Отзыв рецензента

на статью Д.В. Аксенова и Н.А. Даурцевой

“**Minimal leaves and natural almost hyper-hermitian structure**

Не вызывает сомнения, что родным языком авторов статьи, а также большинства членов редколлегии журнала Сибирские электронные математические известия, является русский язык, поэтому считаю правильным представить свой отзыв рецензента на русском языке, несмотря на то, что обсуждаемая работа написана на английском.

Представленная работа является полезным упражнением, продолжающим деятельность Э. Свенссон, М. Свенссона, С. Гундмундссона (и их соавторов) из серии работ, посвященным левоинвариантным эрмитовым структурам на группах Ли. Общий принцип подобных исследований: левоинвариантная геометрия на односвязной группе Ли G сводится к некоторой алгебраической задаче, которая формулируется в терминах касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Постановка, которая обсуждается в данной статье, сводится к изучению пар вещественных алгебр Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — 4-х мерная алгебра Ли, а $\mathfrak{k}$ — ее двумерная подалгебра. Дополнительные структуры — риманова метрика g на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и три антикоммутирующие между собой почти комплексные (на самом деле достаточно изучать две две из них) структуры I, J, K на $\mathfrak{g}$. Из работы просматриваются следующие согласования дополнительных структур на $\mathfrak{g}$: а) двумерные инвариантные пространства для каждой из структур I, J ортогональны между собой, причем подалгебра $\mathfrak{k}$ – инвариантна относительно I. Фактически авторы решают классификационную задачу для наборов $\{\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}, g, I, J, K = IJ\}$. Как известно, если решается классификационная задача для метрических алгебр Ли, то у вас есть две принципиальных возможности:

1) сначала классифицировать алгебры Ли без учета метрики, с последующей классификацией метрик (матриц Грама) для каждого класса изоморфизма, заданного некоторым базисом и набором структурных констант;

2) фиксировать ортонормированный базис (в работе это X, Y, W, Z) и варьировать уже структурные константы алгебры Ли.

Авторы вслед за [3, 4] выбрали второй путь. Здесь необходимо отметить неаккуратность авторов — все-таки стоит где-то сразу уточнить, что когда они говорят про параметрические семейства алгебр Ли, то речь идет (как правило) об **изоморфных между собой** алгебрах Ли (внутри каждого семейства), тем более, когда такие алгебры Ли фигурируют в классификационных таблицах.

Д.В. Аксенов и Н.А. Даурцева в своей работе наследуют обозначения и технические детали из двух работ [3, 4] упомянутой выше серии Э. Свенссон, М. Свенссона, С. Гундмундссона.

В этом месте возникает первое и самое важное замечание к авторам: информацией, содержащейся в Таблице 2., практически невозможно пользоваться, а это – основной результат статьи, Теорема 1!. Поясним эту мысль — рассмотрим в качестве примера первую строку из правого нижнего ящика таблицы (случай $(\mathcal{I}_I, \mathcal{I}_J, \mathcal{I}_K)$). Что мы там видим? Загадочные символы

$$\mathfrak{d}_2(\lambda) \subset \mathfrak{g}_5(\lambda, \alpha, \beta, w_1, w_2), \alpha = -\lambda, \beta = w_1 = w_2 = 0.$$

Что прячется за ними? Всего-навсего однопараметрическое семейство алгебр Ли с базисом X, Y, W, Z и соотношениями

$$[Z, W] = -\lambda W, [Z, X] = -\lambda X, [Z, Y] = -\lambda Y,$$

причем все эти алгебры при $\lambda \neq 0$ изоморфны (между собой) полупрямой сумме двух абелевых алгебр Ли $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$. Почему бы сразу не привести в этом окошке таблицы эти простые структурные формулы? Идея, что читатель, увидев загадочные знаки, прочтет внимательно всю статью и расшифрует знаки с помощью парагрфов 5 и 6, выглядит несколько наивной. Да и необходимо четко в примечании сказать каким известным четырехмерным алгебрам Ли изоморфны алгебры того или иного параметрического семейства (такие классификации известны – см. обзоры ВИНИТИ Винберга-Онищика).

Основной результат классификации, на мой взгляд, должен быть сформулирован более четким и самозамкнутым способом, чтобы читатель мог и через некоторое время, заглянув в статью, снова разобраться во всех случаях. Зачем тут приводить в окончательной формулировке связь с общим семейством $\mathfrak{g}_5(\lambda, \alpha, \beta, w_1, w_2)$? Если авторам важно установить связь с работами [3, 4], если это часть доказательства, то да, – можно оставить в виде промежуточного результата, но тогда надо еще раз повторить итоговую классификационную таблицу в виде понятного самозамкнутого текста с комментариями и четко обозначить все это словом ТЕОРЕМА. Вообще основной результат аннонсирован во введении как Теорема 1 (причем без нужных деталей, только лишь со ссылкой на Таблицу 2), а дальше в концовке нет ее прямой формулировки, дана только Таблица 2.

Мы не случайно выбрали пример из группы $(\mathcal{I}_I, \mathcal{I}_J, \mathcal{I}_K)$). Дело в том, что четырехмерный гиперкомплексный случай уже был разобран (по классификационной схеме 1) в работе Марии Лауры Барберис [1]. Данную статью необходимо не просто упомянуть, а сравнить полученные в ней результаты с пунктом $(\mathcal{I}_I, \mathcal{I}_J, \mathcal{I}_K)$) Теоремы 1 (параграф 5, гиперкомплексный случай). Конечно же в работе [1] не обсуждаются слоения и двумерные листы, но зато классифицированы все левоинвариантные гиперкомплексные структуры на 4-мерных алгебрах Ли, как и гиперэрмитовы метрики на них. Сам ответ в [1] формулируется в более простых терминах (параграф 6 обсуждаемой работы несомненно полезен, но не решает полностью всех проблем). Кстати работа [1] полезна, как пример четкого оформления полученных классификационных результатов.

Отметим, что в работе избрана довольно-таки странная нумерация формул вместо сквозной или нумерации по двойным номерам (параграф-формула). В качестве типичного примера странностей приведем стр. 158, там после формулы ($D18$) идет следом (12), а потом неожиданно возникает ($D2$). Мне кажется будет правильным вернуться к более удобным способам нумеровать формулы Кстати, важная формула на стр. 146 (самая первая, перед (Y)) не имеет номера. Не сказано, как получены формулы (Y) – взяты все из тех же [3, 4]? Так? Там получены при помощи пакета Maple? Так?

В работе нет определения 2-формы ω (ее определение все же разумно напомнить в начале параграфа 3). Вообще общую часть параграфа 3 стоило бы сделать поподробнее, ведь именно добавление приставки "гипер" к ситуации [3, 4] и есть основное содержание данной работы.

Непонятно самое первое замечание, рассмотрим фразу: Namely, the almost hyperHermitian structure on (G, g), corresponding to the foliation is defined by the following formulas (опять без номера формулы):

$$IX = Y, IZ = -W; \quad JX = Z, JY = W, \quad K = IJ$$

Вопрос: почему операторы I, J определены так, а не иначе?

Далее ссылка на известную работу [5]. Даже в ее названии говорится от 16 классах, а тут сразу без каких-либо отдельных замечаний говорится лишь о четырех возможных классах. Здесь стоит это утверждение пояснить подробнее. Довольно странное утверждение о том, что "четвертый класс"неинтересен (может быть уже давно разобран?).

Представляется полезным добавить в список литературы ссылку (с обсуждением) на работу [2].

В работе присутствует некоторое количество опечаток:

- 3-я строка снизу на стр. 146 – исправить eqquiped на equipped;
- Таблица 1. на стр. 148 – слово Таблица в подписи набрано на русском языке, такая же проблема с Таблицей 2. на стр. 161
- 11-я строка снизу на стр. 148: пропущен нижний индекс у тензора Нийенхейса $N(Z, W) = 0$

Список литературы

[1] Maria Laura Barberis, *Hypercomplex structures on four-dimensional Lie groups*, Proceedings of the AMS, **125**:4 (1997), 1043–1054.

[2] C.P. Boyer, *A note on hyperhermitian four-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **102**:1 (1988), 157–164.

[3] S. Gudmundsson, M. Svensson, *Harmonic morphisms from four-dimensional Lie groups*, J. Geom. Phys., **83** (2014), 1–11.

[4] E.A. Svensson, S. Gudmundsson, *Natural almost Hermitian structures on conformally foliated 4-dimensional Lie groups with minimal leaves*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **72**:3 (2023), 2265–2286

[5] Gray, A., Hervella, L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Annali di Matematica pura ed applicata **123** (1980), 35–58.

Данная работа является полезным упражнением в области инвариантной геометрии на группах Ли и может заслуживать публикации в "Сибирских электронных математических известиях" после исправления замечаний, указанных в отзыве и соответствующей переработки текста.

9 сентября 2025 г.