

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 519.17, 512.54
MSC 20H20, 05C69

КЛИКОВОЕ ЧИСЛО ГРАФА КОММУТИРОВАНИЯ TI-ПОДГРУПП В ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

А.А. КУДИНОВ, Н.Д. ЗЮЛЯРКИНА

АБСТРАКТ. In the paper we study the commuting graph of a cyclic TI-subgroup A of order 4 in a group G with the structure $G = F^*(G)A$ where $F^*(G)$ is a quasisimple linear group over field of odd characteristic. The clique number of this graph is found.

Keywords: finite linear group, quotient group, TI-subgroup, commuting graph.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определенных свойств. В частности, большой интерес представляют TI-подгруппы.

Пусть G – группа, $A \leq G$. Тогда A называется *TI-подгруппой*, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G \setminus N_G(A)$.

Изучение групп, содержащих TI-подгруппу, является важным в связи с задачей классификации конечных простых групп. Результаты о TI-подгруппах полезны при описании групп так называемого компонентного типа, а также при исследовании групп с условиями на классы сопряженных инволюций.

Конечные группы с TI-подгруппой A , являющейся 2-группой, изучались в работах [1–9], и в настоящий момент наименее исследованными остались случаи, когда подгруппа A либо циклическая, либо элементарная абелева (см. работу [6], теорема 3.1). Заметим, что если A – циклическая 2-группа порядка большего, чем 2, то она будет содержать единственную подгруппу порядка 4, которая также является TI-подгруппой. Следовательно, достаточно изучить ситуацию, когда A имеет порядок 4.

KUDINOV, A.A., ZYULYARKINA, N.D., CLIQUE NUMBER OF THE COMMUTING GRAPH OF TI-SUBGROUPS IN LINEAR GROUPS.

© 2022 Кудинов А.А., Зюляркина Н.Д.

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

Для изучения свойств группы с ней можно связать определенный комбинаторный объект и по свойствам этого объекта судить о свойствах связанной группы. Одним из таких объектов является граф коммутирования.

Для некоторой конечной группы G и семейства подмножеств Y из G , определим *граф коммутирования*, обозначаемый $\Gamma(G, Y)$, как граф со множеством вершин Y , в котором любые две различные вершины $x, y \in Y$ смежны тогда и только тогда, когда x и y поэлементно коммутируют. Через A^G будем обозначать множество всех подгрупп группы G , сопряженных A . Нами будет изучаться граф коммутирования $\Gamma(G, A^G)$.

Одной из важных характеристик графа является кликовое число. Из полученных М. Ашбахером результатов [10] следует, что кликовое число графа коммутирования циклических TI-подгрупп порядка 4 связано со слабым замыканием этой TI-подгруппы в силовой 2-подгруппе группы G . В частности, им был изучен случай, когда TI-подгруппа является слабо замкнутой в силовой 2-подгруппе из G (это эквивалентно случаю, когда кликовое число графа коммутирования равно единице). Поэтому сведения о кликовом числе графа коммутирования TI-подгрупп представляют большой интерес.

В данной статье изучаются свойства графа коммутирования циклической TI-подгруппы в линейных группах над полем нечетной характеристики.

Из работы [2] известно, что циклическая TI-подгруппа порядка 4 нормализует любую компоненту группы G , если таковые имеются. Поэтому при изучении конечных групп, содержащих компоненты, полезно иметь информацию о группах вида $F^*(G)A$, где $F^*(G)$ – это обобщенная группа Фиттинга группы G , являющаяся квазипростой группой, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4.

Известно, что классические группы можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств.

Пусть V – векторное пространство размерности n над полем F_q , где q нечетно. Пусть $H = GL_n(q)$. Как показано в разделе 3А [9], каждой инволюции $u \in G$ соответствуют два подпространства V_u^+ и V_u^- из V :

$$V_i^+ = C_v(u) = \{v \in V | u(v) = v\}, V_i^- = [V, u] = \{v \in V | u(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_u^+ \oplus V_u^-$, и инволюция u в группе автоморфизмов векторного пространства V называется *инволюцией типа t* , если подпространство V_u^- имеет размерность t . Согласно работе [9], любые две инволюции типа t будут сопряжены с помощью элемента из $SL_n(q)$.

Пусть теперь H – группа $GL_n(q)$ и $u \in H$. Тогда u называется *полуинволюцией*, если $u^2 = \gamma E$ для $\gamma \in F_q^*$, где E – единичная матрица. Если γ не является квадратом, то u называется *полуинволюцией типа 0*. Согласно [9], любые две полуинволюции u_1 и u_2 типа 0 такие, что $u_1^2 = u_2^2$, тоже сопряжены с помощью элемента из $SL_n(q)$.

В дальнейшем до конца работы будем считать, что A является циклической подгруппой порядка 4 в группе $G = XA$, где $X = F^*(G)$ – квазипростая линейная группа над полем нечетной характеристики, а a_0 – это инволюция из $A = \langle a \rangle$.

Через X^* обозначим множество таких расширений группы X , что для любой группы \tilde{X} из X^* любой элемент из $\tilde{X} \setminus X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм.

Пусть u – элемент из $GL_n(q)$, b – элемент из G . Если u содержится в $SL_n(q)Z(GL_n(q))$, то будем говорить, что b соответствует элементу u , если b – это смежный класс в X , содержащий элемент $uz \in SL_n(q)$, где $z \in Z(GL_n(q))$. Если $u \notin SL_n(q)Z(GL_n(q))$, то выражение " b соответствует элементу u " означает, что b – это автоморфизм, который индуцирует u на X .

Основным результатом данной работы является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $G = XA$, где $X = F(G)$, A – циклическая TI -подгруппа порядка 4. Если X – это частное $SL_n(q)$ по центральной подгруппе порядка d и q нечетно, то тогда будут справедливы следующие утверждения:

(1) $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции типа t из $GL_n(q)$, $n \neq 2t$ или d нечетно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок C_n^m ;

(2) $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции типа t из $GL_n(q)$, $n = 2t$ и d четно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок $C_n^m/2$;

(3) $G \in X^*$, $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции типа θ из $GL_n(q)$. Тогда $n = 2t$, d четно и любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок 2^{m-1} .

(4) $G \notin X^*$ и $\Gamma(G, A^G)$ является кликой.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если T – TI -подгруппа четного порядка конечной группы G , то T называется подгруппой *корневого типа*, если индекс $|T : N_T(T^g)|$ нечетен для любого элемента $g \in G$, для которого число $|N_T(T^g)|$ четно.

Если A является подгруппой корневого типа, то это означает, что условие $[a_0, a_0^g] = 1$ влечет выполнение равенства $[A, A^g] = 1$ для любого элемента $g \in G$. Из этого следует, что граф коммутирования циклической TI -подгруппы A порядка 4 корневого типа изоморфен графу коммутирования инволюции $\Gamma(G, a_0^G)$.

Опишем очевидный критерий того, что циклическая подгруппа порядка 4 группы G является TI -подгруппой.

Предложение 1. Пусть $B = \langle b \rangle$ – подгруппа порядка 4 группы G . Данная подгруппа будет TI -подгруппой G тогда и только тогда, когда она нормальна в $C_G(b^2)$.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Кликой* называется полный граф, а *кликкой* – граф, не имеющий ребер. *Максимальной кликой* графа Γ называется его подграф, являющийся кликой, которую нельзя расширить добавлением дополнительных вершин. *Наибольшей кликой* является клика с наибольшим количеством вершин. *Кликовым числом* графа Γ является количество вершин в его наибольшей клике. В дальнейшем кликовое число будем обозначать как $\alpha(\Gamma)$.

Лемма 1. Пусть G – конечная группа, A – циклическая TI -подгруппа порядка 4 группы G . Тогда все максимальные клики графа коммутирования $\Gamma(G, A^G)$ имеют одинаковое количество вершин.

Доказательство. Согласно работе [10] (лемма 2.5), вершины графа коммутирования $\Gamma(G, A^G)$, образующие максимальную клику, являются множеством

$A^G \cap S$, где S – силовская 2-подгруппа группы G . Ввиду сопряженности силовских 2-подгрупп в группе G , мы получим, что множества вершин графа коммутирования, образующих две максимальные клики, тоже сопряжены. Следовательно, они содержат одинаковое количество элементов. Лемма доказана.

Из данной леммы следует, что для нахождения $\alpha(\Gamma)$ достаточно найти хотя бы одну максимальную клику.

Циклические TI-подгруппы порядка 4 в группах вида XA , где X – линейная группа над полем нечетной характеристики, описывает следующая теорема [4]:

Теорема 2. Пусть $G = XA$, где $X = F(G)$, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4. Если X – это накрывающая группа для $L_n(q)$, $n \geq 2$, то либо X – накрывающая группа для $L_2(9)$, $G = X$ и $|Z(X)| = 3$, либо X – частное $SL_n(q)$, $n \geq 2$, по центральной подгруппе порядка d и имеет место один из следующих случаев:

для нечетного n :

(1) $X \simeq L_3(3)$ или $X \simeq L_3(7)$, $G = X \langle \tau \rangle$, где τ – автоморфизм графа, a_0 соответствует инволюции типа 2 из X ;

(2) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции четного типа из $SL_n(q)$.

для четного n :

(3) $X = L_2(9)$, элемент a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм, a_0 соответствует инволюции типа 1 из $SL_2(9)$.

(4) $G = X$, $n > 4$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции типа m , $m \equiv 0 \pmod{4}$, из $SL_n(q)$;

(5) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 4$, a_0 соответствует инволюции типа m , $m \equiv 2(4)$, из $SL_n(q)$, $(q - 1, n) \neq (q - 1, 2n)$ и либо d делится на $(q - 1, n/2)$, если $n \equiv 0 \pmod{4}$, либо $d \equiv 0 \pmod{4}$, если $n \equiv 2 \pmod{4}$;

(6) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 2$, $(q - 1, 2n) \neq (q - 1, 4n)$, d делится на $(q - 1, n)_2$, a_0 соответствует инволюции нечетного типа из $GL_n(q)$;

(7) $G = X$, $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, d четно, $q + 1 \equiv 0 \pmod{8}$ или $n \equiv 0 \pmod{8}$, элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 0 из $SL_n(q)$;

(8) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $(q - 1, 2n) = (q - 1, n)$, элементу a_0 соответствует инволюция типа m , $m \equiv 2 \pmod{4}$, из $SL_n(q)$;

(9) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $(q - 1, 2n) = (q - 1, n) = (q - 1, 4n) = (q - 1, 2n)$, d делится на $(q - 1, n)_2$, элементу a_0 соответствует инволюция нечетного типа из $GL_n(q)$;

(10) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q + 1 \equiv 4 \pmod{8}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$, элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 0 из $SL_n(q)$;

(11) $|G : X| = 4$, $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $(q - 1, 2n) = (q - 1, n)$, элементу a_0 соответствует инволюция нечетного типа из $GL_n(q)$.

В дальнейшем диагональную матрицу вида
$$\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \eta_n \end{pmatrix}$$
 будем обо-

значать как $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$.

Следующие примеры, основанные на доказательстве теоремы 2, показывают, как устроены циклические TI-подгруппы порядка 4 в рассматриваемой группе $G \in X^*$ в случаях $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ и $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$.

Пример 1 Пусть $q - 1 \equiv 0(4)$. Обозначим через ρ элемент поля для которого $\rho^2 = -1$. Из предыдущей теоремы получаем, что в этом случае a_0 соответствует инволюции u типа m из $GL_n(q)$. В некотором базисе матрица u имеет вид $[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$, где ровно m элементов равны -1 , а элементу a соответствует матрица $w = [1, \dots, 1, \rho, \dots, \rho]$, где ровно m элементов равны ρ . Исходя из строения централизатора инволюции типа m в частном группы $GL_n(q)$ по центральной подгруппе (раздел 3А [9]) можно заключить, что подгруппа A будет находиться в центре централизатора a_0 , за исключением ситуации, когда $n = 2m$ и частное берется по подгруппе четного порядка. В последнем случае A будет инвертироваться элементом из $GL_n(q)$, переставляющим пространства V_u^+ и V_u^- .

Отметим, что подгруппа, построенная при помощи матрицы w будет TI -подгруппой порядка 4 в любом частном $GL_n(q)$ по центральной подгруппе ввиду утверждения 1.

Пример 2 Пусть $q + 1 \equiv 0(4)$. В этом случае a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $H = GL_n(q)$, $n = 2m$ и можно считать, что $u^2 = -E$. Через \bar{H} обозначим частное H по центральной подгруппе четного порядка. Согласно разделу 3А [9], в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_m$ такой, что $u(e_i) = -e'_i, u(e'_i) = e_i$. В этом базисе полный прообраз $C_{\bar{H}}(\bar{u})$ в группе H будет состоять из матриц wx^ϵ ($\epsilon = 0, 1$) вида

$$w = \begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где C и B – произвольные матрицы размера $m \times m$ ($\det w \neq 0$), E – единичная матрица размера $m \times m$. Согласно разделу 3А [9] существует взаимно однозначное соответствие между элементами полного прообраза $C_{\bar{H}}(\bar{u})$ в группе H и элементами группы $GL_m(q^2) < \tau >$, где τ индуцирует на $GL_m(q^2)$ полевой автоморфизм порядка 2. Матрице w ставится в соответствие матрица $v = C + \rho B$ из группы $S = GL_m(q^2)$, где ρ – элемент поля $F_{q^2} = \{\lambda + \rho\mu \mid \lambda, \mu \in F_q\}$ и $\rho^2 = -1$. Матрице x будет соответствовать полевой автоморфизм τ . Тогда TI -подгруппа A порядка 4, инволюция из которой соответствует u , будет порождена элементом s вида $\begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ -\beta E & \alpha E \end{pmatrix}$, где $(\alpha + \beta\rho)^2 = \rho$, $\alpha, \beta \in F_q$. В группе S матрице s будет соответствовать матрица s' вида $(\alpha + \beta\rho)E$. Элемент $\alpha + \beta\rho$ в дальнейшем обозначим через δ . Заметим, что в этом случае A находится в центре S и инвертируется элементом τ .

Отметим, что подгруппа, построенная при помощи элемента s будет TI -подгруппой порядка 4 в любом частном $GL_n(q)$ по центральной подгруппе четного порядка ввиду утверждения 1.

3. Кликовое число графа коммутирования TI -подгрупп при $q - 1 \equiv 0(mod 4)$

В этом разделе будем считать, что $q - 1 \equiv 0(mod 4)$. Тогда имеет место один из случаев (4), (5), (6), (8), (9), (11), описанных в теореме 2, и подгруппа A имеет строение, описанное в примере 1.

Лемма 2. Пусть X – частное $SL_n(q)$ по подгруппе порядка d , $G \in X^*$, a_0 соответствует инволюции типа m из $H = GL_n(q)$, $n \neq 2m$ или d нечетно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок C_n^m .

Доказательство. Согласно доказательству леммы 2.6 [4], циклическая ТИ-подгруппа порядка 4 в указанном случае существует тогда и только тогда, когда $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, и будет устроена так, как это описано в примере 1. По разделу 3А [9] $C_H(w) = C_H(u)$, а значит, $C_G(a_0) = C_G(a)$, и тогда подгруппа A является подгруппой корневого типа. Поэтому граф коммутирования $\Gamma(G, A^G)$ совпадет с графом коммутирования инволюций типа m .

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m из H . Зафиксируем базис e_1, e_2, \dots, e_n пространства V такой, что u инвертирует m векторов данного базиса и централизует остальные векторы. Рассмотрим множество различных инволюций u_1, u_2, \dots, u_s ($s = C_n^m$) таких, что каждая из них инвертирует m векторов данного базиса и централизует остальные векторы. Очевидно, что данные инволюции коммутируют друг с другом. Согласно разделу 3А [9], пересечение централизаторов любых двух инволюций из данного множества в H , например, u_1 и u_2 , равно:

$$C_{C_H(u_1)}(u_2) = GL_{m-m_1}(q) \times GL_{m_1}(q) \times GL_{m-m_1}(q) \times GL_{n-2m+m_1}(q),$$

где $m_1 = \dim(V_{u_1}^- \cap V_{u_2}^-)$. По индукции легко получить, что пересечение централизаторов всех рассматриваемых инволюций равно:

$$T = C_H(u_1) \cap C_H(u_2) \cap \dots \cap C_H(u_s) = GL_1(q) \times GL_1(q) \times \dots \times GL_1(q).$$

Таким образом, $u^H \cap T$ является максимальной кликой в графе $\Gamma(H, u^H)$. Следовательно, максимальная клика из $\Gamma(H, u^H)$ имеет размерность C_n^m .

Заметим, что $|u^H| = |A^G| = |a_0^G|$. Между множествами вершин графов $\Gamma(H, u^H)$ и $\Gamma(G, a_0^G)$ можно установить биекцию по следующему правилу: пусть u^g – вершина графа $\Gamma(H, u^H)$. Тогда инволюции u и u^g будут сопряжены в $SL_n(q)$. Поэтому существует элемент r из $SL_n(q)$ такой, что $u^r = u^g$. Тогда вершине u^g будет соответствовать вершина a_0^r (Эти вершины задаются с помощью одной и той же матрицы $u^r = u^g$). Таким образом, максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ также имеет размерность C_n^m , что приводит к случаю (1) из теоремы 1. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть X – частное $SL_n(q)$ по подгруппе порядка d , $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, a_0 соответствует инволюции типа m из $H = GL_n(q)$, $n = 2m$ и d четно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет размерность $C_n^m/2$.

Доказательство. Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ пространства V . Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m из H . Пусть a соответствует элементу w порядка 4 из H , $w^2 = u$, и согласно лемме 2.6 из [4], инволюция u имеет вид $[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$, где ровно m диагональных элементов равны 1 и ровно m диагональных элементов равны -1. Тогда w имеет вид $[1, \dots, 1, \rho, \dots, \rho]$, где ρ – элемент поля F_q такой, что $\rho^2 = -1$.

Пусть $\bar{H} = PGL_n(q)$, $B = \langle wZ \rangle$, $Z = Z(H)$. Тогда B будет циклической ТИ-подгруппой из \bar{H} как это было отмечено в примере 1, $\Gamma_1 = \Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ и $\Gamma_2 = \Gamma(G, A^G)$. Покажем, что Γ_1 изоморфен Γ_2 .

Пусть смежный класс b , порождающий подгруппу B , содержит матрицу w . Для подгруппы A можно выбрать порождающий элемент a так, чтобы он соответствовал смежному классу в \bar{H} , содержащему ту же матрицу w (строение подгруппы A описано в примере 1). Заметим, что $|B^{\bar{H}}| = |A^G|$.

Между множествами вершин графов Γ_1 и Γ_2 можно установить биекцию по следующему правилу: пусть $\langle b \rangle^g$ – вершина графа Γ_1 . Тогда инволюции b^2 и

$(b^2)^g$ будут сопряжены в $SL_n(q)$ (Раздел 3А [9]). Поэтому существует элемент h из $SL_n(q)$ такой, что $(b^2)^h = (b^2)^g$. Следовательно, $\langle b \rangle^g$ будет совпадать с $\langle b \rangle^h$. Тогда вершине $\langle b \rangle^g$ будет соответствовать вершина $\langle a \rangle^h$. Очевидно, что данная биекция будет сохранять отношение смежности, поэтому $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.

Теперь рассмотрим элементы w_1, \dots, w_s ($s = C_n^m$), которые в описанном ранее базисе имеют вид $w_i = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$, где среди $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ровно m элементов ρ , а остальные m элементов – единицы. Заметим, что данные элементы будут сопряжены в H , т.к. они имеют одинаковую нормальную жорданову форму. Согласно разделу 3А [9], пересечение централизаторов всех этих элементов равно:

$$T = C_H(w_1) \cap C_H(w_2) \cap \dots \cap C_H(w_s) = GL_1(q) \times GL_1(q) \times \dots \times GL_1(q).$$

Таким образом, $w^H \cap T$ является максимальной кликой в графе $\Gamma(H, w^H)$. Элементы w_1, \dots, w_s можно разбить попарно следующим образом: если $w_i = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$, то элемент, состоящий с ним в паре, будет иметь вид $w_j = [\beta_1, \dots, \beta_n]$, где $\beta_t = 1$, если $\varepsilon_t = \rho$ и $\beta_t = \rho$, если $\varepsilon_t = 1$. Следовательно, $w_i w_j = \rho E$ и $w_j = \rho E w_i^{-1}$, и тогда в \bar{H} подгруппы $\langle w_j Z \rangle$ и $\langle w_i Z \rangle$ совпадают.

Следовательно, максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет размерность $C_n^m / 2$, что приводит к случаю (2) из теоремы 1. Лемма доказана.

4. КЛИКОВОЕ ЧИСЛО ГРАФА КОММУТИРОВАНИЯ ТИ-ПОДГРУПП ПРИ $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$

В этом разделе будем считать, что $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$. Это влечет, что -1 не является квадратом в поле F_q . Тогда имеет место один из случаев (2), (7), (10), описанных в теореме 2. Подгруппа A в этом случае имеет строение, описанное в примере 2, обозначения из которого будут применяться в данном разделе. В данном разделе через H обозначим группу $GL_{2m}(q)$, $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$. Через $\Gamma(\bar{H}, A^{\bar{H}})$ обозначим граф коммутирования ТИ-подгрупп порядка 4, сопряженных с ТИ-подгруппой $A \leq \bar{H}$.

Лемма 4. Пусть $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$, $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, Тогда в \bar{H} существует циклическая ТИ-подгруппа порядка 4 $B = \langle b \rangle$ такая, что b^2 соответствует полуинволюции типа 0 из группы $H = GL_{2m}(q)$.

Доказательство. Требуемая подгруппа строится как описано в примере 2. Пусть $b_0 = b^2$ соответствует полуинволюции u типа 0 из H . Пусть b соответствует элементу c порядка 4 из H , $c^2 = u$, и тогда инволюция u имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, а c имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ -\beta E & \alpha E \end{pmatrix}$, где α и β – элементы, описанные ранее в примере 2.

Лемма 5. Пусть $H = GL_{2m}(q)$, $S = GL_m(q^2)$, Пусть h и h_s – элементы из H , которые соответствуют матрицам из S (см. описание в примере 2) вида $[\delta, \dots, \delta]$ и $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$ соответственно. При этом среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ ровно k элементов $-\rho\delta$, если 2 – квадрат в поле F_q , либо k элементов $\rho\delta$, если 2 – не квадрат в поле F_q , для некоторого $k = 1, 2, \dots, m$, а остальные $m - k$ элементов δ (где ρ и δ – элементы, определенные выше). Тогда h и h_s сопряжены в H .

Доказательство. Из равенства $\delta^2 = \rho$ мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0, \\ 2\alpha\beta = 1. \end{cases}$$

При решении данной системы возможны следующие два случая:

(1) $\alpha = \beta$ и $2\alpha^2 = 1$, т.е. 2 является квадратом в поле F_q ;

(2) $\alpha = -\beta$ и $-2\alpha^2 = 1$, т.е. 2 не является квадратом в поле F_q .

Найдем элемент, сопрягающий h и h_s , для первого случая. Пусть h_s соответствует матрице из S вида $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$, где $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_k}$ равны $-\rho\delta$, а остальные ε_{i_j} равны δ . Рассмотрим элемент $x \in H$ для некоторого $k = 1, 2, \dots, m$, действующий на базис $e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_m$ так, что $x(e_{i_1}) = -e'_{i_1}$, $x(e_{i_2}) = -e'_{i_2}$, \dots , $x(e_{i_k}) = -e'_{i_k}$, а для остальных $x(e_{i_j}) = e_{i_j}$. Соответственно, $x(e'_{i_1}) = -e_{i_1}$, $x(e'_{i_2}) = -e_{i_2}$, \dots , $x(e'_{i_k}) = -e_{i_k}$, а для остальных $x(e'_{i_j}) = e'_{i_j}$. Непосредственная проверка показывает, что тогда x сопрягает h и h_s .

Теперь найдем элемент, сопрягающий h и h_s , для второго случая. Пусть h_s соответствует матрице из S вида $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$, где $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_k}$ равны $\rho\delta$, а остальные ε_{i_j} равны δ . Рассмотрим элемент $x \in H$ для некоторого $k = 1, 2, \dots, m$, действующий на базис $e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_m$ так, что $x(e_{i_1}) = e'_{i_1}$, $x(e_{i_2}) = e'_{i_2}$, \dots , $x(e_{i_k}) = e'_{i_k}$, а для остальных $x(e_{i_j}) = e_{i_j}$. Соответственно, $x(e'_{i_1}) = e_{i_1}$, $x(e'_{i_2}) = e_{i_2}$, \dots , $x(e'_{i_k}) = e_{i_k}$, а для остальных $x(e'_{i_j}) = e'_{i_j}$. Непосредственная проверка показывает, что тогда x сопрягает h и h_s . Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $G_1 = PGL_{2m}(q)$, B – циклическая TI-подгруппа порядка 4 из G_1 , $G_2 = XA$, $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, B^{G_1})$, $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, A^{G_2})$. Тогда $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Доказательство. В качестве порождающего элемента для подгруппы B можно взять смежный класс b , содержащий матрицу c из леммы 4, а для подгруппы A можно выбрать порождающий элемент a так, чтобы он соответствовал смежному классу, содержащему ту же матрицу c (Исходя из строения A , приведенного в примере 2). Заметим, что $|B^{G_1}| = |A^{G_2}|$.

Между множествами вершин графов Γ_1 и Γ_2 можно установить биекцию по следующему правилу: пусть $\langle b \rangle^g$ – вершина графа Γ_1 . Тогда элементы b^2 и $(b^2)^g$ будут сопряжены в $SL_n(q)$. Поэтому существует элемент r из $SL_n(q)$ такой, что $(b^2)^r = (b^2)^g$. Следовательно, $\langle b \rangle^g$ будет совпадать с $\langle b \rangle^r$. Тогда вершине $\langle b \rangle^g$ будет соответствовать вершина $\langle a \rangle^r$. Очевидно, что данная биекция будет сохранять отношение смежности, поэтому $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Лемма 7. Пусть $H = GL_{2m}(q)$, $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$, $q+1 \equiv 0 \pmod{4}$, B – циклическая TI-подгруппа порядка 4 из \bar{H} . Тогда максимальная клика из $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ имеет размерность 2^{m-1} .

Доказательство. Пусть S – подгруппа $GL_m(q^2)$, использованная при описании централизатора полуинволюции типа 0 в примере 2. Рассмотрим множество вершин из $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$, построенное следующим образом. Пусть $B = \langle hZ \rangle$, где h соответствует матрице из S вида $[\delta, \dots, \delta]$, Z – центр H .

Случай 1. Пусть 2 является квадратом в поле F_q . Рассмотрим элементы h_1, h_2, \dots, h_s , соответствующие матрицам из S , имеющим вид $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$, где среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ ровно k элементов, равны δ и $m-k$ элементов равны

$-\rho\delta$, где k принимает значения $1, 2, \dots, m$. Таких элементов будет в точности 2^m .

Очевидно, что элементы h_1, h_2, \dots, h_s коммутируют с h , а из леммы 5 следует, что эти элементы сопряжены с h . Заметим, что пересечение централизаторов элементов h_1, h_2, \dots, h_s равно:

$$T = C_H(h_1) \cap C_H(h_2) \cap \dots \cap C_H(h_s) \simeq GL_1(q) \times GL_1(q) \times \dots \times GL_1(q).$$

Из полученного равенства следует, что любой элемент h' , сопряженный с h и централизующий h_1, h_2, \dots, h_s , имеет в S диагональное представление. Заметим, что $(h')^2$ является полуинволюцией типа 0. Следовательно, матрица, представляющая в S элемент $(h')^2$, имеет вид $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$, где любой элемент λ_j равен либо ρ , либо $-\rho$. Тогда существует такой h_i , для которого выполняется равенство $h_i^2 = (h')^2$. (Этот элемент получается с помощью подбора соответствующих квадратных корней из λ_j . Для ρ выбирается δ , а для $-\rho$ выбирается $-\rho\delta$.) Так как элемент h определяет TI-подгруппу в \bar{H} , то можно считать, что h' совпадает с h_i .

Матрицы из S , соответствующие элементам h_1, \dots, h_s , можно разбить попарно следующим образом. Пусть матрица h_i имеет представление в S вида $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]$, где среди $\theta_1, \dots, \theta_m$ ровно k элементов δ и $m - k$ элементов $-\rho\delta$. Тогда элемент, состоящий с ней в паре, будет иметь представление в S вида $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$, где $\sigma_t = -\rho\delta$, если $\theta_t = \delta$ и $\sigma_t = \delta$, если $\theta_t = -\rho\delta$.

Следовательно, $\langle \theta \rangle$ совпадает с $\langle \sigma \rangle$ в группе \bar{H} , каждой такой паре будет соответствовать циклическая TI-подгруппа порядка 4, и в совокупности все эти пары соответствуют максимальной клике из \bar{H} . Отсюда следует, что любая максимальная клика из $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ имеет размерность 2^{m-1} .

Случай 2. Пусть 2 не является квадратом в поле F_q . Рассмотрим элементы h_1, h_2, \dots, h_s , соответствующие матрицам из S , имеющим вид $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$, где среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ ровно k элементов, равны δ и $m - k$ элементов равны $\rho\delta$, где k принимает значения $1, 2, \dots, m$. Таких элементов будет в точности 2^m .

Очевидно, что элементы h_1, h_2, \dots, h_s коммутируют с h , а из леммы 5 следует, что эти элементы сопряжены. Доказательство леммы в данном случае проводится аналогично случаю 1, с учетом того, что элементы h_i группируются попарно следующим образом. Пусть матрица h_i имеет представление в S вида $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]$, где среди $\theta_1, \dots, \theta_m$ ровно k элементов δ и $m - k$ элементов $\rho\delta$. Тогда элемент, состоящий с ней в паре, будет иметь представление в S вида $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$, где $\sigma_t = \rho\delta$, если $\theta_t = \delta$ и $\sigma_t = \delta$, если $\theta_t = \rho\delta$.

Лемма доказана и приводит к случаю (3) из теоремы 1.

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Пусть $G \in X^*$. Если $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, то утверждение теоремы будет следовать из лемм 2 и 3. Если $q + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, то утверждение теоремы будет следовать из леммы 7.

Остался нерассмотренным случай, когда $G \notin X^*$. Тогда имеют место случаи (1), (3), описанные в теореме, приведенной в разделе 2.

По теореме 3 из [8] получим, что в этих случаях граф коммутирования является кокликкой, что приводит нас к случаю (4) из теоремы 1.

REFERENCES

- [1] A.A. Makhnev, *TI-subgroups in groups of characteristic 2 type*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **127**:2 (1985), 239–244.
- [2] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Tightly embedded subgroups with abelian fusion*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **2**:1 (1992), 19–26.
- [3] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in exceptional Chevalley groups*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **3**:1 (1995), 41–49.
- [4] N.D. Zyulyarkina, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in classical Chevalley groups of odd characteristic*, Matematicheskie Trudy, **30**:1 (1996), 89–110.
- [5] Y. Hochheim, F. Timmesfeld, *A note on TI-subgroups*, Arch. Math, **51**:1 (1988), 97–103.
- [6] A.A. Makhnev, *A reduction theorem for TI-subgroups*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **55**:2 (1991), 303–317.
- [7] M. Suzuki, *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent*, Ann. Math, **80**:1 (1964), 58–77.
- [8] N.D. Zyulyarkina, *On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **17**:4 (2011), 114–120.
- [9] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order*, Transactions of the American Mathematical Society, **272**:1 (1982), 1–65.
- [10] M. Ashbacher, *Tightly embedded subgroups of finite groups*, Journal of Algebra, **42**:1 (1976), 85–101.

ANTON ALEKSANDROVICH KUDINOV
SOUTH URAL STATE UNIVERSITY,
LENINA AVENUE, 76,
454080, CHELYABINSK, RUSSIA
Email address: neverdark74@gmail.com

NATALYA DMITRIEVNA ZYULYARKINA
SOUTH URAL STATE UNIVERSITY,
LENINA AVENUE, 76,
454080, CHELYABINSK, RUSSIA
Email address: toddeath@yandex.ru