ для $p \in (1, \infty)$ следует, что найдется функция $h \in L_p(\Omega, \mu)$, являющаяся слабым пределом некоторой подпоследовательности $h_{\vec{v}_{m_n}}$. Тогда

$$\prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{v}_{m_n}} \xrightarrow{\omega} \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h.$$

Но при $m_n \geq m_0(\vec{q})$ имеется равенство

$$\prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{v}_{m_0}} = \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{v}_{m_n}}.$$

Откуда заключаем, что для любого вектора \vec{q} с двоично-рациональными координатами

$$\int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h.$$

В случае пространства $L_1(\Omega, \mu)$ воспользуемся теоремой Комлоша (см., например, [25, теорема 10.10.22]), которая утверждает следующее. Для ограниченной в $L_1(\Omega, \mu)$ последовательности функций $h_{\vec{v}_m}$ найдется подпоследовательность $h_{\vec{v}_{m_n}}$ и функция $h \in L_1(\Omega, \mu)$ такие, что имеется сходимость п.в. чезаровских средних любой её подпоследовательности $h_{\vec{v}_{m_{n_k}}}$:

$$\tilde{h}_k := \frac{h_{\vec{v}_{m_{n_1}}} + h_{\vec{v}_{m_{n_2}}} + \dots + h_{\vec{v}_{m_{n_k}}}}{k} \rightarrow h \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда п.в. $\prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) \tilde{h}_k \rightarrow \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h$ при $k \rightarrow \infty$. Можно считать, что $m_{n_1} \geq m_0(\vec{q})$. Тогда левая часть последнего предельного соотношения равна $\int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u}$. Откуда снова заключаем, что для любого вектора \vec{q} с двоично-рациональными координатами

$$\int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h.$$

Таким образом, получившееся равенство справедливо для всех $p \in [1, +\infty)$. Поскольку двоично-рациональные числа плотны в \mathbb{R} , и обе части последнего равенства L_p -непрерывны, то оно будет верно для всех $\vec{q} \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда

$$\frac{1}{\pi(\vec{q})} \int_{[0, \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) d\vec{u} = \prod_{j=1}^d \frac{I - T_j^{q_j}}{q_j} h.$$

Переходя к пределу в L_p при $q_1, \dots, q_d \rightarrow 0$, учитывая локальную эргодическую теорему, получим $f = Rh$. Что и требовалось доказать. \square

References

- [1] P. Butzer, U. Westphal, *The mean ergodic theorem and saturation*, Indiana Univ. Math. J., **20**:12 (1971), 1163–1174.
- [2] V.F. Gaposhkin, *Convergence of series connected with stationary sequences*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **9**:6 (1975), 1297–1321.
- [3] V.V. Sedalishchev, *Interrelation between the convergence rates in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems*, Siberian Math. J., **55**:2 (2014), 336–348.
- [4] G. Cohen, M. Lin, *Double coboundaries for commuting contractions*, Pure Appl. Funct. Anal., **2**:1 (2017), 11–36.

- [5] R.S. Bradley, *An L^p ‘Cousin of coboundary’ theorem for random fields*, J. Aust. Math. Soc., **85** (2008), 51–58.
- [6] Cohen G., Lin M., *Joint and double coboundaries of commuting contractions*, Indiana Univ. Math. J., **70**:4 (2021), 1355–1394.
- [7] F.A. Robinson *Sums of stationary random variables*, Proc. Amer. Math. Soc., **11**:1 (1960), 77–79.
- [8] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, A.J. Khakimbaev, *Uniform convergence on subspaces in von Neumann ergodic theorem with discrete time*, Mathematical Notes, **113**:5 (2023), 680–693.
- [9] A.G. Kachurovskii, *Convergence of averages in the ergodic theorem for groups Z^d* , J. Math. Sci. (New York), **107**:5 (2001), 4231–4236.
- [10] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, V.E. Todikov, A.J. Khakimbaev, *A spectral criterion for power-law convergence rate in the ergodic theorem for Z^d and R^d actions*, Siberian Math. J., **65**:1 (2024), 76–95.
- [11] U. Krengel, M. Lin, *On the range of the generator of a Markovian semigroup*, Math. Zeit., **185** (1984), 553–565.
- [12] V.P. Fonf, M. Lin, P. Wojtaszczyk, *Poisson’s equation and characterizations of reflexivity of Banach spaces*, Colloquium Math., **124**:2 (2011), 225–235.
- [13] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, V.E. Todikov, *Uniform convergence on subspaces in von Neumann’s ergodic theorem with continuous time*, Siberian Electronic Math. Reports, **20**:1 (2023), 183–206.
- [14] A. G. Kachurovskii, *The rate of convergence in ergodic theorems*, Russian Math. Surveys, **51**:4 (1996), 653–703.
- [15] A.M. Vershik, A.G. Kachurovskii, *Rates of convergence in ergodic theorems for locally finite groups and reversed martingales*, Differentsialnye Uravnenia i Protsey Upravlenia, **1** (1999), 19–26. (Russian)
- [16] I.V. Podvigin, *A criterion for the power-law rate of convergence of ergodic means for unitary actions of Z^d and R^d* , Algebra i Analiz, **36**:4 (2024), 148–164. (Russian)
- [17] I.V. Podvigin, *Lower bound of the supremum of ergodic averages for Z^d and R^d -actions*, Siberian Electronic Math. Reports, **17** (2020), 626–636.
- [18] U. Krengel, *Ergodic theorems* (De Gruyter Studies in Mathematics, V.6), Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
- [19] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplane*, Memoirs of AMS, **1**:154 (1975), AMS, Providence RI.
- [20] N.I. Fel’dman, *Sed’maya problema Gil’berta*, Izd-vo MGU, Moscow, 1982. (Russian)
- [21] Yu. I. Manin, A.A. Panchishkin, *Introduction to number theory*, Number theory – 1, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **49** (1990), 5–341, VINITI, Moscow. (Russian)
- [22] P.G. Kontorovich, D.I. Mil’man, *On a method of N.I. Lobachevskii for finding integer solutions of linear homogeneous equations with integer coefficients*, Uspekhi Mat. Nauk, **8**:1(53) (1953), 145–149. (Russian)
- [23] M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, (Graduate Texts in Mathematics V. 259), London, Springer, 2011.
- [24] I. Niven, *The asymptotic density of sequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **57**:6 (1951), 420–434.
- [25] V.I. Bogachev, *Osnovy teorii mery*, Tom 2, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Moscow–Izhevsk, 2003. (Russian)

ALEXANDER GRIGORIEVICH KACHUROVSKII
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: agk@math.nsc.ru

IVAN VIKTOROVICH PODVIGIN
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. КОПТУГА, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: ipodvigin@math.nsc.ru

AZIZ JAMALUTDIN ULI KHAKIMBAEV
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
ST. PIROGOVA, 1,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: a.khakimbaev@ngs.ru