S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35Q35

АНАЛИЗ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАССОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.В. Бризицкий

and **Ж.Ю. Сарицкая**

Abstract: Control problems for mass transfer equations with variable coefficients are studied. For specific coefficients of kinematic viscosity, diffusion and reaction, optimality systems are derived for strong solutions of the boundary value problem for extremum problems. Based on the analysis of these systems, the bang-bang principle for distributed control is established.

Keywords: generalized Boussinesq model, mass trabsfer equations, variable coefficients, control problem, extremum problem, optimality system, bang-bang principle

---

Brizitskii, R.V. and Saritskaia, Zh.Yu. Analysis of properties of solutions to control problems for mass transfer equations with variable coefficients.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (номер темы: 075-00459-24-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (номер проекта: 075-02-2024-1440).

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

1 Введение. Постановка краевой задачи

Исследование краевых и экстремальных задач для различных моделей тепломассопереноса играет важную роль в решении задачи поиска эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. При этом чем меньше упрощений содержат рассматриваемые модели, тем более достоверной будет проверка предложенных механизмов управления на их реальную эффективность. Одним из распространенных упрощений является предположение о том, что коэффициенты в моделях тепломассопереноса являются постоянными. При этом зависимость коэффициентов кинематической вязкости или диффузии от концентрации вещества и температуры является естественной с физической точки зрения.

Настоящая работа посвящена качественному анализу решений задач управления для модели массопереноса с переменными коэффициентами. Предполагается, что коэффициенты диффузии и кинематической вязкости зависят от концентрации вещества, а коэффициент реакции зависит от концентрации и пространственных переменных.

Сначала отметим работы [1, 2, 3, 4, 5], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для модели реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами и статьи [6, 7, 8] по близким диффузионным моделям и моделям сложного теплообмена.

Отметим далее статьи [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27], посвященные исследованию краевых задач и задач управления для нелинейных моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска, и работы [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38] по усложненным и в том числе реологическим моделям гидродинамики.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается следующая краевая задача:

$$-\mathrm{div}(\nu(\varphi)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \beta\mathbf{G}\varphi,\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\mathrm{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0},\ \ \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, функция φ имеет смысл концентрации вещества, $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \mathrm{const}$ – плотность жидкости, $\nu = \nu(\varphi) > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $\lambda = \lambda(\varphi) > 0$ – коэффициент диффузии, β – коэффициент массового расширения, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ – ускорение свободного падения, $\mathbf{f}$ или f – объемные плотности внешних сил или внешних источники вещества и функция $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ имеет смысл коэффициента реакции, где $\mathbf{x} \in \Omega$. Ниже на задачу (1)–(3) при заданных функциях $\nu, \lambda, \mathbf{f}, f$ и k будем ссылаться, как на задачу 1.

В [27] доказано глобальное существование слабого решения задачи 1 и локальное существование ее сильного решения, для которого получены соответствующие априорные оценки. В [20] указанные оценки выведены без требования ограниченности по норме коэффициента реакции, а также доказана разрешимость задачи управления на слабых решениях задачи 1.

В разд. 5 настоящей работы на сильных решениях задачи 1 для рассматриваемой в [20] задачи управления выводится система оптимальности при конкретных коэффициентах вязкости, диффузии и реакции. Устанавливаются достаточные условия регулярности данной системы. При этом так же используются априорные оценки норм сильного решения задачи 1 через нормы ее исходных данных, полученные в [20] и приведенные в разд. 4. Отметим, что методы [20] позволяют выводить указанные оценки при степенных младших коэффициентах в уравнениях, что естественно, в том числе, и для ряда близких моделей (см., например, [17] и [6, 7, 8]).

В разд. 6 на основе анализа данной системы устанавливается свойство релейности (или проверяется выполнение принципа bang–bang) распределенного управления для одной из экстремальных задач.

2 Слабое решение и его свойства

Ниже будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D означает либо область Ω, либо некоторое подмножество $Q \subset \Omega$, либо границу Γ или её часть $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать, соответственно, норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярное произведение в $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будет обозначаться $\|\cdot\|_Q$, $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)$. Через X^* обозначим сопряженное пространство к гильбертовому пространству X, а отношение двойственности для пары пространств X и X^* будем записывать, как $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или просто как $\langle\cdot,\cdot\rangle$, если это не приведет к путанице.

Будем так же использовать следующие функциональные пространства:

$$H^0(\mathrm{div},\Omega) = \{\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 \text{ в } \Omega\},\ L_0^2(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) : (h,1) = 0\},$$

$$H = \{\mathbf{v} \in H^0(\mathrm{div},\Omega) : \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0 \text{ in } H^{-1/2}(\Gamma)\},\ V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3 : \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega\},$$

и функциональное множество

$$L_+^p(\Omega) = \{k \in L^p(\Omega) : k \geq 0\},\ \ p \geq 3/2.$$

Определим произведения пространств

$$X = H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega),\ W = V \times H_0^1(\Omega),$$

наделенные нормой

$$\|\mathbf{x}\|_X^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|\varphi\|_{1,\Omega}^2,\ \mathbf{x} = (\mathbf{u},\varphi) \in X$$

и пространство $X^* = (H^{-1}(\Omega)^3)^* \times H^{-1}(\Omega)$, двойственное к X.

При работе с сильным решением задачи 1 будем использовать произведение пространств:

$$X_s = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

с нормой
$$\|(\mathbf{v},h)\|^2_{X_s} = \|\mathbf{v}\|^2_{2,\Omega} + \|h\|^2_{2,\Omega}.$$

Пусть выполняются следующие условия:

(H.2.1) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(H.2.2) $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{b} = \beta\mathbf{G} \in L^2(\Omega)^3$;

(H.2.3) для любой функции $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ справедливо вложение $k(\varphi,\cdot) \in L^d_+(\Omega)$, $d \geq 3/2$, где d не зависит от φ; и на любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1_0(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство:
$$\|k(\varphi_1,\cdot) - k(\varphi_2,\cdot)\|_{L^d(\Omega)} \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \ \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in B_r.$$
Здесь L – константа, которая зависит от r, но не зависит от $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$;

(H.2.4) функции $\nu(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ – непрерывны при $\tau \in \mathbb{R}$, и существуют положительные константы $\nu_{\min}, \nu_{\max}, \lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ такие, что
$$0 < \nu_{\min} \leq \nu(\tau) \leq \nu_{\max}, \ 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_{\max} \ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что условие (H.2.3) описывает оператор, действующий из $H^1_0(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$, где $q \geq 3/2$ (см. [3, 4]). Например,
$$k = \varphi^2 \text{ (или } k = \varphi^2|\varphi|) \text{ в подобласти } Q \subset \Omega \text{ и}$$
$$k = k_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Omega \setminus \overline{Q}) \text{ в } \Omega \setminus \overline{Q}.$$

Напомним, что по теореме вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка
$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s\|\varphi\|_{1,\Omega} \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

Будем использовать следующую техническую лемму (см. [40, 41]).

Лемма 2.1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1) *и* (H.2.4), $k_0 \in L^q(\Omega), q \geq 3/2$, $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)^3$. *Тогда существуют такие положительные константы* $\delta_0, \delta_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_p, \beta$ *и* β_0, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *с которыми выполняются следующие соотношения:*
$$|(\nu(h)\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w})| \leq \nu_{\max}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in H^1_0(\Omega)^3, \tag{5}$$
$$(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) \geq \delta_0\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega},$$
$$(\nu(\varphi)\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) \geq \nu_*\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \ \varphi \in H^1_0(\Omega), \ \nu_* = \nu_{\min}\delta_0, \tag{6}$$
$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}), \ ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in H^1_0(\Omega)^3, \tag{7}$$
$$|(\mathbf{b}h, \mathbf{v})| \leq \beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega\|h\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, h \in H^1_0(\Omega), \tag{8}$$
$$|((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{h}, \mathbf{v})| \leq \gamma_1\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{w},\mathbf{h},\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \tag{9}$$
$$\sup_{\mathbf{v}\in H^1_0(\Omega)^3, \mathbf{v}\neq\mathbf{0}} -(\operatorname{div}\mathbf{v}, p)/\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta\|p\|_\Omega \ \ \forall p \in L^2_0(\Omega), \tag{10}$$
$$|(\lambda(\varphi)\nabla h, \nabla\eta)| \leq \lambda_{\max}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \ \forall \varphi, h, \eta \in H^1_0(\Omega), \tag{11}$$
$$|(k_0 h, \eta)| \leq \gamma_q\|k_0\|_{L^p(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \ \forall h, \eta \in H^1_0(\Omega), \tag{12}$$
$$|(\mathbf{w}\cdot\nabla h, \eta)| \leq \gamma_2\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{w} \in H^1_0(\Omega)^3, \ h, \eta \in H^1_0(\Omega), \tag{13}$$
$$(\nabla h, \nabla h) \geq \delta_1\|h\|^2_{1,\Omega}, \ \ (\lambda(\varphi)\nabla h, \nabla h) \geq \lambda_*\|h\|^2_{1,\Omega}, \quad \lambda_* \equiv \delta_1\lambda_{\min},$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla h, h) = 0 \ \ \forall h, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{14}$$

Умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$, а уравнение (2) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применив формулы Грина. Приходим к слабой формулировке задачи 1, которая заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$(\nu(\varphi)\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{b}\varphi, \mathbf{v}) \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \tag{15}$$

$$(\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = \langle f, h\rangle \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{17}$$

Определение 2.1. Тройку $(\mathbf{u}, \varphi, p)$, удовлетворяющую (15)–(17), назовем слабым решением задачи 1.

Справедлива следующая теорема [27].

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1)–(H.2.4). *Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи 1 и справедливы оценки:*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le M_\varphi \equiv C_*\|f\|_{-1,\Omega}, \ \ C_* = \lambda_*^{-1} \equiv (\delta_1\lambda_{\min})^{-1}, \tag{18}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le M_{\mathbf{u}} = \nu_*^{-1}(\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + \beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega M_\varphi), \ \ \nu_* = \nu_{\min}\delta_0, \tag{19}$$

$$\|p\|_\Omega \le M_p = \beta_*^{-1}[(\nu_{\max}+\gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + \beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega M_\varphi], \ \beta_* = (\beta-\varepsilon), \ \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Одним из интересных свойств слабого решения $(\mathbf{u}, \varphi, p)$ задачи 1 может являться принцип максима для его компоненты φ.

Пусть $f_{\max}$ – положительное число и выполняется условие:

(H.2.5) $f \in L^2(\Omega) : 0 \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω;

(H.2.6) нелинейность $k(\varphi,\cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \ge 0 \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega).$$

Будем предполагать, что коэффициент реакции имеет вид:

(H.2.7) $k(\varphi, \boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})k_1(\varphi)$, где $k_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция,

$$a_{\min} \le a(\boldsymbol{x}) \le a_{\max} \text{ п. в. в } \Omega,$$

$a_{\min}, a_{\max}$ – положительные числа, и уравнение

$$k_1(s)s = f_{\max}/a_{\min} \tag{21}$$

имеет, по крайней мере, одно (положительное) решение.

Справедлива следующая теорема (см. [27]).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (H.2.1)–(H.2.3) *и* (H.2.5)–(H.2.7), *функции* $\nu(\tau)$ *и* $\lambda(\tau)$ *непрерывны при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и справедливы оценки:*

$$\nu_{\min} \le \nu(\tau) < \infty, \ \lambda_{\min} \le \lambda(\tau) < \infty \ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Тогда для компоненты φ *слабого решения* $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи 1 справедлив следующий принцип максимума:*

$$0 \le \varphi \le M \text{ п.в. в } \Omega, \tag{22}$$

где M – минимальный (положительный) корень уравнения (21).

Замечание 2.1. Для степенных коэффициентов реакции параметр M легко вычисляется. Например, в случае $k(\varphi)=\varphi^2$ мы получаем, что $M=f_{\max}^{1/3}$.

О других вариантах принципа максимума см. [5, 20].

3 О сильном решении задачи 1

В данном разделе сформулируем теоремы о локальном существовании и единственности сильного решения задачи 1. Как и в [27], [20] будем использовать следующие неравенства, справедливые для области Ω с границей $\Gamma\in C^2$:

$$\|\Delta h\|_\Omega \le \tilde C_1\|h\|_{2,\Omega},\ \ \|h\|_{2,\Omega}\le \tilde C_2\|\Delta h\|_\Omega\ \ \forall h\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

$$\|\Delta \mathbf{v}\|_\Omega \le \tilde C_3\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega},\ \ \|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}\le \tilde C_4\|\Delta \mathbf{v}\|_\Omega\ \ \forall \mathbf{v}\in H^2(\Omega)^3\cap H_0^1(\Omega)^3, \tag{23}$$

$$\|\nabla h\|_{L^4(\Omega)^3}\le \tilde C_5\|\Delta h\|_\Omega\ \ \forall h\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^3}\le \tilde C_6\|\Delta \mathbf{v}\|_\Omega\ \forall \mathbf{v}\in H^2(\Omega)^3\cap H_0^1(\Omega)^3, \tag{24}$$

$$\|h\|_{L^d(\Omega)}\le B_d\|h\|_{2,\Omega},\ \|\mathbf{v}\|_{L^d(\Omega)^3}\le \tilde B_d\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}\ \forall h\in H^2(\Omega),\ \mathbf{v}\in H^2(\Omega)^3,\ 1\le d\le\infty. \tag{25}$$

Здесь и ниже $\tilde C_i,\ i=1,2,...$ – положительные константы, зависящие от Ω, B_d и $\tilde B_d$ – положительные константы, зависящие от Ω и d.

Пусть выполняются условия:

(H.3.1) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma\in C^2$;

(H.3.2) функции ν и λ из класса C^1, причем

$$\nu_{\min}\le\nu(s)\le\nu_{\max},\ \ \nu'_{\min}\le\nu'(s)\le\nu'_{\max},$$

$$\lambda_{\min}\le\lambda(s)\le\lambda_{\max},\ \ \lambda'_{\min}\le\lambda'(s)\le\lambda'_{\max}\ \ \forall s\in\mathbb{R},$$

где $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $\nu'_{\min}$, $\nu'_{\max}$ и $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\lambda'_{\min}$, $\lambda'_{\max}$ – положительные числа;

(H.3.3) будем предполагать, что условие (H.2.3) выполняется при $d\ge 2$ (вместо $d\ge 3/2$) и справедлива оценка:

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^d(\Omega)}\le C_k\|\Delta\varphi\|_\Omega^r\ \ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega),\ d\ge 2,\ r>0,$$

где C_k – положительная константа, зависящая от функции k, параметра d и Ω;

(H.3.4) $\mathbf{f}\in L^2(\Omega)^3,\ f\in L^2(\Omega),\ \mathbf{b}\equiv\beta\mathbf{G}\in L^2(\Omega)^3$.

Как и в [9], будем использовать оператор Стокса $\tilde\Delta$, действующий по формуле:

$$\tilde\Delta=-P_L\Delta:\mathrm{Dom}(\tilde\Delta)\subset L^2(\Omega)^3\to L^2(\Omega)^3,$$

где P_L – проектор Лере, $\mathrm{Dom}(\tilde\Delta)=V\cap H^2(\Omega)^3$ – область оператора $\tilde\Delta$. Хорошо известно, что для любой функции $\mathbf{u}\in H^2(\Omega)^3\cap V$ справедливо следующее разложение (см. [39]):

$$-\Delta\mathbf{u}=\tilde\Delta\mathbf{u}+\nabla q. \tag{26}$$

Здесь функция $q \in H^1(\Omega)$ однозначно определяется по функции $\mathbf{u}$, и справедливы следующие оценки [39]:

$$\|q\|_{1,\Omega} \leq \tilde{C}_7 \|\tilde{\Delta}\mathbf{u}\|_\Omega, \quad \|\Delta\mathbf{u}\|_\Omega \leq (\tilde{C}_7 + 1)\|\tilde{\Delta}\mathbf{u}\|_\Omega. \tag{27}$$

Справедлива техническая лемма (см. [27], [20]).

Лемма 3.1. *Пусть выполняется условие* (H.3.1) $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)^3$, $k_0 \in L^d(\Omega)$, $d \geq 2$, *функция* $\nu(\cdot) \in C^1$ *удовлетворяет первому условию в* (H.3.2), q *– функция,связанная с* $\mathbf{u}$ *формулой* (26). *Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$|(\nu'(c)\nabla c\,\nabla\mathbf{v}, \Delta\mathbf{w})| \leq \beta_1 \nu'_{\max}\|\Delta c\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{v}\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{w}\|_\Omega,$$

$$|(\mathbf{b}h, \Delta\mathbf{w})| \leq \beta_2 \|\mathbf{b}\|_\Omega \|\Delta h\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{w}\|_\Omega$$

$$\forall c, h \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \mathbf{w}, \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3, \tag{28}$$

$$|((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \tilde{\Delta}\mathbf{u})| \leq \beta_3 \|\tilde{\Delta}\mathbf{w}\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{v}\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{u}\|_\Omega \ \ \forall \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3, \tag{29}$$

$$|(\lambda'(c)\nabla c\cdot\nabla h, \Delta\eta)| \leq \lambda'_{\max}\beta_4 \|\Delta c\|_\Omega \|\Delta h\|_\Omega \|\Delta\eta\|_\Omega,$$

$$|(k_0 h, \Delta\eta)| \leq \beta_5 \|k_0\|_{L^d(\Omega)} \|\Delta h\|_\Omega \|\Delta\eta\|_\Omega \ \forall c, h, \eta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{30}$$

$$|(\mathbf{s}\cdot\nabla h, \Delta\eta)| \leq \beta_6 \|\tilde{\Delta}\mathbf{s}\|_\Omega \|\Delta h\|_\Omega \|\Delta\eta\|_\Omega$$

$$\forall \mathbf{s} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3, h, \eta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{31}$$

$$|(\nu(c)\nabla q, \tilde{\Delta}\mathbf{u})| \leq \nu'_{\max}\beta_7 \|\Delta c\|_\Omega \|\tilde{\Delta}\mathbf{u}\|^2_\Omega \ \ \forall c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap V. \tag{32}$$

Здесь $\nabla c\,\nabla\mathbf{v}$ *обозначает векторное поле,* i*-ая компонента которого определяется по формуле:* $[\nabla c\,\nabla\mathbf{v}]_i = \nabla c\cdot\nabla\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, *а* β_j, $j = 1, 2, ...$ *– положительные константы, зависящие от* Ω *или от* Ω *и* d.

Определение 3.1. Сильным решением задачи 1 назовем тройку $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in X_s \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$, удовлетворяющую (1), (2) п.в. в Ω.

Справедлива следующая теорема (см. [20]).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (H.3.1)–(H.3.4) *и условия малости*

$$2\beta_3(2\beta_2\|\mathbf{b}\|_\Omega(1/\lambda_{\min})\|f\|_\Omega + (1/\nu_{\min})\|\mathbf{f}\|_\Omega) + 2\nu'_{\max}(\beta_1+\beta_7)(1/\lambda_{\min})\|f\|_\Omega \leq \nu_{\min}/2,$$

$$2\beta_6(2(\beta_2/\nu_{\min}\|\mathbf{b}\|_\Omega)(1/\lambda_{\min})\|f\|_\Omega + (1/\nu_{\min})\|\mathbf{f}\|_\Omega) +$$

$$+ 2\lambda'_{\max}\beta_4(1/\lambda_{\min})\|f\|_\Omega + \beta_5 C_k (2/\lambda_{\min})^r \|f\|^r_\Omega \leq \lambda_{\min}/2, \ \ r > 0. \tag{33}$$

Тогда существует сильное решение $((\mathbf{u}, \varphi), p) \in X_s \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ *задачи 1 такое, что*

$$-\mathrm{div}(\nu(\varphi)\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{b}\varphi,\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \ \textit{п.в. в}\ \Omega, \tag{34}$$

$$-\mathrm{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi, \cdot)\varphi = f \ \ \textit{п.в. в}\ \Omega \tag{35}$$

и справедливы априорные оценки:

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq M^0_{\mathbf{u}} \equiv 2(1/\nu_{\min})\tilde{C}_4(\tilde{C}_7 + 1)[2\beta_2(1/\lambda_{\min})\|\mathbf{b}\|_\Omega \|f\|_\Omega + \|\mathbf{f}\|_\Omega], \tag{36}$$

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \leq M^0_\varphi \equiv (2/\lambda_{\min})\tilde{C}_2\|f\|_\Omega, \tag{37}$$

$$\|p\|_{1,\Omega} \leq M^0_p \equiv M_p + \beta_2 M^0_\varphi \|\mathbf{b}\|_\Omega + \nu_{\max}\tilde{C}_3 M^0_{\mathbf{u}} + \beta_8 (M^0_{\mathbf{u}})^2 +$$

$$+\beta_9\nu'_{\max}M^0_\varphi M^0_{\mathbf{u}}+\|\mathbf{f}\|_\Omega,\ \ \beta_8=\tilde{B}_4\tilde{C}_3\tilde{C}_6,\ \ \beta_9=\tilde{C}_2\tilde{C}_3\tilde{C}_5\tilde{C}_6. \tag{38}$$

Здесь константы $\tilde{C}_k$, $k=2,3,...,7$, определены в (23), (24), (27) и (32), где константа M_p определена в (20), β_i, $i=1,...,7$, – константы из леммы 3.1 и (32), константа $\tilde{B}_4$ введена в (25).

В заключение докажем единственность “малого” по соответствующим нормам слабого решения $(\mathbf{u},\varphi,p)$ задачи 1, компонента φ которого обладает дополнительной гладкостью: $\Delta\varphi\in L^2(\Omega)$.

Пусть выполняется условие:

(H.3.5) функции ν, λ и λ' являются непрерывными по Липшицу так, что существую положительные константы L_ν, L_λ и L'_λ, с которыми справедливы неравенства:

$$|\nu(s_1)-\nu(s_2)|\le L_\nu|s_1-s_2|,$$

$$|\lambda(s_1)-\lambda(s_2)|\le L_\lambda|s_1-s_2|,\ \ |\lambda'(s_1)-\lambda'(s_2)|\le L'_\lambda|s_1-s_2|\ \ \forall s_1,s_2\in\mathbb{R}.$$

Справедлива следующая теорема (см. [20]).

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия* (H.3.1)–(H.3.4) *и* (H.3.5). *Тогда существует такое (малое) положительное число $\varepsilon>0$, что если существует слабое решение $(\mathbf{u},\varphi,p)\in V\times(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))\times L^2_0(\Omega)$ задачи, удовлетворяющее неравенству*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}+\|\varphi\|_{2,\Omega}<\varepsilon,$$

то оно единственно.

4 Задача оптимального управления

В данном разделе рассмотрим задачу распределенного управления на слабых решениях задачи 1, роль управления в которой играет функция f. Будем считать, что управление f может изменяться в некотором множестве K и положим $\mathbf{x}=(\mathbf{u},\varphi,p)$.

Введем функциональное пространство $\mathcal{X}=X\times L^2_0(\Omega)$ и оператор $F:\mathcal{X}\times K\to\mathcal{X}^*$ по формуле

$$\langle F(\mathbf{x},u),(\mathbf{v},h)\rangle=(\nu(\varphi)\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+(\lambda(\varphi)\nabla\varphi,\nabla h)+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})-(p,\operatorname{div}\mathbf{v})+$$

$$+(k(\varphi,\cdot)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)-\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle-(f,h)-(\mathbf{b}\varphi,\mathbf{v})\ \ \forall(\mathbf{v},h)\in X \tag{39}$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде $F(\mathbf{x},f)=0$.

Рассмотрим следующую задачу управления

$$J(\mathbf{x},f):=\frac{\mu_0}{2}I(\mathbf{x})+\frac{\mu_1}{2}\|f\|^2_\Omega\to\min,\ F(\mathbf{x},f)=0,\ (\mathbf{x},f)\in\mathcal{X}\times K, \tag{40}$$

где $I\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал.

Через

$$Z_{\text{ad}}:=\{(\mathbf{x},f)\in\mathcal{X}\times K:\ F(\mathbf{x},f)=0\text{ и }J(\mathbf{x},f)<\infty\}$$

обозначим множество допустимых пар для задачи (40) и пусть выполняются следующие условия:

(H.4.1) $K\subset L^2(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое множество;

(H.4.2) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$ или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2, \;\; I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2,$$

$$I_3(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^d\|_{1,Q}^2, \;\; I_4(\mathbf{u}) = \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \zeta^d\|_Q^2, \;\; I_5(p) = \|p - p^d\|_Q^2. \qquad (41)$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (или $\varphi^d \in H^1(Q)$), $\mathbf{u}^d \in H^1(Q)^3$, $\zeta^d \in L^2(Q)^3$ и $p \in L^2(Q)$ – функции, заданные в подобласти $Q \subset \Omega$.

Справедлива следующая теорема (см. [20]).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1)–(H.2.4) *и* (H.4.1), (H.4.2) *и пусть* $I : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *– слабо полунепрерывный снизу функционал и множество* Z_{ad} *не пусто. Тогда задача* (40) *имеет, по крайней мере, одно решение* $(\mathbf{x}, f) \in \mathcal{X} \times K$.

5 Вывод системы оптимальности

В этом разделе мы выведем систему оптимальности для задачи управления (40) на сильных решениях задачи 1 при конкретных коэффициентах вязкости, диффузии и реакции:

$$\nu(t) = \lambda(t) = \frac{1}{1+t^2} + 1, \;\; k(t) = t^2, \; t \in \mathbb{R}.$$

Через $\nu'(t)$ и $\lambda'(t)$ обозначим первые производные функций $\nu(t)$ и $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что

$$\nu'(t) = \lambda'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\nu'(\varphi) \leq \nu'_{\max} \text{ и } \lambda'(\varphi) \leq \lambda'_{\max} \text{ п.в. в } \Omega \;\; \forall \varphi \in H^1(\Omega), \;\; \nu'_{\max} = \lambda'_{\max} = 1.$$

Рассмотрим производную Фреше от оператора $F : \mathcal{X} \times K \to Y \equiv \mathcal{X}^*$ по состоянию $\mathbf{x}$ в точке локального минимума $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{f})$ задачи (40). При условии (H.3.1) в силу теории эллиптической регулярности имеем, что $\hat{\mathbf{u}} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3$, $\hat{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$. Указанная производная есть линейный непрерывный оператор

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) : \mathcal{X} \to Y \equiv \mathcal{X}^*,$$

ставящий каждому элементу $(\mathbf{w}, h, r) \in X$ элемент $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})(\mathbf{w}, h, r) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y$.

Здесь $\hat{y}_1 \in X^* = H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$ и $\hat{y}_2 \in L_0^2(\Omega)$ определяются по тройкам $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p})$ и $(\mathbf{w}, \tau, r)$ из следующих соотношений:

$$\langle \hat{y}_1, (\mathbf{v}, \tau) \rangle = (\nu'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{v}) + (\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + (\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) +$$

$$+ ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) +$$

$$(\mathbf{w}\cdot\nabla\hat{\varphi}, h) + (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, h) - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, r) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) \;\; \forall (\mathbf{v}, \tau) \in X = H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega),$$

$$\langle \hat{y}_2, r \rangle = -(\mathrm{div}\,\mathbf{w}, r) \;\; \forall r \in L_0^2(\Omega). \qquad (42)$$

Через $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})^* : Y^* \to \mathcal{X}^*$ обозначим оператор, сопряженный к $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})$.

В соответствии с общей теорией гладко-выпуклых экстремальных задач [42], введем элемент $\mathbf{y}^* = ((\xi,\theta),\sigma) \in Y^*$, на который будем ссылаться, как на сопряженное состояние и введем Лагранжиан $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, f, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, f) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, f)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, f) + \\ + \langle F_1(\mathbf{x}, f), (\xi,\theta)\rangle_{X^*\times X} + (F_2(\mathbf{x}, f), s). \tag{43}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* (H.3.1), (H.3.4) *и* (H.4.1), (H.4.2) *и* $\nu(\varphi) = \lambda(\varphi) = 1/(1+\varphi^2)+1$, $k(\varphi) = \varphi^2$ *и элемент* $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{f}) \in X_s \cap (H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)) \times K$ *– точка локального минимума в задаче (40). Пусть так же функционал качества* $I : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$.

Тогда:

1) существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \xi, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *с которым справедливо уравнение Эйлера–Лагранжа*

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) \text{ в } \mathcal{X}^*,$$

эквивалентное соотношениям

$$(\nu'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\mathbf{u}}, \nabla\xi) + (\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\xi) + (\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla\theta) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla\theta) + \\ + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \xi) + ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}, \xi) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, \theta) - \\ -(\operatorname{div}\mathbf{w}, \sigma) + (\mathbf{w}\cdot\nabla\hat{\varphi}, \theta) + (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, \theta) - (\mathbf{b}\tau, \xi) = \\ = -\lambda_0(\mu_0/2)(\langle I'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{w}\rangle + \langle I'_{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}), \tau\rangle) \; \forall(\mathbf{w}, \tau) \in X = H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega), \tag{44}$$

$$(\operatorname{div}\xi, r) = \lambda_0(\mu_0/2)(I'_p(\hat{\mathbf{x}}), r) \;\; \forall r \in L^2_0(\Omega) \tag{45}$$

и справедлив принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \le \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, f, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \quad \forall f \in K$$

эквивалентный неравенству

$$\lambda_0\mu_1(\hat{f}, f - \hat{f}) - (f - \hat{f}, \theta) \ge 0 \;\; \forall f \in K. \tag{46}$$

2) Если, к тому же, выполняются условия:

$$\gamma_2\|\hat{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} + (1/2)\gamma_2\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega} + (1/2)\beta_0\|\mathbf{b}\|_{\Omega} < \nu_*, \\ \lambda'_{\max} C_4 \tilde{C}_1 \tilde{C}_5 \|\hat{\varphi}\|_{2,\Omega} + (1/2)\gamma_2\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega} + (1/2)\beta_0 < \lambda_*, \tag{47}$$

то нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий (44)–(46), является регулярным, т.е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$ *и определяется единственным образом по паре* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})$.

Доказательство.

Согласно [42, гл. 2], для доказательства существования множителя Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ достаточно показать, что $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) : \mathcal{X} \to Y = \mathcal{X}^*$ – Фредгольмов оператор. В силу (42), оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) : \mathcal{X} \to Y$ можно представить в виде

$$F'_{\mathbf{x}} = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2) + (\hat{\Phi}_1, 0).$$

Здесь
$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{w}, \ \ \forall \mathbf{x} = (\mathbf{w}, \tau, r) \in \mathcal{X},$$
а операторы Φ_1 и $\hat{\Phi}_1 : \mathcal{X} \to Y$ определяются по формулам
$$\langle \Phi_1(\mathbf{w}, \tau, r), (\mathbf{v}, h)\rangle = (\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) +$$
$$+3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, h) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, r) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) \ \ \forall (\mathbf{v}, h) \in X,$$
$$\langle \hat{\Phi}_1(\mathbf{w}, \tau, r), (\mathbf{v}, h)\rangle = (\nu'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{v}) + (\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h) +$$
$$+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w}\cdot\nabla\hat{\varphi}, h) \ \ \forall (\mathbf{v}, h) \in X. \tag{48}$$

Покажем, что оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \mathcal{X} \to Y$ – изоморфизм. Для этого следует доказать, что для любой пары $(\mathbf{F}, s) \in Y$ существует единственное решение $(\mathbf{w}, \tau, r) \in \mathcal{X}$ линейной задачи
$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) +$$
$$+(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, h) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, r) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle \ \ \forall (\mathbf{v}, h) \in X, \tag{49}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{w} = s \text{ в } \Omega. \tag{50}$$

Несложно показать, что задача (49), (50) эквивалентна задаче
$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, r) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) =$$
$$= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{-1,\Omega} \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \ \operatorname{div}\mathbf{w} = s \text{ в } \Omega, \tag{51}$$
$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, h) + (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, h) = \langle f, h\rangle \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{52}$$
где $\langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle_{X^*\times X} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + \langle f, h\rangle$.

Через $V^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к пространству V относительно скалярного произведения $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)_\Omega$. Поскольку $s \in L_0^2(\Omega)$, то существует единственная функция $\mathbf{w}_1 \in V^\perp$ (см. [40]), такая что $\operatorname{div}\mathbf{w}_1 = s$ и $\|\mathbf{w}_1\|_{1,\Omega} \le \beta_1^{-1}\|s\|_\Omega$, где константа β_1 определена в (10).

Рассмотрим сужение (51) на пространство V:
$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \ \forall \mathbf{v} \in V, \ \operatorname{div}\mathbf{w} = s \text{ в } \Omega. \tag{53}$$
Функцию $\mathbf{w}$ будем искать в виде суммы: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \tilde{\mathbf{w}}$, где $\tilde{\mathbf{w}} \in V$ – неизвестная функция. Подставляя $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \tilde{\mathbf{w}}$ в (53), получим
$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\tilde{\mathbf{w}}, \nabla\mathbf{v}) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) =$$
$$= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle - (\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}_1, \nabla\mathbf{v}) - ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}_1, \mathbf{v}) \ \ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{54}$$

Из теоремы Лакса–Мильграма и леммы 2.1 вытекает существование единственного решения $\tau \in H_0^1(\Omega)$ задачи (52), для которого справедлива оценка:
$$\|\tau\|_{1,\Omega} \le C_*\|f\|_{-1,\Omega}, \tag{55}$$
а так же (при любом фиксированном $\tau \in H_0^1(\Omega)$) существует единственное решение $\tilde{\mathbf{w}} \in V$ задачи (54). Из (54) с использованием (55) получаем следующую оценку для $\tilde{\mathbf{w}}$:
$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \le M_{\tilde{\mathbf{w}}} \equiv \nu_*^{-1}(\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + \beta_0 C_*\|f\|_{-1,\Omega} + \beta_1^{-1}(\nu_{\max} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})\|s\|_\Omega).$$

Тогда функция $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{w}_1$ является решением задачи (53), для которого справедлива оценка:

$$\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \le M_{\mathbf{w}} \equiv M_{\tilde{\mathbf{w}}} + \beta_1^{-1}\|s\|_{\Omega}. \tag{56}$$

Рассуждая, как в [41], заключаем, что тройка $(\mathbf{w}, \tau, r) \in \mathcal{X}$ является решением задачи (49), (50). По аналогии с (20), из (51) с использованием (55) и (56), выводим оценку для $\|r\|_{\Omega}$:

$$\|r\|_{\Omega} \le \beta_2^{-1}(\nu_{\max} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{w}} + \beta_2^{-1}(\beta_0 C_* \|f\|_{-1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}). \tag{57}$$

Пусть $(\mathbf{w}_1, \tau_1, r_1)$ и $(\mathbf{w}_2, \tau_2, r_2)$ – два решения задачи (49), (50). Тогда разности $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $\tau = \tau_1 - \tau_2$ и $r = r_1 - r_2$ удовлетворяют соотношениям

$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + (\lambda(\hat{\varphi})\nabla\tau, \nabla h) + ((\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}) + 3(\hat{\varphi}^2 h, \tau) +$$
$$+(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau, h) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, r) - (\mathbf{b}\tau, \mathbf{v}) = 0 \ \ \forall(\mathbf{v}, h) \in X, \tag{58}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{59}$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и $h = \tau$ в (58), приходим к соотношению

$$(\hat{\lambda}\nabla\tau, \nabla\tau) + 3(\hat{\varphi}^2\tau, \tau) = 0,$$

из которого в силу (14) вытекает, что $\tau = 0$ или $\tau_1 = \tau_2$ в Ω.

С учетом этого, подставляя $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ в (58), аналогично получаем, что $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ в Ω. Тогда из (58) и (10) следует, что $r_1 = r_2$ в Ω. В таком случае, оператор $\Phi : \mathcal{X} \to Y$ – сюръективен и обратим. Тогда по теореме Банаха он является изоморфизмом.

Покажем, что оператор $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, 0) : \mathcal{X} \to Y$, определенный формулой (48), является непрерывным и компактным. Поскольку пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L^p(\Omega)$, где $p < 6$, (аналогично для векторных пространств: $H^1(\Omega)^3 \subset L^p(\Omega)^3)$, то указанный факт вытекает из следующих оценок:

$$|(\nu'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{v})| \le \nu'_{\max}\|\tau\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\hat{\mathbf{u}}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3},$$
$$|(\lambda'(\hat{\varphi})\tau\nabla\hat{\varphi}, \nabla h)| \le \lambda'_{\max}\|\tau\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\nabla h\|_{L^2(\Omega)^3},$$
$$|(\mathbf{w}\cdot\nabla\hat{\varphi}, h)| \le \gamma'_2\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega},\ |((\mathbf{w}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \le \gamma'_1\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\hat{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}.$$

В таком случае, оператор $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, f) : \mathcal{X} \to Y$ – Фредгольмов, как сумма изоморфизма $\Phi : \mathcal{X} \to Y$ и непрерывного компактного оператора $\hat{\Phi} : \mathcal{X} \to Y$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 5.1 достаточно показать, что однородная система (44), (45) (при $\lambda_0 = 0$) имеет только тривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\xi, \theta, \sigma) \equiv \mathbf{0}$. Предположим противное, т.е., что существует по крайней мере одно нетривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\xi, \theta, \sigma) \in Y^*$ системы (44), (45) при $\lambda_0 = 0$, где элементы $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p})$ и $\hat{f}$ связаны соотношением $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) = 0$.

Подставляя $\tau = 0$, $\mathbf{w} = \xi$ и $r = \sigma$ в (44), (45), приходим к соотношению:

$$(\nu(\hat{\varphi})\nabla\xi, \nabla\xi) + ((\xi\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}, \xi) = -(\xi\cdot\nabla\hat{\varphi}, \theta),$$

из которого получаем неравенство:

$$\nu_*\|\xi\|^2_{1,\Omega} \le \gamma_2\|\hat{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}\|\xi\|^2_{1,\Omega} + (1/2)\gamma_2\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega}(\|\xi\|^2_{1,\Omega} + \|\theta\|^2_{1,\Omega}). \tag{60}$$

Полагая $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ и $\tau = \theta$ в (44), получим

$$(\lambda(\hat{\varphi})\nabla\theta, \nabla\theta) + (\lambda'(\hat{\varphi})\theta\nabla\hat{\varphi}, \nabla\theta) + 3(\hat{\varphi}^2\theta, \theta) \le \beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega\|\theta\|_{1,\Omega}\|\xi\|_{1,\Omega}. \tag{61}$$

Из (61) с учетом (4), (23), выводим

$$\lambda_*\|\theta\|^2_{1,\Omega} \le \lambda'_{\max}C_4\tilde{C}_1\tilde{C}_5\|\hat{\varphi}\|_{2,\Omega}\,\|\theta\|^2_{1,\Omega} + (1/2)\beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega(\|\theta\|^2_{1,\Omega} + \|\xi\|^2_{1,\Omega}). \tag{62}$$

Складывая (60) и (62), приходим к неравенству

$$\nu_*\|\xi\|^2_{1,\Omega} + \lambda_*\|\theta\|^2_{1,\Omega} \le (\gamma_2\|\hat{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} + (1/2)\gamma_2\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega} + (1/2)\beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega)\|\xi\|^2_{1,\Omega} +$$
$$+ (\lambda'_{\max}C_4\tilde{C}_1\tilde{C}_5\|\hat{\varphi}\|_{2,\Omega} + (1/2)\gamma_2\|\hat{\varphi}\|_{1,\Omega} + (1/2)\beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega)\|\theta\|^2_{1,\Omega}. \tag{63}$$

Из (63) вытекает, что если выполняются условия (47), то $\theta = 0$ и $\xi = \mathbf{0}$ п.в. в Ω.

Тогда (44) принимает следующий вид:

$$(\operatorname{div}\mathbf{w}, \sigma) = 0 \ \ \forall \mathbf{w} \in H^1_0(\Omega)^3.$$

Тогда из (10) вытекает, что $\sigma = 0$ в Ω.

Последнее противоречит предположению о нетривиальности множителя Лагранжа $(\xi, \theta, \sigma) \in Y^*$. Единственность регулярного множителя Лагранжа $(1, \mathbf{y}^*)$ при выполнении условий (47) вытекает из Фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) : \mathcal{X} \to Y$. ■

Следующая теорема вытекает из теоремы 3.1 и доказательств предыдущей теоремы.

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия* (H.3.1), (H.3.4) *и* (H.4.1), (H.4.2) *и* $\nu(\varphi) = \lambda(\varphi) = 1/(1+\varphi^2)+1$, $k(\varphi) = \varphi^2$, *условия (33) и элемент* $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{f}) \in X_s \cap (H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)) \times K$ *– точка локального минимума в задаче (40), причем для тройки* $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p})$ *справедливы оценки (36)–(38). Пусть так же функционал качества* $I : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$. *Тогда:*

1) существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \xi, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *с которым справедливо уравнение Эйлера–Лагранжа* $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})^*\mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})$ *в* $\mathcal{X}^*$, *эквивалентное соотношениям (44), (45) и справедлив принцип минимума*

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \le \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, f, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \quad \forall f \in K$$

эквивалентный неравенству (46).

2) Если, к тому же, выполняются условия:

$$\gamma_2 M_{\mathbf{u}} + (1/2)\gamma_2 M_\varphi + (1/2)\beta_0\|\mathbf{b}\|_\Omega < \nu_*,$$
$$\lambda'_{\max}C_4\tilde{C}_1\tilde{C}_5 M^s_\varphi + (1/2)\gamma_2 M_\varphi + (1/2)\beta_0 < \lambda_*, \tag{64}$$

то нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий (44)–(46), является регулярным, т.е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$ *и определяется единственным образом по паре* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f})$.

Замечание 5.1. Несложно заметить, что локальная регулярность системы оптимальности в теореме 5.2 носит условный характер, в отличие, например, от аналогичного результата [17], полученного на слабых решениях соответствующей краевой задачи. Другими словами, при выполнении условий теоремы 3.1 существует решение $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{f}) \in X_s \cap (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \times K$ задачи управления (40), в котором для состояния $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p})$ справедливы оценки (36)–(38). Если при этом исходные данные задачи (40) удовлетворяют условиям малости (33) и (47), то для такой точке минимума задачи (40) система оптимальности является регулярной, т.е. мы можем считать, что $\lambda_0 \equiv 1$.

Замечание 5.2. Существование решения $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{f}) \in X_s \cap (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \times K$ задачи управления (40) при выполнении условий теоремы 3.1, в котором для состояния $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p})$ справедливы оценки (36)–(38), доказывается по той же схеме, что и теорема 4.1 (см. [20]).

6 Релейность оптимального управления

В данном разделе устанавливается дополнительное свойство оптимального управления для следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi) \equiv (1/2)I(\varphi) \to \inf,\ \mathcal{F}(\varphi, f) = 0,\ (\varphi, f) \in H_0^1(\Omega) \times K, \tag{65}$$

где $\mathcal{F}(\varphi, f) = 0$ – операторная запись слабой формулировки задачи 1.

Пусть вместо (H.4.1), (H.4.2) выполняется более жесткое условие:

(H.6.1) $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω для всех $f \in K$, где $f_{\min}$ и $f_{\max}$ – положительные числа.

Ясно, что условия (H.6.1) задают частный случай выпуклого, ограниченного и замкнутого множества, введенного в (H.4.1).

Покажем, что оптимальное управление $\hat{f}(\mathbf{x})$ задачи (65) обладает свойством релейности или для него справедлив принцип bang–bang, согласно которому используемое управление принимает одно из двух значений: $f_{\min}$ или $f_{\max}$, в зависимости от знака функции $\theta(\mathbf{x})$, имеющей смысл сопряженной концентрации (см. разд. 5) в точке $\mathbf{x} \in \Omega$.

Принцип минимума для задачи (65) принимает следующий вид:

$$(f - \hat{f}, \theta) \le 0 \ \ \forall f \in K. \tag{66}$$

Несложно показать, рассуждая методом от противного, что при выполнении условия (H.6.1) неравенство (66) эквивалентно следующему неравенству:

$$(f - \hat{f})\,\theta \le 0 \text{ п.в. в } \Omega \ \ \forall f \in K. \tag{67}$$

Из (67) вытекает, что если $\theta < 0$ п.в. в D_1, то $\hat{f} = f_{\min}$ п.в. в D_1 и $\hat{f} = f_{\max}$ п.в. в D_2 если $\theta > 0$ п.в. в D_2.

Из (67) вытекает, что оптимальное управление $f(\mathbf{x})$ задачи (65) может принимать, в зависимости от знака множителя Лагранжа $\theta(\mathbf{x})$, только максимальное и минимальное значение $f_{\max}$ и $f_{\min}$.

В таком случае говорят, что оптимальное управление f удовлетворяет *свойству релейности*, иначе, для этого управления справедлив *принцип bang-bang*. Другими словами, подобное поведение оптимального управления интерпретируют как переключение между двумя состояниями или скачки из одного состояния в другое.

Если не удается исключить ситуацию, когда $\theta = 0$ на некотором подмножестве $D_0 \subset \Omega$ положительной меры, которая приводит к неопределенности, в рамках которой управление f на указанном подмножестве может как перескочить из одного граничного значения в другое, так и не совершать такой скачок (см. (67)), тогда свойство релейности называют *нестрогим*.

Замечание 6.2. В работе [43] установлен строгий принцип bang–bang для мультипликативного управления в экстремальной задаче для нелинейной модели реакции–диффузии (без конвекции). Ранее аналогичный результат был получен в [44]. В цитируемых работах отсутствие конвекции позволило применить свойства единственности продолжения для эллиптических уравнений (см. [45]).

7 Заключение

Хорошо известно, система оптимальности играет важную роль при исследовании свойств оптимальных решений. В данной работе на основе ее анализа установлено свойство релейности распределенного управления. В последующих работах авторов с использованием данной системы будет доказана единственность малого по норме оптимального решения на сильных решениях задачи 1.

References

[1] R.V., Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **12** (2015) 447–456.

[2] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **13** (2016) 352–360.

[3] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Comp. Math. Math. Phys. **58** (12) (2018) 2053–2063.

[4] R.V. Brizitskii, V.S. Bystrova, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation*, Diff. Equat. **57**:5 (2021) 615–629.

[5] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Appl. **75** (2024) 103979.

[6] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Diffusion approximation of the radiative–conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **57** (2018) 290–298.

[7] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva, *Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation*, J. Inv. Ill-Posed Probl. **29**:3 (2021) 467–476.

[8] A.E. Kovtanyuk, A.Y. Chebotarev, N.D. Botkin, V.L. Turova, I.N. Sidorenko, R. Lampe, *Continuum model of oxygen transport in brain*, J. Math. Analys. Appl. **474**:2 (2019) 1352–1363.

[9] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq. **124** (1996) 389–406.

[10] T. Kim, *Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions*, Appl. Math. **67** (2022) 593–613.

[11] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 444–468.

[12] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids **4**:3 (2019) Article ID 133.

[13] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ. **56**:3 (2020) 304–314.

[14] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry **13**:11 (2021) Article ID 2050.

[15] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl. **189** (2021) 623–645.

[16] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, R.R. Kravchuk, *Boundary value and extremum problems for generalized Oberbeck–Boussinesq model*, Sib. El. Math. Rep. **16** (2019) 1215–1232.

[17] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model*, J. Dynam. Control Syst. **27**:2 (2021) 379–402.

[18] Z.Y. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass–transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. El. Math. Rep. **19** (2022) 360–370.

[19] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer*, J. Dynam. Control Syst. **29**:4 (2023) 1809–1828.

[20] R.V. Brizitskii, *Boundary value and control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, J. Dynam. Control Syst. **30**:2 (2024) 24.

[21] A. Belmiloudi, *Robin–type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations*, J. Math. An. Appl. **273** (2002) 428–456.

[22] R. Duan, A. Guo, C. Zhu, *Global strong solution to compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosity and temperature dependent heat conductivity*, J. Differ. Equ. **262** (2017) 4314–4335.

[23] J.L. Boldrini, E. Fernandez-Cara, M.A. Rojas-Medar, *An optimal control problem for a generalized Boussinesq model: The time dependent case*, Rev. Mat. Complut. **20**:2 (2007) 339–366.

[24] Yu. Y, Wu X, Tang Y, *Global well–posedness for the 2D Boussinesq system with variable viscosity and damping*, Math. Meth. Appl. Sci. **41** (2018) 3044–3061.

[25] O.N. Goncharova, *Unique solvability of a two–dimensional nonstationary problem for the convection equations with temperature-dependent viscosity*, Differ. Equ. **38** (2002) 249–258.

[26] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *The initial value problem for a generalized Boussinesq model*, Nonlinear Anal. **36** (1999) 457–480.

[27] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients*, Symmetry **14**:12 (2022) Article ID 2580.

[28] E.S. Baranovskii, *Flows of a polymer fluid in domain with impermeable boundaries*, Comput. Math. Math. Phys. **54** (2014) 1589–1596.

[29] E.S. Baranovskii, M.A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, Int. J. Differ. Equ. **2016** (2016) Article ID 9428128.

[30] E.S. Baranovskii, *On flows of Bingham-type fluids with threshold slippage*, Adv. Math. Phys. **2017** (2017) Article ID 7548328.
[31] E.S. Baranovskii, *Strong solutions of the incompressible Navier-Stokes-Voigt model*, Mathematics. **8**:2 (2020) Article ID 181.
[32] M. Ruzicka, V. Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat–Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc. **40** (2017) 2746–2761.
[33] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **262** (2018) 25–37.
[34] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi–component viscous compressible fluids*, Izv. Math. **821** (2018) 140–185.
[35] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three–dimensional motion of two-component viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math. **85**:4 (2021) 755–812.
[36] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial–boundary value problem for the equations of one–dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech. **21**:9 (2019) 1–9.
[37] D.A. Prokudin, *On stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one–dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathamatics. **11** (2023) Article ID 3065.
[38] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, *Control problem for a magneto–micropolar flow with mixed boundary conditions for the velocity field*, J. Dyn. Control Syst. **25** (2019) 599–618.
[39] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland: Amsterdam, The Netherlands, 1977.
[40] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Berlin. Springer–Verlag, 1986.
[41] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat–mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Nauchiy Mir: Moscow, 2010 (in Russian).
[42] A.V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems: Theory and applications*, Providence, R.I.: Am. Math. Soc., 2000.
[43] R.V. Brizitskii, A.A. Donchak, *Multiplicative control problem for a nonlinear reaction–diffusion model*, Comp. Math. Math. Phys. **64** (2024) 56–72.
[44] A.Yu. Chebotarev, *Optimal control problems for complex heat transfer equations with Fresnel matching conditions*, Comp. Math. Math. Phys. **62** (2022) 372–381.
[45] Wolf T.H. *A property of measure in R^n and an application to unique continuation*, Geomet. and Function. Anal., **2**:2 (1992) 225–284.

Roman Victorovich Brizitskii
Institute of Applied Mathematics,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far Eastern Federal University,
Email address: mlnwizard@mail.ru

Zhanna Yurievna Saritskaia
Institute of Applied Mathematics,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Email address: zhsar@icloud.com