S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.86
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 46N10

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ МОЩНОСТИ

Н.К. Обросова, А.А. Шананин

Представлено С.И. Кабанихиным

Abstract: The paper proposes a nonlinear mathematical model of intersectoral balance considering economic constraints. The model generalizes the traditional linear Leontief input-output model and is formalized as an optimal resource allocation problem with neoclassical production functions and constraints on sectoral production capacities. We formulate and investigate the problem of finding competitive equilibrium in the space of goods and prices. The constraint on production capacities leads to additional costs in the network associated with production shortages. We apply Young duality approach and Fenchel duality theory for a dual problem construction to describe the formation of equilibrium prices in the model accounting for additional costs. Possible operating modes of an open production network with limited production capacities are analyzed.

Keywords: input-output analysis, production function, substitution of inputs, competitive equilibrium, Young duality, resource allocation problem, Fenchel duality theorem.

Obrosova, N., Shananin, A., A nonlinear Input-Output model with capacitiy constraints.

Работа поддержана РНФ (грант 24-11-00329).

Поступила 22 июля 2024 г., опубликована 2024 г.

1 Введение

Современные цели приоритетного развития российского обрабатывающего комплекса в условиях неоднородности производственной системы поднимают проблемы, связанные с рисками выхода на экономические ограничения при условиях реструктуризации экономики. Такие риски могут быть связаны с ограниченностью мощностей экономики, дефицитом трудовых ресурсов и эффективностью процессов импортозамещения в условиях внешних шоков. Содержательный анализ этих проблем и вариантов их решения должен проводиться в ходе формирования среднесрочных программ экономического развития.

Естественным инструментом для выявления и анализа таких рисков в среднесрочном периоде развития экономики являются математические модели, основанные на анализе интересов и логики поведения основных экономических агентов и учитывающие сложившиеся особенности функционирования рассматриваемой экономической системы. Модели, предназначенные для анализа среднесрочных экономических рисков в условиях реструктуризации и внешних шоков неоднородной производственной системы, должны учитывать отраслевую структуру экономики и позволять строить среднесрочные оценки рисков разбалансированности экономики в заданных сценариях макроэкономического развития.

В работе предлагается новая математическая модель межотраслевого баланса для анализа и прогнозирования среднесрочных рисков с учетом ограничений на производственные мощности отраслей, позволяющая анализировать инфляцию издержек. Работа является продолжением наших исследований в области математического моделирования и развития новых методов анализа рисков в экономике в условиях структурных изменений, основанных на нелинейных моделях межотраслевого баланса с учетом замещения производственных факторов [1],[2],[3]. Нелинейные модели межотраслевого баланса являются развитием традиционного подхода к анализу межотраслевых связей, основанного на линейной модели межотраслевого баланса В.Леонтьева [4],[5]. Линейная модель Леонтьева уже более 70 лет является классическим инструментом межотраслевого анализа [6], [7], однако базовое предположение о постоянстве норм затрат на выпуск единицы продукции делает ее плохо применимой в условиях замещения производственных факторов. Критика модели, даже в активный период ее использования в прикладных исследованиях, была связана с жесткостью гипотезы о постоянстве матрицы коэффициентов прямых затрат (матрицы Леонтьева). Попытки введения нелинейности напрямую в коэффициенты матрицы Леонтьева [8] не получили распространения в приложениях, так как не давали содержательного описания процессов замещения, а вводимые зависимости были достаточно искусственны и плохо интерпретируемы.

Содержательный учет замещения производственных факторов приводит к нелинейным соотношениям в моделях межотраслевого баланса и требует развития нового математического аппарата для постановки задач и их исследования. Наш подход основан на описании конкурентного экономического равновесия в сети поставок и цен, которое определяется в результате решения задачи оптимального распределения ресурсов с неоклассическими положительно-однородными производственными функциями и двойственных задач специального вида, основанных на математическом аппарате двойственности по Янгу. Результаты исследования математических моделей, предложенных в работах [1],[2], позволили разработать прикладные модели для сценарного анализа макроэкономических шоков в реальных производственных сетях (см., например [9]). В работе [3] предложено обобщение подхода двойственности по Янгу в случае использования вариационных неравенств для описания производственных сетей. Результаты позволили формализовать понятие эффективной производственной ниши экономического кластера в сети поставок.

В данной работе мы рассматриваем модификацию нелинейной модели межотраслевого баланса с учетом экономических ограничений. Учет ограничения на производственные мощности отраслей в задаче оптимального распределения ресурсов приводит к новой постановке двойственных задач, которые определяют формирование равновесных цен в производственной сети. Преимуществом модели является содержательное описание дополнительных издержек, связанных с дефицитом продукции в сети.

Усложнение задачи, по сравнению с работами [1],[2], связано с тем, что ограничение на производственные мощности фактически нарушает положительную однородность производственных функций в модели, что приводит к недостаточности разработанного нами ранее аппарата двойственной по Янгу задачи для анализа экономического равновесия. С использованием теории двойственности Фенхеля и преобразования Янга в данной работе построено новое двойственное описание к задаче распределения ресурсов с ограничениями на мощности производства. В работе исследован механизм возникновения издержек в условиях дефицита товаров в производственной сети их влияние на экономическое равновесие.

Среди наиболее близких к нашей тематике исследований следует выделить работы, направленные на развитие методов анализа распространения шоков в производственных сетях и их агрегированного воздействия на экономику [10], [11],[12]. В этих работах межотраслевые взаимодействия моделируются на основе нелинейных зависимостей. В терминах достаточно простой модели совершенной конкуренции в закрытой (без внешних связей) сети с производственными функциями Кобба-Дугласа изучается зависимость мультипликатора шоковых воздействий от топологии сети и продемонстрирована связь макропоследствий шоков с наличием доминантных секторов. Однако предлагаемый в работах математический аппарат оказывается ограниченно применимым для более общего класса производственных функций [13],[14] и недостаточно развит для анализа среднесрочных экономических рисков в условиях реструктуризации реальных производственных сетей.

Развиваемый в наших работах подход представляется более целостным, так как полученные теоретические результаты исследований имеют естественную экономическую интерпретацию и позволяют предложить новые методы среднесрочного анализа рисков в реальных производственных сетях.

Статья организована следующим образом.

В разделе 2 приводится постановка задачи распределения ресурсов в производственной сети с ограниченными мощностями.

В разделе 3 на основе подхода двойственности по Янгу и Фенхелю построена двойственная задача, описывающая формирование цен в производственной сети с учетом издержек, возникающих при выходе производства на ограничение по мощностям.

В разделе 4 исследована задача максимизации прибыли открытой экономической системы с заданными ценами первичных ресурсов.

В заключении, на основе результатов исследования модели, проанализированы возможные режимы функционирования открытой экономики с ограничениями на производственные мощности в условиях ограниченности суммарных расходов конечного потребителя.

2 Задача оптимального распределения ресурсов с учетом ограничений на производственные мощности

Рассмотрим функционирование производственной сети, экономическими агентами в которой являются производители продукции и конечные потребители. Будем считать, что конечный спрос в экономике представлен в агрегированном виде, т.е. конечных потребителей мы рассматриваем как одного экономического агента в системе. Производители используют при производстве продукцию, выпущенную отраслями внутри сети, а также первичные производственные факторы, например, трудовые ресурсы. В качестве первичного фактора в сети мы также рассматриваем импортные продукты, используемые отраслями для промежуточного потребления. Будем считать, что в условиях открытой экономики цены на первичные факторы формируются на внешних рынках и являются заданными в рамках сценарных условий модели. Опишем поведение экономических агентов, выделенных в сети.

Предположим, что структура производственной сети задана m чистыми отраслями, n первичными производственными факторами и одним агрегированным конечным потребителем продукции чистых отраслей. Обозначим

$X^j = \left(X_1^j, \ldots, X_m^j\right)$ - вектор промежуточного потребления отраслью $j = 1, ..., m$ продукции отраслей $1, ..., m$,

$l^j = \left(l^j_1, \ldots, l^j_n\right)$ - вектор затрат первичных производственных факторов $1, ..., n$ отрасли $j = 1, ..., m$.

Будем считать, что производство продукции каждой отраслью $j = 1, ..., m$ задается неоклассической производственной функцией $F_j\left(X^j, l^j\right) \in \Phi_{m+n}$, где Φ_{m+n} - класс вогнутых, не равных тождественно нулю, монотонно неубывающих, непрерывных и положительно однородных порядка 1 на R^{m+n}_+ функций, обладающих свойством $F_j\left(0,0\right) = 0$. Предположим, что каждая отрасль использует для производства продукции, помимо промежуточных продуктов, хотя бы один первичный ресурс (например, труд).

Предположим, что максимально возможный спрос на продукцию отрасли j, который может быть удовлетворен при полной загрузке производства, ограничен величиной $M_j > 0$. Обозначим $M = (M_1, ..., M_m)$.

Обозначим $l = (l_1, ..., l_n) > 0$ вектор суммарных затрат первичных ресурсов $1, ..., n$ в производственной сети, а через $X^0 = \left(X^0_1, \ldots, X^0_m\right)$ - вектор поставок произведенной продукции конечным потребителям.

Заметим, что все указанные выше потоки мы измеряем в постоянных ценах некоторого фиксированного базового года.

Заданные технологии производства и ограничения определяют технологическое множество $A(l, M)$ допустимых конечных поставок $X^0 \geq 0$, для которых найдутся вектора $X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \;\; l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0$ такие, что выполняется система неравенств

$$F_j\left(X^j, l^j\right) \geq \sum_{i=0}^{m} X^i_j,\; j = 1, \ldots, m \tag{1}$$

$$M_j \geq \sum_{i=0}^{m} X^i_j,\; j = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l \tag{3}$$

$$X^0 \geq 0, \;\; X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \;\; l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0. \tag{4}$$

Заметим, что в силу свойств функций F_j и конечных ограничений на мощности M_j, технологическое множество $A(l, M)$, заданное нелинейными неравенствами (1)-(4), является выпуклым компактом в R^m_+ для любого $l > 0$.

Будем считать, что поведение агрегированного конечного потребителя продуктов сети является рациональным, т.е. описывается неоклассической функцией полезности $F_0(X^0)$, аргументом которой является вектор конечного потребления продуктов отраслей $X^0 = \left(X^0_1, ..., X^0_m\right) \geq 0$. Предположим, что функция полезности является вогнутой, монотонно неубывающей, непрерывной и положительно однородной порядка 1, а также обладает свойством $F_0\left(0\right) = 0$, т.е. $F_0(X^0) \in \Phi_m$.

Поставим задачу поиска конкурентного равновесия в производственной сети: вычислить равновесные цены и промежуточное потребление продуктов и первичных ресурсов, доступных в сети, обеспечивающих равенство спроса и предложения на рынке товаров, при условии, что каждый производитель максимизирует прибыль, а потребитель максимизирует свою полезность в денежном выражении $p_0F_0(X^0)$, где $p_0 > 0$ - масштабирующий коэффициент, переводящий размерность полезности в денежное выражение.

С учетом (1)-(4) задача поиска конкурентного равновесия сводится к следующей задаче оптимального распределения ресурсов

$$p_0F_0\left(X^0\right) \to \max \tag{5}$$

$$F_j\left(X^j, l^j\right) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, j = 1, \ldots, m \tag{6}$$

$$M_j \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i,\ j = 1, \ldots, m \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_k^j \leq l_k,\ k = 1, ..., n, \tag{8}$$

$$X^0 \geq 0,\ \ X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0,\ \ l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0. \tag{9}$$

Предположим, что производственная сеть является продуктивной, т.е. существует набор векторов $X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \quad l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0$ такой, что $F_j\left(X^j, l^j\right) > \sum_{i=1}^{m} X_j^i,\ j = 1, ..., m.$

Теорема 1. *Множество векторов* $\left\{\hat{X}^0,\ \hat{X}^1, ..., \hat{X}^m, \hat{l}^1, ..., \hat{l}^m\right\}$, *удовлетворяющих ограничениям задачи оптимального распределения ресурсов (6)-(9), является решением задачи (5)-(9) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа* $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m) \geq 0$, $v = (v_1, ..., v_m) \geq 0$ *и* $s = (s_1, ..., s_n) \geq 0$ *такие, что*

$$\left(\hat{X}^j, \hat{l}^j\right) \in Arg\max\{\tilde{p}_jF_j\left(X^j, l^j\right) - (\tilde{p} + v)X^j - sl^j \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0\}, \tag{10}$$

$$j = 1, \ldots, m,$$

$$\tilde{p}_j\left(F_j\left(\hat{X}^j, \hat{l}^j\right) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^{m} \hat{X}_j^i\right) = 0,\ j = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

$$v_j\left(M_j - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^{m} \hat{X}_j^i\right) = 0,\ j = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_k^j\right) = 0,\ k = 1, ..., n, \tag{13}$$

$$\hat{X}^0 \in Arg\max\{p_0F_0(X^0) - (\tilde{p} + v)X^0 \mid X^0 \geq 0\}. \tag{14}$$

Доказательство. В силу предположения о продуктивности производственной сети задача выпуклого программирования (5)-(9) удовлетворяет условию Слейтера [1].

Обозначим через $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m) \geq 0$, $v = (v_1, ..., v_m) \geq 0$, $s = (s_1, ..., s_n) \geq 0$ множители Лагранжа к ограничениям (6), (7), (8) соответственно. Запишем функцию Лагранжа для задачи (5)-(9)

$$L\left(X^0, X^1, ..., X^m, l^1, ..., l^m, \tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m, v_1, ..., v_m, s_1, ..., s_n\right) =$$

$$sl + vM + \left(p_0 F_0(X^0) - (\tilde{p} + v)X^0\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\tilde{p}_j F_j\left(X^j, l^j\right) - (\tilde{p} + v)X^j - sl^j\right).$$

Утверждение Теоремы 1 очевидно следует из теоремы Каруша-Куна-Таккера [15]. □

Множители Лагранжа к ограничениям (6), (8) имеют естественную экономическую интерпретацию

- $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m) \geq 0$ - цены, по которым производители продают произведенную продукцию;
- $s = (s_1, \ldots, s_n) \geq 0$ - цены на первичные факторы производства;
- $\tilde{p}+v$ - цены, по которым покупается продукция отраслей, где компоненты вектора $v = (v_1, ..., v_m) \geq 0$ могут интерпретироваться как наценки на товары, возникающие в результате их дефицита, связанного с ограничением на мощность производства (7).

В рамках данной интерпретации множителей Лагранжа выполнение соотношения (10) говорит о том, что спрос на промежуточные и первичные ресурсы в сети, а также предложение продукции производители формируют таким образом, чтобы максимизировать свою прибыль при ценах продажи произведенной продукции $\tilde{p}$, покупки промежуточных ресурсов $\tilde{p} + v$ и ценах на первичные ресурсы s. Соотношение (14) описывает спрос агрегированного конечного потребителя с функцией полезности $F_0(X^0)$ при ценах $\tilde{p} + v$ на продукты и заданном масштабе цен в экономике p_0. Таким образом, нехватка мощностей для удовлетворения текущего спроса приводит к возникновению разницы в цене потребления и производства продукции отрасли. Можно считать, что в этой ситуации в производственной сети между производителем и потребителем продукции возникают агенты-посредники, которые закупают дефицитный продукт у производителя по ценам $\tilde{p}$ и продают его потребителям с наценкой[2] v.

---

[1]В этом случае множитель Лагранжа, соответствующий функционалу, может быть выбран равным 1.

[2]Соответствующая дополнительная прибыль, формирующаяся в результате у посредников, формально должна учитываться в полном балансе производства и распределения продукции и услуг в сети, но не входит в аргументы производственной функции отрасли, так как не участвует в формировании основного капитала, используемого в процессе производства и не увеличивает прибыль производителя.

Таким образом, набор потоков продуктов $\hat{X}^0$, $\hat{X}^1, ..., \hat{X}^m, \hat{l}^1, ..., \hat{l}^m$ и набор цен $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m)$, $v = (v_1, ..., v_m)$, $s = (s_1, ..., s_n)$, удовлетворяющие условиям Теоремы 1, определяют положение конкурентного экономического равновесия в производственной сети.

Заметим, компоненты векторов $\tilde{p}, v, s$ должны рассматриваться в расчетах как индексы по отношению к некоторому базовому году, так как все соотношения Теоремы 2 остаются верными при общем масштабировании цен.

3 Двойственная задача

Для определения равновесных цен построим двойственное описание к задаче распределения ресурсов (5)-(9).

Введем преобразование Янга производственной функции $F_j(X^j, l^j)$, которое назовем функцией себестоимости производства отрасли j (подробнее, см.[2])

$$q_j(p, s) = \inf \left\{ \frac{pX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \,\middle|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j\left(X^j, l^j\right) > 0 \right\} \in \Phi_{m+n} \quad (15)$$

и преобразование Янга функции полезности $F_0(X^0)$, которое будем интерпретировать как индекс потребительских цен

$$q_0(q) = \inf \left\{ \frac{qX^0}{F_0(X^0)} \,\middle|\, X^0 \geq 0, F_0\left(X^0\right) > 0 \right\} \in \Phi_m. \quad (16)$$

Преобразование Янга является инволюцией [1], т.е.

$$F_0\left(X^0\right) = \inf \left\{ \frac{qX^0}{q_0(q)} \,\middle|\, q \geq 0, q_0(q) > 0 \right\},$$

$$F_j\left(X^j, l^j\right) = \inf \left\{ \frac{pX^j + sl^j}{q_j(p, s)} \,\middle|\, p \geq 0, s \geq 0, q_j(p, s) > 0 \right\}.$$

Обозначим $F^A(l, M)$ - оптимальное значение функционала в задаче (5)-(9) в зависимости от векторов отраслевых ограничений на доступный объем первичных ресурсов l и производственных мощностей M. Функция $F^A(l, M) \in \Phi_{m+n}$ и может быть интерпретирована как агрегированная производственная функция [2]. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Агрегированная производственная функция может быть построена как решение следующей задачи*

$$F^A(l, M) = \min_{\hat{p} \geq 0, s \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j(\hat{p}, s)\right)_+ + sl \;\middle|\; q_0(\hat{p}) \geq p_0 \right\}. \quad (17)$$

Минимум в задаче (17) достигается на векторах $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq 0$, $s = (s_1, \dots, s_n) \geq 0$, *таких, что верно*

$$\hat{p} = \tilde{p} + v, \tag{18}$$

где вектора $\tilde{p} \geq 0$, $v \geq 0$ *являются множителями Лагранжа к ограничениям (6) и (7), а вектор* $s \geq 0$ *является множителем Лагранжа к ограничению (8) соответственно.*

Доказательство. Для всех $l > 0$, $M \geq 0$ построим двойственную по Фенхелю задачу к задаче (5)-(9). Для этого перепишем исходную задачу в виде

$$\inf \left\{ f(X^0) + g(X^0) \;\middle|\; X^0 \geq 0 \right\},$$

где

$$f(X^0) = -p_0 F_0(X^0),$$

а функция $g(X^0)$ является индикаторной функцией технологического множества $A(M,l)$, т.е.

$$g(X^0) = I_{A(M,l)} = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } X^0 \in A(l,M), \\ +\infty, & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

Построим соответствующие сопряженные функции

$$f^*(-p) = \sup_{X^0 \geq 0} \left\{ p_0 F_0(X^0) - pX^0 \right\} = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } p \geq 0,\ q_0(p) \geq p_0, \\ +\infty, & \text{\textit{иначе,}} \end{cases} \tag{19}$$

$$g^*(p) = \sup_{X^0 \geq 0} \left\{ pX^0 - g(X^0) \right\} = \sup \left\{ pX^0 \,\middle|\, X^0 \in A(M,l) \right\}, \tag{20}$$

где $g^*(p)$ – опорная функция технологического множества $A(M,l)$, которое задано ограничениями (6)-(9).

Найдем функцию $g^*(p)$. Построим функцию Лагранжа для задачи (20) и перегруппируем слагаемые

$$L\left(p, X^0, X^1, ..., X^m, l^1, ..., l^m, \tilde{p}, v, s\right) = \left(p, X^0\right) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_j \left(F_j\left(X^j, l^j\right) - \sum_{i=1}^{m} X_j^i \right) - \left(\tilde{p}, X^0\right) + \sum_{j=1}^{m} v_j \left(M_j - \sum_{i=1}^{m} X_j^i \right) - \left(v, X^0\right) + \sum_{k=1}^{n} s_k \left(l_k - \sum_{j=1}^{m} l_k^j \right) = \left(v, M\right) + \left(s, l\right) + \left(p - \tilde{p} - v, X^0\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\tilde{p}_j F_j\left(X^j, l^j\right) - \left(\tilde{p} + v, X^j\right) - \left(s, l^j\right) \right).$$

Функция Лагранжа линейная по X^0, поэтому для достижения максимума в седловой точке по $X^0 \geq 0$ необходимо выполнение условий

$$p \leq \tilde{p} + v, \quad \left(p - \tilde{p} - v, X^0\right) = 0. \tag{21}$$

Аналогично, в силу положительной однородности $F_j\left(X^j, l^j\right)$ для любого $j = 1, ..., m$ конечный максимум функции Лагранжа по X^j, l^j в седловой точке может достигаться только на множестве $X^j \geq 0$, $l^j \geq 0$ таких что

$$\tilde{p}_j F_j\left(X^j, l^j\right) \leq \left(\tilde{p} + v, X^j\right) + \left(s, l^j\right)$$

Последнее неравенство очевидно верно, если $F_j\left(X^j, l^j\right) = 0$. Если $F_j\left(X^j, l^j\right) > 0$, то максимум может достигаться только на множестве $X^j \geq 0$, $l^j \geq 0$ таких что

$$\tilde{p}_j \leq \frac{\left(\tilde{p} + v, X^j\right) + \left(s, l^j\right)}{F_j\left(X^j, l^j\right)}.$$

Следовательно

$$\tilde{p}_j \leq q_j\left(\tilde{p} + v, s\right),$$

где $q_j\left(\tilde{p} + v, s\right)$ - себестоимость (15) отрасли j при ценах ресурсов $\tilde{p}+v, s$, т.е.

$$q_j\left(\tilde{p} + v, s\right) = \inf\left\{\frac{\left(\tilde{p} + v, X^j\right) + \left(s, l^j\right)}{F_j\left(X^j, l^j\right)} \,\middle|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j\left(X^j, l^j\right) > 0\right\}.$$

Таким образом, условия

$$\tilde{p}_j \leq q_j\left(\tilde{p} + v, s\right), \quad \left(\tilde{p}_j - q_j\left(\tilde{p} + v, s\right)\right) F_j\left(X^j, l^j\right) = 0 \tag{22}$$

являются необходимыми условиями существования конечного максимума функции Лагранжа по X^j, l^j.

Заметим, что в случае, когда выпуск всех отраслей строго положителен (все отрасли существенны), т.е. $F_j > 0$ для всех $j = 1, ..., m$, выполняется равенство

$$\tilde{p}_j = q_j\left(\tilde{p} + v, s\right).$$

С учетом соотношений (21),(22) по теореме Каруша-Куна-Таккера получим, что на решении задачи (20) оптимальное значение функционала совпадает со значением функции Лагранжа, т.е.

$$g^*(p) = \inf_{v \geq 0, s \geq 0}\left\{(v, M) + (s, l) \mid \tilde{p} + v \geq p, \ q_j\left(\tilde{p} + v, s\right) \geq \tilde{p}_j, \ \tilde{p}_j \geq 0\right\}. \tag{23}$$

По теореме Фенхеля

$$\inf_p\{f^*(-p) + g^*(p)\} = -\inf_{X^0}\{f(X^0) + g(X^0)\} = F^A\left(l, M\right).$$

Объединяя выражения для сопряженных функций (19) и (23), получим

$$F^A(l,M) = \inf_{v,s}\{\,(v,M)+(s,l)\mid$$
$$q_0(p)\ge p_0,\ \tilde p + v \ge p,\ q_j(\tilde p + v, s)\ge \tilde p_j,\ p\ge 0,\ \tilde p_j\ge 0,\ v\ge 0,\ s\ge 0\,\} \tag{24}$$

Заметим, что индикаторная функция f^* множества $\{p\ge 0,\ q_0(p)\ge p_0\}$ в выражении (24) используется в ограничениях на p.

Вернемся теперь к обозначению (18) $\hat p = \tilde p + v$ и заметим, что условия на v в (24)

$$v_j \ge \hat p_j - q_j(\hat p, s),\ v\ge 0$$

можно переписать в виде

$$v_j \ge (\hat p_j - q_j(\hat p, s))_+ .$$

Так как задача (24) линейна по v, то на решении это ограничение выполняется в виде равенства

$$v_j = (\hat p_j - q_j(\hat p, s))_+$$

и задачу (24) можно записать в виде

$$F^A(l,M) =$$
$$\inf_{p\ge 0,\hat p\ge 0, s\ge 0}\left\{\sum_{j=1}^m M_j(\hat p_j - q_j(\hat p, s))_+ + (s,l)\mid\ q_0(p)\ge p_0,\ \hat p\ge p\right\}. \tag{25}$$

Так как функция $q_0(p)$ монотонно неубывающая, то $q_0(\hat p)\ge q_0(p)\ge p_0$, если $\hat p\ge p$. Вектор p не входит явно в функционал задачи (25), поэтому выберем $p=\hat p$. Тогда

$$F^A(l,M) = \inf_{\hat p\ge 0, s\ge 0}\left\{\sum_{j=1}^m M_j(\hat p_j - q_j(\hat p, s))_+ + (s,l)\mid\ q_0(\hat p)\ge p_0\right\}$$

Минимум в последней задаче достигается в силу линейности и положительной однородности входящих в выражение функций и ограниченности функционала нулем снизу. Поэтому

$$F^A(l,M) = \min_{\hat p\ge 0, s\ge 0}\left\{\sum_{j=1}^m M_j(\hat p_j - q_j(\hat p, s))_+ + (s,l)\mid q_0(\hat p)\ge p_0\right\}.$$

Теорема 2 доказана. □

Замечание 1. Если вектора $\hat p, s$ являются решением задачи (17) для некоторых значений l, M и верно $F^A(l,M)>0$, то выполняется равенство

$$q_0(\hat p) = p_0. \tag{26}$$

Действительно, допустим, что $q_0(\hat p) > p_0$ для оптимальных цен $\hat p\ge 0$, $s\ge 0$. Обозначим $\alpha = \frac{p_0}{q_0(\hat p)} < 1$. Тогда, в силу положительной однородности функции $q_0(\hat p)$ по $\hat p$, вектор $\alpha\hat p$ по-прежнему будет удовлетворять условию $q_0(\alpha\hat{p}) = \alpha q_0(\hat{p}) = p_0 \geq p_0$. Однако значение функционала на векторах $\alpha\hat{p}$, αs будет меньше значения на $\hat{p}$, s вследствие положительной однородности функции под минимумом.

В терминах построенной модели могут быть описаны как замкнутые, так и открытые по первичным ресурсам экономические системы. Для замкнутой экономической системы в постановке задачи распределения ресурсов (5)-(9) задано ограничение на количество доступных первичных ресурсов l, а цены на них устанавливаются исходя из равенства спроса и предложения. В открытой экономической системе первичные ресурсы могут закупаться извне по заданным внешним рынком ценам, которые являются входными параметрами задачи.

4 Экономическое равновесие в открытой производственной сети с ограниченными мощностями

Рассмотрим функционирование производственной сети как открытой экономической системы с заданными ценами $\hat{s} > 0$ на первичные ресурсы. Будем считать, что все ограничения на производственные мощности $M_j < +\infty$. Поставим задачу максимизации прибыли экономической системы по объему используемых первичных ресурсов l

$$\Pi_A(\hat{s}) = \sup_{l \geq 0} \{F_A(l, M) - \hat{s}l\}. \tag{27}$$

Очевидно, что $F_A(l, M) \leq p_0 F_0(M)$, поэтому супремум в задаче (27) достигается. Действительно, так как $\hat{s} > 0$ то, если хотя бы для одного первичного ресурса i верно $l_i > p_0 F_0(M)/\hat{s}_i$, то значение под супремумом отрицательно. Следовательно, множество значений l, для которых функционал задачи неотрицателен, является ограниченным. В этом случае можно рассматривать задачу максимизации непрерывной функции $(F_A(l, M) - \hat{s}l)$ на компакте $0 \leq l_i \leq p_0 F_0(M)/s_i$, $i = 1, ..., n$.

Теорема 3. *Прибыль экономической системы может быть вычислена как решение задачи*

$$\Pi_A(\hat{s}) = \min_{\hat{p} \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, \hat{s}\right)\right)_+ \mid q_0\left(\hat{p}\right) \geq p_0, \right\}. \tag{28}$$

Доказательство. Подставим выражение для $F_A(l, M)$ из Теоремы 2 в (27)

$$\Pi_A(\hat{s}) = \max_{l \geq 0} \min_{\hat{p} \geq 0,\, s \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, s\right)\right)_+ + sl - \hat{s}l \mid q_0\left(\hat{p}\right) \geq p_0 \right\}.$$

Очевидно, что функционал в данной задаче является выпуклым по $\hat{p}, s$ и линейным по l, а ограничения не связанные, поэтому можно переставить местами максимум и минимум. Тогда

$$\Pi_A(\hat{s}) = \min_{\hat{p}\geq 0} \min_{s\geq 0} \max_{l\geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, s\right)\right)_+ + sl - \hat{s}l \ \mid q_0\left(\hat{p}\right) \geq p_0 \ \right\}.$$

Для того чтобы внутренний минимакс достигался в некоторой точке s, l, необходимо выполнение соотношений

$$(s - \hat{s}) \leq 0, \ \ (s - \hat{s})\, l = 0.$$

Тогда

$$\Pi_A(\hat{s}) = \min_{\hat{p}\geq 0, s\geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, s\right)\right)_+ \mid q_0\left(\hat{p}\right)) \geq p_0, \ s \leq \hat{s} \right\}. \qquad (29)$$

Поскольку при всех j функция $q_j\left(\hat{p}, s\right)$ не убывает по s, то минимум в (29) достигается при $s = \hat{s}$. Следовательно,

$$\Pi_A(\hat{s}) = \min_{\hat{p}\geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, \hat{s}\right)\right)_+ \mid q_0\left(\hat{p}\right)) \geq p_0 \right\}.$$

Теорема 3 доказана. □

Замечание 2. Из Теорем 1, 3 и Замечания 1 очевидно вытекают следующие утверждения.

- *Предложение 1.* Конкурентное равновесие в открытой экономической системе с заданными ценами первичных ресурсов $\hat{s} > 0$, вектором спроса конечных потребителей с компонентами $\hat{p}_j X_j^0 > 0$ и мощностями отраслей $M = (M_1, ..., M_m) > 0$ определяется из решения задачи (10) с равновесными ценами $\hat{p} = \tilde{p} + v$, где $\hat{p}$ является решением задачи (28), $v_j = \left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, \hat{s}\right)\right)_+$. Кроме того, на решении выполняются условия дополняющей нежесткости (11), (12), (13).
- *Предложение 2.* Если потоки продуктов $\hat{X}^0$, $\hat{X}^1, ..., \hat{X}^m, \hat{l}^1, ..., \hat{l}^m$ и цены $\hat{p} = \left(\hat{p}_1, ..., \hat{p}_m\right),\ v = \left(v_1, ..., v_m\right),\ \hat{s} = \left(\hat{s}_1, ..., \hat{s}_n\right)$ являются равновесными, то

  $$\Pi_A(\hat{s}) = q_0(\hat{p}) F_0(X^0) - \hat{s} \sum_{j=1}^{m} \hat{l}^j.$$

  Если при этом $F_0(X^0) > 0$, то $q_0(\hat{p}) = p_0$.

5 Заключение

Рассмотрим открытую экономическую систему с заданными ценами первичных ресурсов $\hat{s}$. Пусть суммарный спрос конечных потребителей ограничен заданной величиной их суммарных денежных расходов. Результаты исследования предложенной в работе модели межотраслевого баланса с неоклассическими производственными функциями и ограничениями на производственные мощности позволяют описать различные режимы, которые могут быть реализованы в точке экономического равновесия сети.

Предположим, что вектор цен $\hat{p}$ является решением задачи (28), т.е. соответствует равновесным ценам. Тогда возможны следующие варианты.

1) Если $\Pi_A(\hat{s}) > 0$, то ограничение по мощностям лимитирует выпуск и

$$q_0(\hat{p}) = p_0.$$

В этом случае хотя бы для одной отрасли j

$$v_j = \hat{p}_j - q_j\left(\hat{p}, \hat{s}\right) > 0.$$

Тогда, в силу условий дополняющей нежесткости (11) и (12), получим

$$F_j\left(\hat{X}^j, \hat{l}^j\right) = M_j,$$

т.е. производство функционирует на максимальной мощности и $v_j > 0$.

2) Если $\Pi_A(\hat{s}) = 0$ и $q_0(\hat{p}) = p_0$, то мощности не лимитируют производство. В этом случае производство и спрос на первичные ресурсы лимитируются денежными расходами конечных потребителей, так как в силу Предложения 2

$$\hat{s}l = p_0 F_0(X^0).$$

3) Если $\Pi_A(\hat{s}) = 0$ и $q_0(\hat{p}) > p_0$, то $F_0(X^0) = 0$, так как потребители не могут купить товары по слишком высоким для них ценам $\hat{p}$. Это означает, что высокие внешние цены $\hat{s}$ на первичные ресурсы определяют, исходя из условия рентабельности, настолько высокий уровень цен производителей $\hat{p}$, что продукты оказываются недоступными для конечных потребителей, т.е. система оказывается экономически непродуктивной.

References

[1] A.A. Shananin *Young Duality and Aggregation of Balances*, Doklady Mathematics, **1** (2020), 330–333.

[2] A.A. Shananin *Problem of Aggregating of an Input-Output Model and Duality* Computational Mathematics and Mathematical Physics, **61** (2021), 153–166

[3] N.K. Obrosova, A.A. Shananin, *Young duality of variational inequalities. An application for the analysis of interactions in production networks*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **29**:3 (2023), 88—105;

[4] W.W. Leontief *Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States*, Review of Economics and Statistics, **18** (1936), 105–125

[5] W.W. Leontief,*The Structure of American Economy, 1919-1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, Oxford University Press, (1951)

[6] R.E. Miller, P.D. Blair, *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*, Second Edition, Cambridge University Press, (2009).

[7] Y.V. Yaremenko *Teoriia i metodologiia issledovaniia mnogourovnevoi ekonomiki*, Nauka, (1997)

[8] I. W. Sandberg *A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy. Econometrica* **41**:6 (1973), 1167–1182
[9] A. Boranbayev, N. Obrosova, A. Shananin, *Technology of Input–Output Analysis with CES Production: Application for Studying the Kazakhstan Supply Chain during the COVID-19 Pandemic*, Sustainability, **15** (2023).
[10] D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. Tahbaz-Salehi, *Cascades in Networks and Aggregate Volatility*, NBER Working Papers **16516**, National Bureau of Economic Research, Inc., (2010)
[11] D. Acemoglu, V.M. Carvalho, A. Ozdaglar, A. Tahbaz-Salehi, *The network origins of aggregate fluctuations*, Econometrica, **5** (2012), 1977–2016.
[12] D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. Tahbaz-Salehi, *Microeconomic origins of macroeconomic tail risks*, American Economic Review, **1** (2017), 54–108.
[13] D.R. Baqaee, *Cascading failures in production networks*, Econometrica. **86**:5, (2018), 1819–1838.
[14] V.M. Carvalho, A. Tahbaz-Salehi, *Production Networks: A Primer* , Cambridge Working Papers in Economics 1856, Faculty of Economics, University of Cambridge, (2019)
[15] H.Nikaido *Convex structures and economic theory*, N.Y., London, Academic Press, (1968)

Nataliia Obrosova
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory,
119991, Moscow, Russian Federation,
Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,
Vavilov Street 44/2,
119333, Moscow, Russian Federation
Email address: nobrosova@ya.ru

Alexander Shananin
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory,
119991, Moscow, Russian Federation,
Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,
Vavilov Street 44/2,
119333, Moscow, Russian Federation,
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskiy per. 9,
141701, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation
Email address: alexshan@ya.ru