S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том ??, № ?, стр. ???–??? (202?) УДК 517.987
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 37A30, 37A15

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПО НОРМЕ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ГРУПП $\mathbb{Z}^d$ И $\mathbb{R}^d$

А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин, и А.Ж. Хакимбаев

Представлено ???????

Abstract: For d pairwise commuting automorphisms (flows) of a probability space, ergodic averages over parallelepipeds are considered. It is shown that the maximum rate of their convergence in the L_p-norm is $\mathcal{O}(\frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d})$. A spectral criterion is also obtained for the maximum convergence rate in the L_2-norm.

Keywords: скорости сходимости в эргодических теоремах, спектральная мера, кограницы, пучок гиперплоскостей.

1 Введение

1.1. Пусть T — сохраняющее меру преобразование пространства с вероятностной мерой (Ω, μ). Хорошо известно, что эргодические средние

$$A_n^T f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega), \quad f \in L_p(\Omega, \mu),\ p \in [1, +\infty)$$

Kachurovskii, A.G., Podvigin, I.V., Khakimbaev, A.Zh., Maximum rate of norm convergence in the ergodic theorem for groups $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{R}^d$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Поступила ???? 2024 г., опубликована ?????

сходятся по норме при $n \to \infty$ к своему пределу f^* со скоростью не быстрее, чем $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$. А именно, если $\|A_n^T f - f^*\|_p = \mathcal{O}(\varphi(n))$ и $\varphi(n) = o(1/n)$ при $n \to \infty$, то $f = f^*$. Для $p > 1$ этот результат был получен в работе Батцера и Вестфала [1, теорема 1], где рассматривался более общий случай операторов с ограниченными степенями в рефлексивном банаховом пространстве. Гапошкиным было получено новое доказательство для случая L_2-сходимости в [2, следствие 5], где использовалось спектральное представление стационарных последовательностей. При этом факт о максимальной скорости сразу следовал из неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\|A_n^T f\|_2 > 0$$

для ненулевой функции f. Седалищев в [3, лемма 1] получил простое доказательство этого неравенства для всех L_p, $p \in [1, +\infty]$, усилив его до следующего вида:

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\|A_n^T f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2}.$$

Цель этой заметки — получить аналог утверждения о максимальной скорости сходимости для эргодических средних

$$A_{\vec{n}} f(\omega) = A_{n_1}^{T_1} \cdots A_{n_d}^{T_d} f(\omega), \quad \vec{n} = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}^d,$$

где T_k, $k = 1, ..., d$, есть попарно коммутирующие автоморфизмы вероятностного пространства (Ω, μ); а также для эргодических средних с непрерывным временем

$$\mathcal{A}_{\vec{t}} f(\omega) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d} \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u}, \quad \vec{t} = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $\{T_k^t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $k = 1, ..., d$, есть попарно коммутирующие потоки вероятностного пространства (Ω, μ).

Мы покажем, что для всех $p \in [1, +\infty]$ максимальная скорость сходимости в L_p-норме есть $\mathcal{O}(\frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_d})$ при $n_1, ..., n_d \to +\infty$ для дискретного времени, и $\mathcal{O}(\frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d})$ при $t_1, ..., t_d \to +\infty$ для времени непрерывного. Это следствие предложения 1. Положим

$$\pi(\vec{t}) = t_1 t_2 \cdots t_d, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d,$$

и будем писать $\vec{t} \geq \vec{s}$, если только для каждой координаты будет $t_j \geq s_j$.

Предложение 1. *Пусть* $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $p \in [1, \infty]$; *тогда*

$$\sup_{\vec{m}\geq\vec{n}} \|A_{\vec{m}} f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{n})} \quad \textit{для всех} \quad \vec{n} \in \mathbb{N}^d,$$

$$\sup_{\vec{s}\geq\vec{t}} \|\mathcal{A}_{\vec{s}} f\|_p \geq \frac{\sup\limits_{\vec{q}\in E_{\vec{t}}} \left\| \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u}\, \right\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{t})} \quad \textit{для всех} \quad \vec{t} \in \mathbb{R}_+^d,$$

где $E_{\vec{t}} = \left\{ \vec{q} = (\frac{t_1}{n_1}, ..., \frac{t_d}{n_d}) : \ \vec{n} \in \mathbb{N}^d, \ \vec{n} \geq \vec{t} \right\} \subset (0, 1]^d$.

1.2. Наличие максимальной скорости сходимости эргодических средних эквивалентно условию

$$\sup_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d}\left\|\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}\omega)\right\|_p < \infty \ \text{ для дискретного времени,}$$

$$\sup_{\vec{t}\in\mathbb{R}_+^d}\left\|\int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1}\cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u}\right\|_p < \infty \ \text{ для непрерывного времени.}$$

Для случая одного сохраняющего меру преобразования хорошо известно, что последнее неравенство имеет место только для L_p-кограниц (или когомологичных нулю функций из L_p), т.е. $f \in (I-T)L_p(\Omega,\mu)$. Замечательное изложение истории вопроса можно найти во введении работы Коэна и Лина [4]. В общем случае из работы Бредли [5] следует, что f является d-кратной L_p-кограницей для всех d сохраняющих меру преобразований, т.е.

$$f \in (I-T_1)\cdots(I-T_d)L_p(\Omega,\mu).$$

Коэном и Лином был получен [4] спектральный критерий для двукратных L_2-кограниц в случае двух коммутирующих преобразований. Мы приводим это утверждение в общем случае $d \geq 1$. Отметим, что для одного сохраняющего меру преобразования спектральный критерий принадлежит Робинсону [6]. В недавней заметке [7] был получен аналогичный критерий для равномерной сходимости на подпространствах.

Теорема 1. *Пусть $T_1, ..., T_d$ — попарно коммутирующие автоморфизмы вероятностного пространства (Ω,μ). Тогда для $f \in L_2(\Omega,\mu)$ следующие условия эквивалентны:*

$$f \in (I-T_1)\cdots(I-T_d)L_2(\Omega,\mu); \tag{1}$$

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1,\ldots,x_d)}{\sin^2\frac{x_1}{2}\cdots\sin^2\frac{x_d}{2}} < \infty; \tag{2}$$

$$\left\|\frac{1}{n^d}\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}\omega)\right\|_2 = O\left(\frac{1}{n^d}\right) \quad \textit{при} \ \ n\to\infty; \tag{3}$$

$$\left\|\frac{1}{\pi(\vec{n})}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}\omega)\right\|_2 = O\left(\frac{1}{\pi(\vec{n})}\right) \quad \textit{при} \ n_1,...,n_d\to\infty. \tag{4}$$

Здесь $\sigma_f(x_1,...,x_d)$ есть спектральная мера, построенная по функции f и автоморфизмам $T_1,...,T_d$ (см., например, [8, 9]).

Для непрерывного времени справедлив аналогичный результат. Чтобы его сформулировать, определим аналог L_p-кограниц. Пусть R_j — генератор группы $\{T_j^t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $j = 1, ..., d$, т.е. в сильной операторной топологии $R_j = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(I - T_j^t)$. Нетрудно проверить, что на $\operatorname{Dom} R = \cap_{j=1}^d \operatorname{Dom} R_j$ генераторы коммутируют между собой, поэтому на этой области определения корректно определен оператор $R = R_1 \cdots R_d$. Будем говорить, что f есть d-кратная L_p-кограница, если она лежит в образе оператора R, т.е. найдется функция $g \in L_p(\Omega, \mu)$ такая, что $f = Rg$.

Теорема 2. *Пусть* $T_1^{t_1}, ..., T_d^{t_d}$ *— попарно коммутирующие потоки вероятностного пространства* (Ω, μ)*. Тогда для* $f \in L_2(\Omega, \mu)$ *следующие условия эквивалентны:*

$$f \in \operatorname{im} R; \tag{1'}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \dots, x_d)}{x_1^2 \cdots x_d^2} < \infty; \tag{2'}$$

$$\left\| \frac{1}{t^d} \int_{[0,t]^d} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{t^d}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty; \tag{3'}$$

$$\left\| \frac{1}{\pi(\vec{t})} \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{\pi(\vec{t})}\right) \quad \text{при } t_1, ..., t_d \to \infty. \tag{4'}$$

Отметим, что в случае $d = 1$ эквивалентность $(1')$ и $(4')$ доказана в [10] (см. также [11]), а эквивалентность $(2')$ и $(3')$ рассмотрена в [12].

Задача перенесения известных результатов о скоростях сходимости в эргодических теоремах [13] с действия группы $\mathbb{Z}$ на группы $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ (и далее на максимально широкий класс групп) была поставлена первому соавтору этой статьи А.М. Вершиком и А.М. Степиным в середине 1990-х годов; ее решение было начато тогда же в [8] и [14]. Теоремы 1 и 2, в совокупности с результатами статьи [15], завершают решение этой задачи для степенных скоростей сходимости по норме (со всеми возможными показателями степеней) для действий групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$.

2 Доказательство предложения 1

2.1. Рассмотрим отображение $\mathcal{L} : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ такое, что

$$\vec{n} < \mathcal{L}(\vec{n}) \ \text{ для всех } \ \vec{n} \in \mathbb{N}^d, \ \text{ и } \ \mathcal{L}(\vec{n}) \le \mathcal{L}(\vec{m}) \text{ при } \ \vec{n} \le \vec{m}.$$

Будем говорить, что направленность $\{x_{\vec{n}}\}_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d}$ элементов некоторого нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ является $(a, \mathcal{L})$-возвращающейся для некоторого $a > 0$, если для любого $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$ найдется элемент $s(\vec{n}) \in \mathbb{N}^d$ такой, что $\vec{n} \le s(\vec{n}) < \mathcal{L}(\vec{n})$ и $\|x_{s(\vec{n})}\| \ge a$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\{x_{\vec{n}}\}_{\vec{n}\in\mathbb{N}^d}$ *является* $(a, \mathcal{L})$*-возвращающейся направленностью; тогда для всех* $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$

$$\sup_{\vec{m}\geq\vec{n}}\left\|\frac{1}{\pi(\vec{m})}\sum_{0\leq\vec{k}<\vec{m}}x_{\vec{k}}\right\|\geq\frac{a}{2^d\pi(\mathcal{L}(\vec{n}))}.$$

Теорема 3 доказана в [16] для комплекснозначных направленностей. Доказательство общего случая для направленностей со значениями в нормированном пространстве слово в слово повторяет оригинальный случай, поскольку, по-сути, используется лишь неравенство треугольника для нормы.

Из теоремы 3 сразу же следует предложение 1 для группового времени $\mathbb{Z}^d$. Действительно, рассмотрим направленность $x_{\vec{n}}=f(T_1^{n_1}\cdots T_d^{n_d}\omega)$, $f\in L_p(\Omega,\mu)$ и $\mathcal{L}(\vec{n})=\vec{n}+(1,...,1)$. Взяв $a=\|f\|_p$, получим, что направленность является $(a,\mathcal{L})$-возвращающейся: $s(\vec{n})=\vec{n}$ и $\|x_{s(\vec{n})}\|_p=a$. Следовательно, справедливо неравенство из теоремы 3, которое после применения оценки $\pi(\vec{n}+(1,...,1))\leq 2^d\pi(\vec{n})$ становится в точности неравенством из предложения 1.

Теперь рассмотрим непрерывный случай — групповое время $\mathbb{R}^d$, и воспользуемся уже доказанным неравенством для дискретного времени. Зафиксируем $\vec{t}$ и возьмем произвольный вектор $\vec{q}\in E_{\vec{t}}$. Положим

$$g_{\vec{q}}(\omega)=\int_{[0,\vec{q}]}f(T_1^{u_1}\cdots T_d^{u_d}\omega)\,d\vec{u},\quad S_j=T_j^{q_j},\quad j=1,...,d.$$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0,\vec{n}]$ на единичные кубы, т.е.

$$[0,\vec{n}]=\bigcup_{0\leq\vec{k}\leq\vec{n}}P_{\vec{k}},\ P_{\vec{k}}=[0,1]^d+\vec{k},\quad \vec{k}\leq\vec{n}.$$

Покоординатное умножение векторов в $\mathbb{R}^d$ обозначим как

$$\vec{t}\odot\vec{s}=(t_1s_1,...,t_ds_d).$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{0\leq\vec{k}\leq\vec{n}}\int_{P_{\vec{k}}}f(S_1^{u_1}\cdots S_d^{u_d}\omega)\,d\vec{u}=\sum_{0\leq\vec{k}\leq\vec{n}}\int_{[0,1]^d}f(S_1^{u_1+k_1}\cdots S_d^{u_d+k_d}\omega)\,d\vec{u}=$$
$$=\frac{1}{\pi(\vec{q})}\sum_{0\leq\vec{k}\leq\vec{n}}\int_{[0,\vec{q}]}f(T_1^{t_1}S_1^{k_1}\cdots T_d^{t_d}S_d^{k_d}\omega)\,d\vec{t}=\frac{\pi(\vec{n})}{\pi(\vec{q})}A_{n_1}^{S_1}\cdots A_{n_d}^{S_d}g_{\vec{q}}(\omega).$$

Отсюда, учитывая, что $\vec{t}=\vec{n_0}\odot\vec{q}$ для некоторого $\vec{n_0}\geq\vec{t}$, получаем

$$\sup_{\vec{s}\geq\vec{t}} \|\mathcal{A}_{\vec{s}} f\|_p \geq \sup_{\vec{s}\geq\vec{t}, \vec{s}=\vec{n}\odot\vec{q}, \vec{n}\in\mathbb{N}^d} \|\mathcal{A}_{\vec{s}} f\|_p =$$

$$= \sup_{\vec{n}\geq\vec{n_0}} \frac{1}{\pi(\vec{n}\odot\vec{q})} \left\| \int_{[0,\vec{n}\odot\vec{q}]} f(T_1^{u_1}\cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} \right\|_p =$$

$$= \sup_{\vec{n}\geq\vec{n_0}} \frac{1}{\pi(\vec{n})} \left\| \int_{[0,\vec{n}]} f(T_1^{q_1u_1}\cdots T_d^{q_du_d}\omega)\, d\vec{u} \right\|_p =$$

$$= \sup_{\vec{n}\geq\vec{n_0}} \frac{1}{\pi(\vec{n})} \left\| \sum_{0\leq\vec{k}\leq\vec{n}} \int_{P_{\vec{k}}} f(S_1^{u_1}\cdots S_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} \right\|_p =$$

$$= \sup_{\vec{n}\geq\vec{n_0}} \frac{1}{\pi(\vec{q})} \left\| A_{n_1}^{S_1}\cdots A_{n_d}^{S_d} g_{\vec{q}}(\omega) \right\|_p \geq \frac{\|g_{\vec{q}}\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{q})\pi(\vec{n_0})} = \frac{\|g_{\vec{q}}\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{t})}.$$

Поскольку $\vec{q} \in E_{\vec{t}}$ был произвольным, можно взять супремум по всем таким векторам. Предложение 1 полностью доказано.

Замечание. В.В. Рыжиков предложил следующее рассуждение, для обоснования неравенства для дискретного случая в предложении 1. Справедливо утверждение: для любого $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$ найдется $\vec{n'} \geq \vec{n}$, такой что $\|\vec{n} - \vec{n'}\|_\infty \leq 1$ и

$$\left\| \sum_{k_1=0}^{n_1'-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d'-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}\omega) \right\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^d}.$$

Это неравенство усиливает неравенство Седалищева для одномерного случая. Доказательство проводится индукцией. Покажем лишь базу для $d = 1$. Из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} f(T^k\omega) - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = f(T^n\omega)$$

следует, что нормы обеих сумм в правой части не могут быть одновременно меньше $\|f\|_p/2$.

Теперь, имея усиленное неравенство Седалищева, получаем

$$\sup_{\vec{m}\geq\vec{n}} \|A_{\vec{m}} f\|_p \geq \sup_{\|\vec{n'}-\vec{n}\|_\infty\leq 1} \|A_{\vec{n'}} f\|_p \geq \frac{\|f\|_p}{2^d\pi(\vec{n'})} \geq \frac{\|f\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{n})}.$$

2.2. Покажем, как из предложения 1 следует утверждение о максимальной скорости сходимости эргодических средних.

Пусть $\|A_{\vec{n}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{n_1\cdots n_d}\right)$ при $n_1, ..., n_d \to +\infty$. Тогда

$$\frac{\|f - f^*\|_p}{2^{2d}\pi(\vec{n})} \leq \sup_{\vec{m}\geq\vec{n}} \|A_{\vec{m}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{\pi(\vec{n})}\right),$$

откуда $\|f - f^*\|_p = o(1)$, т.е. $f(\omega) = f^*(\omega)$ п.в.

Для непрерывного времени также предположим, что $\|\mathcal{A}_{\vec{t}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{t_1 \cdots t_d}\right)$ при $t_1, ..., t_d \to +\infty$. Тогда

$$\frac{\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}}} \| \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} - \pi(\vec{q}) f^* \|_p}{2^{2d}\pi(\vec{t})} \leq \sup_{\vec{s} \geq \vec{t}} \|\mathcal{A}_{\vec{s}}(f - f^*)\|_p = o\left(\frac{1}{\pi(\vec{t})}\right),$$

откуда $\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t}}} \| \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} - \pi(\vec{q}) f^* \|_p = o(1)$ при $t_1, ..., t_d \to +\infty$.

Пусть $\vec{t} = n\vec{t_0}$, $n \to \infty$, а вектор $\vec{t_0}$ фиксирован. Поскольку $E_{\vec{t_0}} \subset E_{n\vec{t_0}} \subset (0,1]^d$, то $\sup_{\vec{q} \in E_{\vec{t_0}}} \| \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} - \pi(\vec{q}) f^* \|_p = o(1)$ при $n \to \infty$, и, следовательно, для любого $\vec{q} \in E_{\vec{t_0}}$

$$\left\| \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} - \pi(\vec{q}) f^* \right\|_p = 0.$$

Тогда из локальной эргодической теоремы [17, §7.2] получим справедливое п.в. равенство

$$f^*(\omega) = \lim_{E_{\vec{t_0}} \ni \vec{q} \to 0} \frac{1}{\pi(\vec{q})} \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} = f(\omega).$$

3 Доказательство теоремы 1

3.1. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу, интересную саму по себе и полезную для доказательства спектрального критерия максимальной возможной скорости сходимости. Определим функции

$$\mathcal{J}_d(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k s/2)\, ds, \ x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathcal{K}_d(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{k=1}^d \sin^2(x_k n/2), \ x \in (-\pi, \pi]^d.$$

Наша цель — определить множество нулей этих функций и показать дискретность множества значений.

Для вычисления пределов воспользуемся следующей конструкцией. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^d$ пучок $\mathcal{L}(a)$ всех гиперплоскостей, задаваемых равенствами $x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_d\varepsilon_d = a$, где $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$, и $a \in \mathbb{R}$ фиксировано. Ясно, что $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(-a)$ для каждого $a \in \mathbb{R}$. Индексом гиперповерхности L из пучка $\mathcal{L}(a)$ назовем количество всех ненулевых коэффициентов в задающем ее уравнении, т.е. величину $\mathrm{ind} L = \sum_{k=1}^d |\varepsilon_k| = \|\varepsilon\|_1$. В случае $a = 0$ гиперплоскости из пучка $\mathcal{L}(0)$, задаваемые векторами ε и $-\varepsilon$, условимся считать разными. С такими конструкциями связано много различных комбинаторных задач; см., например, [18]. Положим также

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}(0) \cup \mathcal{L}(2\pi) \cup \cdots \cup \mathcal{L}\left(2\pi \lfloor d/2 \rfloor\right).$$

Предложение 2. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{J}_d(x) = \frac{1}{2^d}\left(1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}(0)\\ \mathrm{ind}L=k}} I_{\{x\in L\}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathcal{K}_d(x) = \frac{1}{2^d}\left(1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}_d\\ \mathrm{ind}L=k}} I_{\{x\in L\}}\right), \quad x \in (-\pi,\pi]^d.$$

Доказательство. Докажем оба равенства одновременно. Пусть ν есть мера Лебега на $\mathbb{R}$ или считающая мера на $\mathbb{Z}$. Тогда оба предела в определениях функций $\mathcal{J}_d$ и $\mathcal{K}_d$ записываются одинаково. Имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{(0,T]} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, d\nu(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2^d T} \int\limits_{(0,T]} \prod_{k=1}^{d} (1-\cos(x_k s))\, d\nu(s).$$

Используя формулу для произведения косинусов, перепишем произведение

$$\prod_{k=1}^{d} 1-\cos(x_k s) = 1 - \sum_{k=1}^{d}\cos(x_k s) + \sum_{1\le i<j\le d}\cos(x_i s)\cos(x_j s) + ...$$

$$+(-1)^k \sum_{1\le i_1<...<i_k\le d} \cos(x_{i_1}s)\cdots\cos(x_{i_k}s) + ... + (-1)^d\cos(x_1 s)\cdots\cos(x_d s) =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{d}\cos(x_k s) + \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i<j\le d}\cos((x_i+x_j)s) + \cos((x_i-x_j)s)\right) + ...$$

$$+\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\left(\sum_{1\le i_1<...<i_k\le d}\cos((x_{i_1}+x_{i_2}+...+x_{i_k})s) + ... + \cos((x_{i_1}-x_{i_2}-...-x_{i_k})s)\right)$$

$$+ ... + \frac{(-1)^d}{2^{d-1}}\left(\cos((x_1+x_2+...+x_d)s) + ... + \cos((x_1-x_2-...-x_d)s)\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{d}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\frac{1}{2}\sum_{\|\varepsilon\|_1=k}\cos((x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_d\varepsilon_d)s).$$

Суммирование $\sum_{\|\varepsilon\|_1=k}$ — это суммирование по всем векторам $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_d)$, $\varepsilon_k \in \{-1,0,1\}$ с нормой $\|\varepsilon\|_1 = k$. Поскольку вектора ε и $-\varepsilon$ дают одинаковый вклад, то у каждой суммы появился дополнительный множитель $\frac{1}{2}$. Остается вычислить пределы вида $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{(0,T]}\cos(ys)\,d\nu(s)$, где $y = \sum_{k=1}^{d} x_k\varepsilon_k$.

Если ν есть мера Лебега, то предел равен $I_{\{y=0\}}$. Проверим, что для считающей меры на $\mathbb{Z}$ будет похожий результат. Используя известные формулы для суммы косинусов, получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \cos(ny) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\cos(Ny/2)\sin((N+1)y/2)}{\sin(y/2)} - 1 \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{\{y=2\pi k\}}.$$

Последняя сумма на самом деле конечна и равна $\sum\limits_{k=-\lfloor d/2 \rfloor}^{\lfloor d/2 \rfloor} I_{\{y=2\pi k\}}$, поскольку при $x \in (-\pi, \pi]^d$ точка $y \in (-d\pi, d\pi]$. Собирая все вычисления вместе, получаем требуемые равенства. □

Из предложения 2 сразу же следует, что функции $\mathcal{J}_d$ и $\mathcal{K}_d$ принимают конечное число значений. Кроме того, для всех $x \in (-\pi, \pi]^d$ таких, что $x \notin \mathcal{L}_d \setminus \mathcal{L}(0)$, будет равенство $\mathcal{J}_d(x) = \mathcal{K}_d(x)$; в частности, для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}\right]^d$.

Определим нули функции $\mathcal{J}_d$ и оценим ее минимальное положительное значение.

Предложение 3. *Для функции $\mathcal{J}_d$ справедливы утверждения:*

(i) $\mathcal{J}_d(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod\limits_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, ds$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

(ii) $\mathcal{J}_d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\prod\limits_{k=1}^{d} x_k = 0$. При этом для минимального значения $j_d := \min\limits_{\prod_{k=1}^{d} x_k \neq 0} \mathcal{J}_d(x)$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2(2d+1)d^{(d-1)(2d+1)}} \le j_d \le \frac{1}{2^d}.$$

Доказательство. Учитывая, что при $x \in \mathbb{Z}^d$ квадраты синусов, участвующие в произведении, будут 2π-периодическими, получим

$$\mathcal{J}_d(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, ds = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, ds =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, ds =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k (t + 2\pi n)/2)\, dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k t/2)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k t/2)\, dt.$$

Функция $\mathcal{J}_d$ является однородной функцией нулевого порядка, т.е. для всякого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ верно равенство $\mathcal{J}_d(\alpha x) = \mathcal{J}_d(x)$. Если точка $x \in \mathbb{R}^d$

не лежит ни в одной гиперплоскости пучка $\mathcal{L}(0)$, то $\mathcal{J}_d(x) = 2^{-d}$. Одинаковые значения $\mathcal{J}_d$ принимает на линейных подпространствах, являющихся пересечениями гиперплоскостей пучка $\mathcal{L}(0)$. Поскольку любое такое пересечение содержит целочисленные точки, то значения функции $\mathcal{J}_d$ полностью определяются ее значениями на $\mathbb{Z}^d$. Более того, можно утверждать, что достаточно брать целочисленные точки из некоторого куба. Чтобы найти границу этого куба, воспользуемся следующим утверждением из теории диофантовых уравнений (см. [19, теорема 6.1], [20, глава 1, §2.2], а также [21]). Пусть $m < d$, $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ и $A_i = \sum\limits_{j=1}^{d} |a_{i,j}|$, $i = 1, ..., m$; тогда система линейных однородных уравнений

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,d}x_d = 0, \quad i = 1, ..., m$$

имеет нетривиальное целочисленное решение, удовлетворяющее условию

$$\max_{1 \le k \le d} |x_k| \le \sqrt[d-m]{A_1 \cdots A_m}.$$

В нашем случае все $A_i \le d$, и граница куба оценивается как $\max\limits_{1 \le k \le d} |x_k| \le d^{d-1}$.

Из (i) и того факта, что $\mathcal{J}_d$ полностью определяется значениями на $\mathbb{Z}^d$, сразу видно, что $\mathcal{J}_d$ зануляется только, если одна из координат $x_k = 0$. Найдем теперь нижнюю оценку для j_d; верхняя оценка очевидна. Воспользуемся представлением (i), где для точки $x \in \mathbb{Z}^d, x_k \neq 0$ будем считать, что $D = \max\limits_{1 \le k \le d} |x_k| \le d^{d-1}$. Имеем

$$\mathcal{J}_d(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s/2)\, ds =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s)\, ds \ge \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2D} \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k s)\, ds.$$

При $s \in \left[0, \frac{\pi}{2D}\right]$ будет $x_k s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и, следовательно, $\sin^2(x_k s) \ge (\frac{2}{\pi} x_k s)^2$. Таким образом,

$$\mathcal{J}_d(x) \ge \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2D} \prod_{k=1}^{d} \frac{4x_k^2 s^2}{\pi^2}\, ds = \frac{4^d x_1^2 \cdots x_d^2}{\pi^{2d+1}} \int_0^{\pi/2D} s^{2d}\, ds =$$
$$= \frac{4^d x_1^2 \cdots x_d^2}{\pi^{2d+1}} \frac{\pi^{2d+1}}{(2d+1)(2D)^{2d+1}} = \frac{x_1^2 \cdots x_d^2}{2(2d+1)D^{2d+1}} \ge \frac{1}{2(2d+1)d^{(d-1)(2d+1)}}.$$

$\square$

Предложение 4. $\mathcal{K}_d(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\prod\limits_{k=1}^{d} x_k = 0$.

Доказательство. Как видно из определения функции $\mathcal{K}_d$, если хотя бы одна координата точки $x \in (-\pi, \pi]^d$ равна нулю, то функция зануляется. Покажем, что других нулей нет. Предположим, что найдется точка

$x \in (-\pi, \pi]^d$, такая, что $\prod_{k=1}^{d} x_k \neq 0$, и при этом $\mathcal{K}_d(x) = 0$. Противоречие получим, используя теорию плотности для подмножеств множества натуральных чисел. А переход к этой теории осуществим с помощью леммы Купмана—фон Неймана (см., например, [22, лемма 2.41]): для ограниченной последовательности неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n\geq 1}$ справедлива эквивалентность

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty,\ n \notin J,$$

где множество J имеет нулевую асимптотическую плотность.

Напомним (см., например, [23]), что для некоторого множества $J = \{j_1, j_2, ...\}$ натуральных чисел асимптотической плотностью $d(J)$ называется предел (если он существует)

$$d(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k : j_k \leq n\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{j_n}.$$

Возьмем $a_n = \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k n/2)$. Поскольку

$$0 = \mathcal{K}_d(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

то существует множество $J \subset \mathbb{N}$ единичной асимптотической плотности, вдоль которого $a_n \to 0$ (так как дополнение к множеству нулевой плотности имеет единичную плотность). Покажем, что такого не может быть. Для этого выясним, вдоль каких возрастающих последовательностей m_n натуральных чисел будет $\sin(ym_n) \to 0$ при $m_n \to \infty$ для $y \in (-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$.

Если $y = \pi\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, то с некоторого номера будет $m_n = bM_n,\ M_n \in \mathbb{N}$. Максимально плотным множеством будет арифметическая прогрессия $m_n = bn,\ n \in \mathbb{N}$; ее асимптотическая плотность есть $\frac{1}{b}$.

Если $y = \pi\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то асимптотическая плотность $\{m_n\}_{n\geq 1}$ будет нулевой. Действительно, покажем сначала, что $m_{n+1} - m_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Пусть это не так; тогда найдется натуральное число c такое, что для бесконечного количества номеров будет $m_{n+1} - m_n = c$. Для таких номеров получим

$$0 = \lim_n \sin(ym_{n+1}) = \lim_n \sin(ym_n + yc) =$$
$$= \lim_n \sin(ym_n)\cos(yc) + \lim_n \cos(ym_n)\sin(yc) = \pm\sin(yc) = \pm\sin(\pi c\alpha).$$

Знак $\pm$ зависит от того, куда сходится $\cos(ym_n)$, к 1 или -1. Откуда заключаем, что $c = 0$, чего не может быть. Используя теорему Штольца для вычисления пределов последовательностей, получим

$$d(\{m_n\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{m_{n+1} - m_n} = 0.$$

Вернемся к последовательности $a_n = \prod_{k=1}^{d} \sin^2(x_k n/2)$. Множество J, вдоль которого она стремится к нулю, есть объединение множеств J_k, вдоль каждого из которых $\sin(x_k n/2)$ стремится к нулю. Среди J_k либо множества плотности ноль, либо арифметические прогрессии вида $\{b_k n\}_{n\geq 1}, b_k \in \mathbb{N}$. Конечное объединение множеств с нулевой асимптотической плотностью будет множество с нулевой плотностью. А конечное объединение рассмотренных арифметических прогрессий не может иметь плотность 1, поскольку в дополнении к нему всегда найдется другая арифметическая прогрессия. Действительно, пусть натуральное число d взаимно просто с каждым из $b_k, k = 1, ..., \ell$. Тогда арифметическая прогрессия $\{d + b_1 \cdots b_\ell n\}_{n\geq 1}$ не имеет общих членов ни с одной из прогрессий $\{b_k n\}_{n\geq 1}$. Поскольку в противном случае диофантово уравнение

$$d + b_1 \cdots b_\ell n = b_k m$$

имело бы решение $n, m \in \mathbb{N}$, чего не может быть.

Таким образом, асимптотическая плотность множества J не может быть равной 1. □

3.2. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Напомним, что эквивалентность (1) и (4) следует из [5]. Для остальных пунктов мы докажем следующую цепочку: (4) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (4).

Из (4) легко можно получить (3), поставив $n_1 = \cdots = n_d = n$.

Покажем переход (3)⇒ (2). Пусть для некоторой константы $B > 0$ при всех натуральных n будет $\|A_n f\|_2^2 \leq B n^{-2d}$. С учетом представления для L_2-нормы эргодических средних (см. [8, 9]) перепишем эту оценку в виде

$$B \geq \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{n x_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d).$$

Суммируя это неравенство по n от 1 до N, получаем

$$B \geq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{(\pi,\pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{n x_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d).$$

Лемма Фату при переходе к нижнему пределу при $N \to +\infty$ дает следующее неравенство:

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{n x_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d) \geq$$

$$\geq \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{n x_i}{2}}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d).$$

Вспоминая определение функции $\mathcal{K}_d(x)$, получаем близкую к требуемой оценку

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\mathcal{K}_d(x)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1,\dots,x_d) \le B.$$

Из условия (3), применяя оператор $\mathbb{E}_j$ условного математического ожидания относительно σ-алгебры T_j-инвариантных множеств, получаем с одной стороны

$$\left\|\mathbb{E}_j\left(\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}x)\right)\right\|_2 \le \left\|\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}x)\right\|_2 = \mathcal{O}(1),$$

а с другой, так как $\mathbb{E}_jT_j = \mathbb{E}_j$,

$$\left\|\mathbb{E}_j\left(\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} f(T_1^{k_1}\cdots T_d^{k_d}x)\right)\right\|_2 = n\left\|\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} \mathbb{E}_jf(T_1^{k_1}\cdots \widehat{T_j^{k_j}}\cdots T_d^{k_d}x)\right\|_2.$$

Соединяя вместе, находим, что для эргодических средних, порожденных $d-1$ автоморфизмами (всеми, кроме T_j), справедлива оценка

$$\|A_n^{T_1}\cdots A_n^{T_d}\mathbb{E}_jf\|_2 = o\left(\frac{1}{n^{d-1}}\right).$$

Учитывая предложение 1, заключаем, что $\mathbb{E}_jf = 0$ для каждого $j = 1,...,d$. Отсюда выводим [9, следствие 1], что спектральная мера $\sigma_f(\mathbb{O}) = 0$ для

$$\mathbb{O} = \left\{x \in (-\pi,\pi]^d :\ \prod_{i=1}^d x_i = 0\right\}.$$

По предложению 4 на $\mathbb{O}$ также зануляется функция $\mathcal{K}_d(x)$, поэтому

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\mathcal{K}_d(x)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1,\dots,x_d) \ge \min_{x\notin\mathbb{O}} \mathcal{K}_d(x) \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1,\dots,x_d)}{\prod_{i=1}^d \sin^2 \frac{x_i}{2}}.$$

Откуда, полагая $\kappa_d = \min\limits_{x\notin\mathbb{O}} \mathcal{K}_d(x)$ и зная, что $\kappa_d > 0$, получаем

$$\int\limits_{(\pi,\pi]^d} \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sin^2 \frac{x_i}{2}}\, d\sigma_f(x_1,\dots,x_d) \le \frac{B}{\kappa_d} < \infty.$$

Покажем теперь импликацию (2)⇒(4). Если

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1,\dots,x_d)}{\sin^2 \frac{x_1}{2}\cdots\sin^2 \frac{x_d}{2}} = A < \infty,$$

то при всех $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$

$$\|A_{\vec{n}} f\|_2^2 = \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2} \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{\sin^2 \frac{n_1 x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{n_d x_d}{2}}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} \, d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2} \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \frac{d\sigma_f(x_1, \ldots, x_d)}{\sin^2 \frac{x_1}{2} \cdots \sin^2 \frac{x_d}{2}} \leq A \frac{1}{n_1^2 \cdots n_d^2}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

4 Доказательство теоремы 2

Эквивалентность условий ($2'$), ($3'$) и ($4'$) доказывается слово в слово, как в теореме 1 доказывается эквивалентность условий (2), (3) и (4). Отличием является использование функции $\mathcal{J}_d$ (вместо функции $\mathcal{K}_d$), нули которой образуют множество $\mathbb{O}' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \prod_{i=1}^d x_i = 0 \right\}$. Докажем эквивалентность ($1'$) и ($4'$).

Предложение 5. *Пусть $T^{t_1}, ..., T^{t_d}$ — попарно коммутирующие потоки пространства с вероятностной мерой (Ω, μ). Для $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $p \in [1, +\infty)$ справедлива эквивалентность*

$$f \in \operatorname{im} R \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}_+^d} \left\| \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) \, d\vec{u} \, \right\|_p < \infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать импликацию $\Leftarrow$. Сведем задачу к уже известному критерию для дискретного времени. Пусть

$$\sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}_+^d} \left\| \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) \, d\vec{u} \, \right\|_p = C < \infty.$$

Зафиксируем произвольный вектор $\vec{q} \in \mathbb{R}_+^d$, и положим, как и в доказательстве теоремы 1,

$$g_{\vec{q}}(\omega) = \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{t_1} T_2^{t_2} \cdots T_d^{t_d} \omega) \, d\vec{t}, \quad S_j = T_j^{q_j}, \quad j = 1, ..., d.$$

Тогда, используя выкладки из доказательства теоремы 1, получим оценку

$$\sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}^d} \left\| \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) \, d\vec{u} \right\|_p \geq \sup_{\vec{t} = \vec{n} \odot \vec{q}, \ \vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \int_{[0,\vec{t}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) \, d\vec{u} \right\|_p =$$

$$= \sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \int_{[0,\vec{n} \odot \vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega) \, d\vec{u} \right\|_p = \sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \sum_{0 \leq \vec{k} \leq \vec{n}} g_{\vec{q}}(S_1^{k_1} \cdots S_d^{k_d} \omega) \right\|_p.$$

Таким образом, для коммутирующих автоморфизмов $S_j, j = 1, ..., d$ и функции $g_{\vec{q}}$ получили

$$\sup_{\vec{n} \in \mathbb{N}^d} \left\| \sum_{0 \le \vec{k} \le \vec{n}} g_{\vec{q}}(S_1^{k_1} \cdots S_d^{k_d} \omega) \right\|_p \le C < \infty.$$

Из работы Бредли [5] следует, что найдется функция $h_{\vec{q}} \in L_p(\Omega, \mu)$ такая, что $\|h_{\vec{q}}\|_p \le C$ и $g_{\vec{q}} = \prod_{j=1}^d (I - S_j) h_{\vec{q}}$, т.е.

$$\int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u} = \prod_{i=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{q}}, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Запишем это равенство для вектора $\vec{q}/\vec{k} := \left(\frac{q_1}{k_1}, ..., \frac{q_d}{k_d}\right)$, $\vec{k} \in \mathbb{N}^d$:

$$\int_{[0,\vec{q}/\vec{k}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{\frac{q_j}{k_j}}) h_{\vec{q}/\vec{k}}.$$

Действуя на это равенство слева оператором

$$\prod_{j=1}^d \left(I + T_j^{\frac{q_j}{k_j}} + T_j^{2\frac{q_j}{k_j}} ... + T_j^{(k_j-1)\frac{q_j}{k_j}} \right) = \sum_{0 \le \vec{n} \le \vec{k}} T_1^{n_1 \frac{q_1}{k_1}} \cdots T_d^{n_d \frac{q_d}{k_d}},$$

получим равенство

$$\int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d} \omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{q}/\vec{k}}.$$

Будем теперь считать, что вектор $\vec{q}$ имеет двоично-рациональные координаты. Тогда найдется натуральное число $m_0 = m_0(\vec{q})$ такое, что для любого $m \ge m_0$ можно выбрать вектор $\vec{k} = \vec{k}(m)$, для которого

$$\vec{q}/\vec{k} = (2^{-m}, 2^{-m}, ..., 2^{-m}) := \vec{v}_m.$$

Действительно, пусть $\vec{q} = \left(\frac{a_1}{2^{b_1}}, ..., \frac{a_d}{2^{b_d}}\right)$, $a_j, b_j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$m_0 = b_1 b_2 \cdots b_d, \quad \vec{k} = (a_1 2^{m-b_1}, a_2 2^{m-b_2}, ..., a_d 2^{m-b_d}).$$

Поскольку последовательность функций $h_{\vec{v}_m}$ ограничена, то из рефлексивности пространства $L_p(\Omega, \mu)$ для $p \in (1, \infty)$ следует, что найдется функция $h \in L_p(\Omega, \mu)$, являющаяся слабым пределом некоторой подпоследовательности $h_{\vec{v}_{m_n}}$. Тогда

$$\prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h_{\vec{v}_{m_n}} \xrightarrow{\omega} \prod_{j=1}^d (I - T_j^{q_j}) h.$$

Но при $m_n \geq m_0(\vec{q})$ имеется равенство

$$\prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})h_{\vec{v}_{m_0}} = \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})h_{\vec{v}_{m_n}}.$$

Откуда заключаем, что для любого вектора $\vec{q}$ с двоично-рациональными координатами

$$\int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})h.$$

В случае пространства $L_1(\Omega, \mu)$ воспользуемся теоремой Комлоша (см., например, [24, теорема 10.10.22]), которая утверждает следующее. Для ограниченной в $L_1(\Omega, \mu)$ последовательности функций $h_{\vec{v}_m}$ найдется подпоследовательность $h_{\vec{v}_{m_n}}$ и функция $h \in L_1(\Omega, \mu)$ такие, что имеется сходимость п.в. чезаровских средних любой её подпоследовательности $h_{\vec{v}_{m_{n_k}}}$:

$$\tilde{h}_k := \frac{h_{\vec{v}_{m_{n_1}}} + h_{\vec{v}_{m_{n_2}}} + \ldots + h_{\vec{v}_{m_{n_k}}}}{k} \to h \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда п.в. $\prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})\tilde{h}_k \to \prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})h$ при $k \to \infty$. Можно считать, что $m_{n_1} \geq m_0(\vec{q})$. Тогда левая часть последнего предельного соотношения равна $\int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u}$. Откуда снова заключаем, что для любого вектора $\vec{q}$ с двоично-рациональными координатами

$$\int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^{d}(I - T_j^{q_j})h.$$

Таким образом, получившееся равенство справедливо для всех $p \in [1, +\infty)$. Поскольку двоично-рациональные числа плотны в $\mathbb{R}$, и обе части последнего равенства L_p-непрерывны, то оно будет верно для всех $\vec{q} \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда

$$\frac{1}{\pi(\vec{q})} \int_{[0,\vec{q}]} f(T_1^{u_1} \cdots T_d^{u_d}\omega)\, d\vec{u} = \prod_{j=1}^{d} \frac{I - T_j^{q_j}}{q_j} h.$$

Переходя к пределу в L_p при $q_1, \ldots, q_d \to 0$, учитывая локальную эргодическую теорему, получим $f = Rh$. Что и требовалось доказать. □

References

[1] P. Butzer, U. Westphal, *The mean ergodic theorem and saturation*, Indiana Univ. Math. J., **20**:12 (1971), 1163—1174.

[2] V.F. Gaposhkin, Convergence of series connected with stationary sequences, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **9**:6 (1975), 1297–1321.

[3] V.V. Sedalishchev, *Interrelation between the convergence rates in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems*, Siberian Math. J., **55**:2 (2014), 336–348.

[4] G. Cohen, M. Lin, *Double coboundaries for commuting contractions*, Pure Appl. Funct. Anal.,**2**:1 (2017), 11–36.

[5] R.S. Bradley, *An L^p 'Cousin of coboundary' theorem for random fields*, J. Aust. Math. Soc., **85** (2008), 51–58.

[6] F.A. Robinson *Sums of stationary random variables*, Proc. Amer. Math. Soc., **11**:1 (1960), 77–79.

[7] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, A.J. Khakimbaev, *Uniform convergence on subspaces in von Neumann ergodic theorem with discrete time*, Mathematical Notes, **113**:5 (2023), 680–693.

[8] A.G. Kachurovskii, *Convergence of averages in the ergodic theorem for groups Z^d*, J. Math. Sci. (New York), **107**:5 (2001), 4231–4236.

[9] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, V.E. Todikov, A.J. Khakimbaev, *A spectral criterion for power-law convergence rate in the ergodic theorem for Z^d and R^d actions*, Siberian Math. J., **65**:1 (2024), 76–95.

[10] U. Krengel, M. Lin, *On the range of the generator of a Markovian semigroup*, Math. Zeit., **185** (1984), 553–565.

[11] V.P. Fonf, M. Lin, P. Wojtaszczyk, *Poisson's equation and characterizations of reflexity of Banach spaces*, Colloquium Math., **124**:2 (2011), 225–235.

[12] A.G. Kachurovskii, I.V. Podvigin, V.E. Todikov, *Uniform convergence on subspaces in von Neumann's ergodic theorem with continuous time*, Siberian Electronic Math. Reports, **20**:1 (2023), 183–206.

[13] A. G. Kachurovskii, *The rate of convergence in ergodic theorems*, Russian Math. Surveys, **51**:4 (1996), 653–703.

[14] A.M. Vershik, A.G. Kachurovskii, *Rates of convergence in ergodic theorems for locally finite groups and reversed martingales*, Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia, **1** (1999), 19–26. (Russian)

[15] I.V. Podvigin, *A criterion for the power-law rate of convergence of ergodic means for unitary actions of $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{R}^d$*, Algebra i Analiz, **36**:4 (2024), 148–164. (Russian)

[16] I.V. Podvigin, *Lower bound of the supremum of ergodic averages for $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{R}^d$-actions*, Siberian Electronic Math. Reports, **17** (2020), 626–636.

[17] U. Krengel, *Ergodic theorems* (De Gruyter Studies in Mathematics, V.6), Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.

[18] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplane*, Memoirs of AMS, **1**:154 (1975), AMS, Providence RI.

[19] N.I. Fel'dman, *Sed'maya problema Gil'berta*, Izd-vo MGU, Moscow, 1982. (Russian)

[20] Yu. I. Manin, A.A. Panchishkin, *Introduction to number theory*, Number theory – 1, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **49** (1990), 5–341, VINITI, Moscow. (Russian)

[21] P.G. Kontorovich, D.I. Mil'man, *On a method of N.I. Lobachevskii for finding integer solutions of linear homogeneous equations with integer coefficients*, Uspekhi Mat. Nauk, **8**:1(53) (1953), 145–149. (Russian)

[22] M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, (Graduate Texts in Mathematics V. 259), London, Springer, 2011.

[23] I. Niven, *The asymptotic density of sequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **57**:6 (1951), 420–434.

[24] V.I. Bogachev, *Osnovy teorii mery*, Tom 2, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Moscow–Izhevsk, 2003. (Russian)

Alexander Grigorievich Kachurovskii
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: agk@math.nsc.ru

Ivan Viktorovich Podvigin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ipodvigin@math.nsc.ru

Aziz Jamalutdin uli Khakimbaev
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: a.khakimbaev@g.nsu.ru