S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 144–171 (2024) УДК 512.546.8 + 512.548.77 + 517.986.6 + 517.987.1
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.??? MSC 43A10; 44A35; 54D45; 54H10; 22A30; 22A22

АЛГЕБРЫ СВЕРТОК ФУНКЦИОНАЛОВ, МЕР И ФУНКЦИЙ ДЛЯ КВАЗИГРУПП

С.В. Людковский

Представлено П.П. Петровым

Abstract: This article is devoted to investigations of convolutions of functionals, measures and functions on quasigroups. Convolutions are studied not only over left or right invariant measures, but also over left or right quasiinvariant measures. There are found specific features of quasigroups in comparison with groups. Spaces of measures are studied. Different normed spaces of measures and functions are considered. Their completeness and a continuity of convolutions on them is investigated. For this purpose special transformations of quasigroups are utilized. These convolution algebras are generally nonassociative because of the nonassociativity of quasirgoups. Ideals in topological convolution algebras are investigated.

Keywords: algebra, convolution, functional, measure, function, quasigroup, topology, ideal.

Ludkowski, S.V., Convolution algebras of functionals, measures and functions for quasigroups.

.

Поступила 2 июля 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

1 Введение

Абстрактный гармонический анализ на локально компактных группах имеет важное значение не только в математике, а также в математической физике, квантовой механике, квантовой теории поля и квантовой гравитации (см., например, [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10] и ссылки в них). Сравнительно новые направления исследований в этой области связаны с некоммутативным анализом, неассоциативной алгеброй, некоммутативной геометрией, топологической алгеброй, неассоциативной математической физикой, в которых часто появляются квазигруппы и лупы, являющиеся неассоциативными аналогами групп (см. [11, 12, 13, 14] и ссылки в них). В информатике и теории кодирования квазигруппы поставляют новые возможности по сравнению с группами [16, 17, 18].

С другой стороны, гармонический анализ на квазигруппах и лупах остается еще мало разработанным по сравнению с группами. Следует отметить, что в [19] исследовалось существование лево- или правоинвариантной меры на топологической лупе. В ней был доказано, что из существования лево- или право-инвариантной нетривиальной меры на топологической лупе следует, что она всюду плотна в локально компактной лупе. В частности, на локально компактных лупах со стержнем (core quasigroup) лево-инвариантные меры были построены в [20]. При этом имеются специфические особенности топологий и мер на квазигруппах по сравнению с группами. Это обстоятельство вызвано тем, что в ассоциативном случае для топологической группы G существует лево- (или право-)инвариантная равномерность на G совместимая с ее топологией [2, 6, 22]. В общем случае для топологической квазигруппы из-за ее неассоциативности равномерность не обязана быть ни симметричной, ни лево-, ни право-инвариантной.

В данной статье исследуются свертки функционалов, мер и функций на квазигруппах. Свертки изучаются не только относительно лево- или право-инвариантных мер, а также относительно лево- или правоквазиинвариантных мер. Найдены специфические особенности для квазигрупп по сравнению с группами. При этом формулировки теорем, предложений, лемм и их доказательства в неассоциативном случае квазигрупп существенно отличаются от ассоциативного случая групп. Изучаются пространства мер. Рассматриваются различные нормированные пространства функций и мер. Исследуется их полнота и непрерывность сверток на них. Для этого используются специальные преобразования квазигрупп. Алгебры сверток в общем случае оказываются неассоциативными из-за неассоциативности квазигрупп. Исследуются идеалы топологических алгебр сверток.

Все главные результаты данной статьи получены впервые. Их приложения обсуждаются в заключении.

Напомним определение во избежание недоразумений.

Определение 1.1. Пусть G - это множество с умножением (то есть однозначной бинарной операцией) $G^2 \ni (a, b) \mapsto ab \in G$ определённой на G такой, что

(i) для любого a и b из G существует и единственный $x \in G$ с $ax = b$.

Множество G с умножением удовлетворяющее условию (i) называется левой квазигруппой. Симметрично рассматривается случай:

(ii) существует и единственный $y \in G$ удовлетворяющий $ya = b$.

Множество G с умножением удовлетворяющее условию (ii) называется правой квазигруппой. Отображения в (i) и (ii) обозначаются $x = a \setminus b = Div_l(a, b)$ и $y = b/a = Div_r(a, b)$ соответственно. Если G левая и правая квазигруппа, то она называется квазигруппой. Если дополнительно

(iii) существует нейтральный (т.е. единичный) элемент $e_G = e \in G$: $eg = ge = g$ для любого $g \in G$, то

левая (или правая) квазигруппа G с единичным элементом называется левой (или правой соответственно) лупой. Если G является левой и правой лупой, то она называется лупой (или унитальной квазигруппой).

Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}_G$ - топология на левой (или правой) квазигруппе (или лупе) G такая, что умножение $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab \in G$ и отображение $Div_l(a, b)$ (или $Div_r(a, b)$ соответственно) являются совместно непрерывными относительно $\mathcal{T}$, то $(G, \mathcal{T})$ называется левой (или правой соответственно) топологическая квазигруппой (или лупой соответственно). Если G является левой и правой топологической квазигруппой (лупой), то она называется топологической квазигруппой (лупой соответственно).

В данной статье предполагается, что $\mathcal{T}$ является $T_1 \cap T_{3.5}$ топологией, если что-либо иное не будет оговорено. Для подмножеств A и B в G посредством $A - B$ обозначается их разность $A - B = \{a \in A : a \notin B\}$.

2 Свертки функционалов и мер для квазигрупп

Определение 2.1. Пусть G - группоид, $\mathcal{H}$ - семейство функций из G в $\mathbf{F}$ такое, что $\mathcal{H}$ лево-инвариантно относительно G, где $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Пусть имеется линейный функционал M на $\mathcal{H}$ такой, что $\bar{M}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$, где $(\bar{M}f)(y) := M({}_yf)$ для любых $f \in \mathcal{H}$ и $y \in G$. Для линейного функционала N на $\mathcal{H}$ определен функционал $N(\bar{M}f) =: (N * M)f$ называемый сверткой функционалов N и M, где $f \in \mathcal{H}$. Симметрично для право-инвариантного пространства $\mathcal{H}$ задается функция $(\underline{N}f)(y) := N(f_y)$ для любых $f \in \mathcal{H}$ и $y \in G$.

Замечание 2.1. Предположим, что G, $\mathcal{H}$, M и N такие же, как в определении 2.1. Тогда

(а) свертка $N * M$ - линейный функционал на $\mathcal{H}$;

(б) $(pN) * M = p(N * M) = N * (pM)$ для всякого $p \in \mathbf{F}$;

(в) если существуют свертки $N * M_1$ и $N * M_2$, то существует $N * (M_1 + M_2) = N * M_1 + N * M_2$;

(г) если существуют свертки$N_1 * M$ и $N_2 * M$, то существует $(N_1 + N_2) * M = N_1 * M + N_2 * M$.

Эти утверждения вытекают из определения 2.1 и линейности функционалов.

Для неассоциативного G в общем случае, если существуют свертки $L*(N*M)$ и $(L*N)*M$, то они могут быть не равны, так как $f(x(yz))$ может быть не равна $f((xy)z)$, где $f \in \mathcal{H}$; x, y, z принадлежат G.

Определение 2.2. Если $\mathcal{L}$ - пространство линейных функционалов на $\mathcal{H}$, для которых существует свертка, то $\mathcal{L}$ называется алгеброй свертки с операциями $+$ и $*$ над полем $\mathbf{F}$ (см. также определение 2.1 и замечание 2.1).

Пример 2.1. Рассмотрим группоид G и $\mathcal{H} = B(G, \mathbf{F})$. Зададим функционалы $\delta_g f = f(g)$ для всех $g \in G$ и $f \in \mathcal{H}$. Тогда $(\bar{\delta}_y f)(x) = \delta_y({}_x f) = f(xy) = f_y(x)$, $\delta_g * \delta_y(f) = \delta_{gy} f$. В качестве алгебры свертки $\mathcal{L}$ можно взять

$\mathcal{L} = l_1(G, \mathbf{F}) = \{M : \forall j \in \mathbf{N}, s_j \in \mathbf{F},$

$\exists \sum_{j=1}^{\infty} |s_j| < \infty, g_j \in G; M = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \delta_{g_j}\}$.

При этом

$\| \sum_{j=1}^{n} s_j \delta_{g_j} \| = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j|$, $\|N * M\| \leq \|N\| \|M\|$

для любых N и M из $\mathcal{L}$.

Если G - левая (или правая) квазигруппа, то можно еще задать $\delta_{g \setminus b} f = f(g \setminus b)$ (или $\delta_{g/b} f = f(g/b)$) для любых g и b из G. Тогда уравнение $\delta_b = \delta_g * \delta_x$ (или $\delta_x * \delta_g = \delta_b$) с заданными b, g и неизвестной x имеет решение в $\mathcal{L}$: $\delta_x = \delta_g \setminus \delta_b = \delta_{g \setminus b}$ (или $\delta_x = \delta_b / \delta_g = \delta_{b/g}$ соответственно). Таким образом, $\{\delta_g : g \in G\}$ образует левую (или правую соответственно) квазигруппу изоморфную G.

Замечание 2.2. Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа. Тогда $C_0(G, \mathbf{F})$ обозначает множество всех непрерывных функций $f : G \to \mathbf{F}$ таких, что для любого $0 < \epsilon < \infty$ существует компактное подмножество K в G с $|f(x)| < \epsilon$ для любого $x \in G - K$, где $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Лемма 2.1. *Пусть G - компактная T_1 лупа. Тогда $\forall f \in C(G, \mathbf{F})$, $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\exists V \in \mathsf{B}_e(G)$, $\forall x \in G$, $\forall y \in G$, $(x \setminus y \in V) \to (\|{}_x f - {}_y f\| < \epsilon)$.*

Доказательство. Если $f : G \to \mathbf{F}$ - непрерывная функция, то $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\exists W \in \mathsf{B}_e(G)$ такая, что $|f(u) - f(wu)| < \epsilon/2$ для любых $u \in G$ и $w \in W$, так как бесконечное открытое покрытие

$\{R_u W'_u : u \in G, W'_u \in \mathsf{B}_e(G), W_u \in \mathsf{B}_e(G), W'_u(W'_u u) \subset W_u u, \forall w \in W_u, |f(u) - f(wu)| < \epsilon/4\}$

имеет конечное подпокрытие $\{R_{u_j} W'_{u_j} : j = 1, ..., n\}$, $n \in \mathbf{N}$, $W := \bigcap_{j=1}^{n} W'_{u_j}$ открыто, где $\mathsf{B}_x(G)$ - база топологической лупы в $x \in G$, $R_u x = xu$. С другой стороны, $f(xz) - f(yz) = f(u) - f(y(x \setminus u))$ при $u = xz$, где x, y, z принадлежат G. Тогда $\forall x \in G$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$,

$\exists V'_{x,j} \in \mathsf{B}_e(G)$, $(xV'_{x,j})((xV'_{x,j}) \setminus (W'_{u_j}u_j)) \subset Wu_j$. Бесконечное открытое покрытие $\{L_x V'_{x,j} : x \in G, j \in \{1, ..., n\}\}$ имеет конечное подпокрытие $\{L_{x_i} V'_{x_i,j} : l = l(i,j) \in \{1, ..., m\}\}$, $m \in \mathbf{N}$, где $L_x u = xu$, $l(i,j) \neq l(i_1, j_1)$ при $(i,j) \neq (i_1, j_1)$. Тогда $V := \bigcap_{l=1}^m V_l$ открыто, где $V_l = V'_{x_i,j}$ при $l = l(i,j)$. Если $y \in xV$, то $|f(xz) - f(yz)| < \epsilon$ для любого $z \in G$, где $x \in G$, $y \in G$, следовательно, $\|_x f - _y f\| < \epsilon$ при $x \setminus y \in V$.

Следствие 2.1. *Если G - компактная T_1 лупа, то $\{W_{f,\epsilon} : f \in C(G, \mathbf{F}), 0 < \epsilon < \infty\}$ - база равномерности на G, совместимая с топологией на G, где $W_{f,\epsilon} := \{(x,y) \in G^2 : \|_x f - _y f\| < \epsilon\}$.*

Доказательство. Это следует из теоремы 8.3.13 в [22] и леммы 2.1 данной выше.

Лемма 2.2. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\phi : G \times G \to G$ и $\eta : G \times G \to G$ - (совместно) непрерывные отображения такие, что $\phi(x, \eta(x,v))\eta(x,v) = v$ и $\eta(x, \phi(x,z)z) = z$ (либо $\phi(x, \eta(x,v)) \setminus \eta(x,v) = v$ и $\eta(x, \phi(x,z) \setminus z) = z$) для любых x, v, z из G, $f \in C_0(G, \mathbf{F})$. Тогда $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\forall x \in G$, $\exists V \in \mathsf{B}_x(G)$, $\forall y \in V$, $\forall z \in G$, $|\hat{L}^s_{\phi(x,z)} f(z) - \hat{L}^s_{\phi(y,z)} f(z)| < \epsilon$ при $s = 1$ (либо $s = -1$ соответственно).*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $S := \{u \in G : |f(u)| \geq \delta\}$, где $0 < \delta < \infty$ фиксировано, $\delta = \epsilon/2$. Тогда $|f(u)| < \delta$ для любого $u \in G - S$, а S компактно, так как $f \in C_0(G, \mathbf{F})$. Поскольку G - топологическая левая T_1 квазигруппа, а отображения ϕ и η (совместно) непрерывны, то $\forall u \in G$, $\exists W_u \in \mathsf{B}_u(G)$, $\exists V_u \in \mathsf{B}_x(G)$, $\forall y \in V_u$, $\forall v \in W_u$, $|f(v) - f(\phi(y, \eta(x,v))(\phi(x, \eta(x,v)) \setminus v))| < \delta$ и $|f(\phi(x, \eta(y,v))(\phi(y, \eta(y,v)) \setminus v)) - f(v)| < \delta$, так как $\phi(x, \eta(x,v))(\phi(x, \eta(x,v)) \setminus v) = v$. При этом для $u \in G - S$ можно выбрать V_u и W_u такими, чтобы $W_u \subset G - S$, $V_u(x \setminus W_u) \subset G - S$ и $x(V_u \setminus W_u) \subset G - S$, так как $G - S$ открыто в G. Поскольку G локально компактна, то W_u и V_u можно взять с компактными замыканиями $cl_G W_u$ и $cl_G V_u$. Поскольку S компактно, то открытое покрытие $\{W_u : u \in S\}$ для S имеет конечное подпокрытие $\{W_{u_j} : j = 1, ..., n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Положим $V = \bigcap_{j=1}^n V_{u_j}$, следовательно, $V \in \mathsf{B}_x(G)$. Тогда

$$_{\phi(x,z)} f(z) - _{\phi(y,z)} f(z) = f(v) - f(\phi(y, \eta(x,v))(\phi(x, \eta(x,v)) \setminus v))$$

для $v = \phi(x,z)z$,

$$_{\phi(x,z)} f(z) - _{\phi(y,z)} f(z) = f(\phi(x, \eta(y,w))(\phi(y, \eta(y,w)) \setminus w)) - f(w)$$

для $w = \phi(y,z)z$,

так как $\phi(x, \eta(x,v))\eta(x,v) = v$ и $\eta(x, \phi(x,z)z) = z$ для любых x, v, z из G. Если $\phi(x,z)z \in G - S$ и $\phi(y,z)z \in G - S$, то $|_{\phi(x,z)} f(z) - _{\phi(y,z)} f(z)| < 2\delta$. Если $y \in V$, $\phi(x,z)z \in S$ или $\phi(y,z)z \in S$, то $|_{\phi(x,z)} f(z) - _{\phi(y,z)} f(z)| < \delta$ по построению выше. Таким образом, $|_{\phi(x,z)} f(z) - _{\phi(y,z)} f(z)| < \epsilon$ для любых $y \in V$ и $z \in G$. Второй случай $\phi(x, \eta(x,v)) \setminus \eta(x,v) = v$ и $\eta(x, \phi(x,z) \setminus z) = z$ доказывается аналогично.

Пример 2.2. Если $\phi(x,z) = x$, $\eta(x, xz) = z$, то $|_x f(z) - _y f(z)| < \epsilon$ для любых $y \in V$ и $z \in G$ в обозначениях леммы 2.2. Другие случаи использования леммы 2.2 приведены ниже.

Лемма 2.3. *Предположим, что G - локально компактная T_1 квазигруппа, $f \in C_0(G, \mathbf{F})$, $M : C_0(G, \mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ - непрерывный линейный функционал. Тогда $\bar{M} : C_0(G, \mathbf{F}) \to C_0(G, \mathbf{F})$.*

Доказательство. В силу леммы 2.2 $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\forall x \in G$, $\exists V \in \mathsf{B}_x(G)$, $\forall y \in V$, $\forall z \in G$, $|{}_x f(z) - {}_y f(z)| < \epsilon / \max(1, \|M\|)$, следовательно, $|\bar{M} f(x) - \bar{M} f(y)| < \epsilon$. Для непрерывного функционала M на $C_0(G, \mathbf{F})$ существует регулярная мера $\mu : \mathcal{F}_\mu(G) \to \mathbf{F}$ такая, что $M(f) = \int_G f(x)\mu(dx)$ для любой $f \in C_0(G, \mathbf{F})$ по теореме 7.3.6 в [5]. При этом $\|M\| = |\mu|(G)$, где $|\mu|$ - вариация меры μ. Поскольку оператор $\bar{M}$ линеен, то достаточно рассмотреть неотрицательные нетривиальные функции f из $C_0(G, \mathbf{F})$ для доказательства того, что $\bar{M}(C_0(G, \mathbf{F})) \subseteq C_0(G, \mathbf{F})$. Для любого $0 < \delta < \infty$ существуют компактные подмножества S и P в G такие, что $|\mu|(G - S) < \delta$, $|f(x)| < \delta$ для любого $x \in G - P$ по лемме 7.3.5 и предложению 7.3.4 в [5]. Тогда $|\bar{M} f(x)| \le \int_S f(xy)|\mu|(dy) + \int_{G-S} f(xy)|\mu|(dy)$, причем $\int_{G-S} f(xy)|\mu|(dy) \le \|f\||\mu|(G - S) < \delta\|f\|$. С другой стороны, $P/S =: Q$ компактно и

$\int_S f(xy)|\mu|(dy) \le \delta|\mu|(S) \le \delta|\mu|(G)$ для любого $x \in G - P/S$. Тогда при $0 < \delta < \epsilon/(|\mu|(G) + \|f\|)$ существует компактное в G подмножество Q такое, что $|\bar{M} f(x)| < \epsilon$ для любого $x \in G - Q$.

Теорема 2.1. *Предположим, что G - локально компактная T_1 квазигруппа. Тогда топологически сопряженное пространство $C'_0(G, \mathbf{F})$ является банаховой алгеброй $\mathcal{L}$ относительно свертки и нормы линейных функционалов, причем $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$ для любых a и b из G. Если G - лупа, то δ_e - единичный элемент в $\mathcal{L}$.*

Доказательство. В силу леммы 2.3, если $M \in C'_0(G, \mathbf{F})$, то $\bar{M} : C_0(G, \mathbf{F}) \to C_0(G, \mathbf{F})$. Если μ - мера соответствующая M (см. доказательство леммы 2.3), то

$|\bar{M} f(x)| \le \int_G |{}_x f(y)||\mu|(dy) \le \|f\||\mu|(G) = \|f\|\|M\|$.

Если еще $N \in C'_0(G, \mathbf{F})$, то

$|N * M(f)| = |N(\bar{M} f)| \le \|N\|\|\bar{M} f\| \le \|N\|\|M\|\|f\|$,

следовательно, $\|N * M\| \le \|N\|\|M\|$ и $N * M \in C'_0(G, \mathbf{F})$. С другой стороны, $C'_0(G, \mathbf{F})$ полно относительно $\|\cdot\|$. Формула $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$ проверяется аналогично примеру 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. $\mathcal{L} = (C'_0(G, \mathbf{F}), *, +)$ коммутативна относительно операции свертки $*$ тогда и только тогда, когда G коммутативна.*

Определение 2.3. Пусть G - топологическая (левая) T_1 квазигруппа, $\mathbf{M}(G, \mathbf{F})$ - пространство σ-аддитивных мер $\mu : \mathcal{F}_\mu(G) \to \mathbf{F}$ с конечной нормой $\|\mu\| = |\mu|(G) < \infty$, где $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Для μ_1 и μ_2 из $\mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, свертка задается формулой

$(\mu_1 * \mu_2)(\Omega) = \int_G \int_G \chi_\Omega(xy)\mu_1(dx)\mu_2(dy)$,

где $\chi_\Omega(z)$ - характеристическая функция подмножества Ω в G, $\chi_\Omega(z) = 1$ для любого $z \in \Omega$, $\chi_\Omega(z) = 0$ для любого $z \in G - \Omega$.

Теорема 2.2. *Предположим, что G - топологическая левая T_1 квазигруппа, $\mu_j \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, $j \in \{1,2\}$. Тогда*
$\|\mu_1 * \mu_2\| \le \|\mu_1\| \|\mu_2\|$ *и* $\mu_1 * \mu_2 \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$.

Доказательство. Для любого $\Omega \in \mathcal{B}(G)$ в силу теоремы Фубини

$|\int_G \int_G \chi_\Omega(xy)\mu_1(dx)\mu_2(dy)| \le \int_G \left| \int_G \chi_\Omega(xy)\mu_1(dx) \right| |\mu_2|(dy)$

$\le \int_G \left(\int_G \chi_\Omega(xy)|\mu_1|(dx) \right) |\mu_2|(dy) = (|\mu_1| * |\mu_2|)(\Omega) \le \|\mu_1\| \|\mu_2\|$, так как $x \setminus \Omega \in \mathcal{B}(G)$ для любого $x \in G$. Поэтому

$(\mu_1 * \mu_2)(\bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j) = \sum_{j=1}^\infty (\mu_1 * \mu_2)(\Omega_j)$

для любых дизъюнктных Ω_j из $\mathcal{B}(G)$, $\Omega_{j_1} \cap \Omega_{j_2} = \emptyset$ для любых $j_1 \ne j_2$ из $\mathbf{N}$, с $\bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j = \Omega$, так как $\chi_\Omega(z) = \sum_{j=1}^\infty \chi_{\Omega_j}(z)$ для любого $z \in G$. Тогда $\mu_1 * \mu_2$ продолжается на $\mathcal{F}_{\mu_1 * \mu_2}(G) \supset \mathcal{B}(G)$.

Теорема 2.3. *Пусть $G = Q(\mathcal{A})$ - топологическая левая T_1 квазигруппа, $\mu_j \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, $j \in \{1,2\}$, $f \in \mathbf{L}^1(G, |\mu_1| * |\mu_2|, \mathbf{F})$. Тогда $f \circ \mathcal{A} \in \mathbf{L}^1(G \times G, |\mu_1 \times \mu_2|, \mathbf{F})$,*

$\int_G f(z) d(\mu_1 * \mu_2)(z) = \int_{G \times G} (f \circ \mathcal{A})(x,y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y)$

$= \int_G \left(\int_G f(xy)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) = \int_G \left(\int_G f(xy)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx)$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 $|\mu_1| * |\mu_2| \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$. Отображение умножения $\mathcal{A} : G \times G \to G$ непрерывно, следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}(G)) \subset \mathcal{B}(G \times G)$. Поскольку $(f \circ \mathcal{A})(x,y) = f(xy)$ при кратком обозначении xy вместо $\mathcal{A}(x,y)$ для любых x и y из G, то утверждение данной теоремы вытекает из теоремы Фубини, так как

$\int_G |f(z)| d(|\mu_1| * |\mu_2|)(z) < \infty$ и

$\int_G |f(z)| d(|\mu_1| * |\mu_2|)(z) = \int_{G \times G} |f(xy)| |\mu_1|(dx) |\mu_2|(dy)$.

Следствие 2.3. *Если выполняются условия теоремы 2.3, $\Omega \in \mathcal{F}_{|\mu_1| * |\mu_2|}(G)$, то $\mathcal{A}^{-1}(\Omega) \in \mathcal{F}_{\mu_1 \times \mu_2}(G \times G)$ и*

$\mu_1 * \mu_2(\Omega) = \mu_1 \times \mu_2(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)) = \int_G \mu_2(x \setminus \Omega)\mu_1(dx)$.

Определение 2.4. Мера $\mu \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$ называется чисто разрывной, если существует счетное подмножество D в G такое, что $|\mu|(G - D) = 0$. Мера μ называется непрерывной, если $\mu(\{x\}) = 0$ для любого $x \in G$. При этом мера $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to \bar{\mathbf{R}}$ или $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to \mathbf{C}$ называется лево-квазиинвариантной (или лево-инвариантной) относительно H, если λ^{L_x} эквивалентна λ (или $\lambda^{L_x} = \lambda$ соответственно) для любого $x \in H$, где $\mathcal{F}_\lambda(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$, $H \subseteq G$, $\lambda^{L_x}(\Omega) = \lambda(x\Omega)$ для любого $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G)$. При $H = G$ "относительно G"для краткости часто опускается.

Пусть λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная мера на $\mathcal{F}_\lambda(G)$, $\mathcal{F}_\lambda(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$. Непрерывная мера μ называется сингулярной по отношению к λ, если существует борелевское подмножество E в G такое, что $\lambda(E) = 0$, $|\mu|(G - E) = 0$. Обозначим $\mathbf{M}_d(G, \mathbf{F})$ - множество всех чисто разрывных мер на G, $\mathbf{M}_c(G, \mathbf{F})$ - множество всех непрерывных мер на G; $\mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F}) := \{\mu \in \mathbf{M}_c(G, \mathbf{F}) : \mu \perp \lambda\}$;

$\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}) := \{\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F}) : \mu \ll \lambda\}$; где $\mu \perp \lambda$ обозначает, что μ сингулярна по отношению к λ; $\mu \ll \lambda$ обозначает, что μ абсолютно непрерывна по отношению к λ. Далее предполагается, что $\mathcal{F}_\lambda(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$, если не оговорено иное.

Лемма 2.4. *Пусть $D \subset G$, $D \in \mathcal{F}_\mu(G)$ для любой $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. Тогда $\mathbf{V}_D := \{\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F}) : |\mu|(D) = 0\}$ - замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.*

Доказательство. Для любых μ_1 и μ_2 из $\mathbf{V}_D$, $\beta \in \mathbf{F}$, выполняется $|\mu_1+\mu_2|(D) \le |\mu_1|(D) + |\mu_2|(D)$ и $|\beta\mu_1|(D) = |\beta||\mu_1|(D)$, следовательно, $\mathbf{V}_D$ - линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. Если последовательность $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ содержится в $\mathbf{V}_D$ и сходится к μ в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$ по норме $\|\cdot\|$ на $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, то $|\mu(E)| = |\mu_n(E) - \mu(E)| \le |\mu_n - \mu|(E) \le \|\mu_n - \mu\|$ для любого $E \in \mathcal{B}(G) \cap D$, следовательно, $\mu(E) = 0$. Поскольку $\mathcal{F}_\mu(G)$ является пополнением борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(G)$ по $|\mu|$, то $|\mu|(D) = 0$ в силу разложения Жордана-Хана (теорема 4.1.5, следствие 4.1.6 и предложение 4.1.7 в [5]).

Теорема 2.4. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\delta_b(V) = \chi_V(b)$ для всех $V \subseteq G$ и $b \in G$. Если $\beta_n \in \mathbf{C}$, $b_n \in G$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n| < \infty$, $b_j \ne b_n$ для любых $j \ne n$, то*

(a) $\nu = \sum_{n=1}^\infty \beta_n\delta_{b_n} \in \mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$, $\mathcal{F}_\nu(G) = 2^G$,

$\int_G f(x)\nu(dx) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n\delta_{b_n}(f)$

для любой $f \in B(G,\mathbf{C})$;

(б) $|\sum_{n=1}^\infty \beta_n\delta_{b_n}| = \sum_{n=1}^\infty |\beta_n|\delta_{b_n}$,

(в) $\|\sum_{n=1}^\infty \beta_n\delta_{b_n}\| = \sum_{n=1}^\infty |\beta_n|$.

Если $\nu \in \mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$, то ν имеет разложение вида (а), где для $\nu \ne 0$ все $\beta_n \ne 0$ и разложение единственно, $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n| < \infty$. Причем $\mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$ - замкнутая подалгебра в $\mathbf{M}(G,\mathbf{C})$. Более того, $(\mathbf{M}_d(G,\mathbf{C}) = \mathbf{M}(G,\mathbf{C}))$ $\leftrightarrow$ (G - дискретна).

Доказательство. Если $V \subseteq G$, то $\nu(V) = \sum_{b_n \in V} \beta_n$. Поэтому утверждения (а), (б), (в) и замкнутость пространства $\mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$ в $\mathbf{M}(G,\mathbf{C})$ относительно $\|\cdot\|$ очевидны.

Если $\nu \in \mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$, то существует счетное подмножество $D = \{b_n \in G : n \in \Lambda\}$ в G, $card(\Lambda) \le \aleph_0$, $\Lambda \subseteq \mathbf{N}$ такое, что $|\nu|(G - D) = 0$. Тогда $\nu(A) = \nu(A \cap D) + \nu(A - D) = \sum_{b_n \in A} \nu(\{b_n\})$ для любого $A \in \mathcal{F}_\nu(G)$, следовательно, $\nu = \sum_{n \in \Lambda} \beta_n\delta_{b_n}$, $\beta_n = \nu(\{b_n\})$. Причем $\sum_{k \in \Lambda, k \le m} |\nu(b_k)| \le |\nu|(G) = \|\nu\| < \infty$ для любого $m \in \mathbf{N}$, следовательно, $\sum_{k \in \Lambda} |\beta_k| < \infty$. Если $b_k \ne b_n$ и $\beta_k \ne 0$ для любых $k \ne n$, то разложение (а) единственно. Если $\nu = \sum \beta_n\delta_{b_n} \in \mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$ и $\mu = \sum \gamma_m\delta_{d_m} \in \mathbf{M}_d(G,\mathbf{C})$, то и $\nu * \mu = \sum_{n,m} \beta_n\gamma_m\delta_{b_n d_m}$ и $\sum_{n,m} |\beta_n\gamma_m| < \infty$, так как $\sum_n |\beta_n| < \infty$ и $\sum_m |\gamma_m| < \infty$, следовательно, $* : \mathbf{M}_d(G,\mathbf{F}) \times \mathbf{M}_d(G,\mathbf{F}) \to \mathbf{M}_d(G,\mathbf{F})$. Таким образом, $\mathbf{M}_d(G,\mathbf{F})$ - замкнутая подалгебра в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.

Последнее утверждение теоремы является частным случаем для локально компактных пространств [5].

Теорема 2.5. *Пусть G - топологическая (левая) T_1 квазигруппа. Тогда $\mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$ - замкнутый (левый) идеал в алгебре $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.*

Доказательство. В силу леммы 2.4 $\mathbf{M}_c(G,\mathbf{F}) = \bigcap_{x\in G} \mathbf{V}_{\{x\}}$ - пересечение замкнутых линейных подпространств в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, следовательно, $\mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$ - замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. Если $\mu \in \mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$, $\nu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, то из следствия 2.3 вытекает, что $\nu * \mu(\{y\}) = 0$ для любого $y \in G$ в случае левой квазигруппы G. Если G - квазигруппа, то также симметрично $\mu * \nu(\Omega) = \int_G \mu(\Omega/x)\nu(dx)$, следовательно, $\mu * \nu(\{y\}) = 0$ для любого $y \in G$.

Теорема 2.6. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная мера. Тогда $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ - замкнутый левый идеал в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. Алгебра $(\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}),+,*)$ изоморфна алгебре $(\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F}),+,\tilde{*}_\lambda)$, где $(f_1\tilde{*}_\lambda f_2)(y) = \int_G f_1(x)\psi_\lambda(x,y)f_2(x\backslash y)\lambda(dx)$ для f_1 и f_2 из $\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\psi_\lambda(x,y) = \lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$.*

Доказательство. Поскольку G локально компактна, то

$(\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})) \leftrightarrow (\forall \Omega$ компактного ,

$\Omega \subseteq G, (\lambda(\Omega)=0) \to (|\mu|(\Omega)=0))$,

так как $\mathcal{F}_\lambda(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$. В силу леммы 2.4 $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ - замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.

Если $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\Omega \subset G$, Ω компактно, $\lambda(\Omega)=0$, то $|\mu|(x\setminus\Omega)=0$ для любого $x \in G$, так как λ лево-квазиинвариантна относительно G, $\mu \ll \lambda$. Поэтому $|\nu * \mu|(\Omega) \le \int_G |\mu|(x\setminus\Omega)|\nu|(dx) = 0$ для любой $\nu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, следовательно, $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ - левый идеал в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.

В силу теоремы Радона-Никодима для любой $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ существует функция $f \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ такая, что $\mu(dx) = f(x)\lambda(dx)$ (см. теорему 4.2.4 в [5]). Причем это отображение из $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ на $\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ взаимно однозначно и сохраняет норму. Согласно следствию 2.3 $d(\mu_1 * \mu_2)(x) = (f_1\tilde{*}f_2)\lambda(dx)$ при $\psi(x,y) = \psi_\lambda(x,y) = \lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$, где $\lambda^{L_x^{-1}}(\Omega) = \lambda(x\setminus\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G)$, $L_x^{-1}y = x\setminus y$,

$(f_1\tilde{*}f_2)(y) = (f_1\tilde{*}_\lambda f_2)(y) = \int_G f_2(x\setminus y)\psi(x,y)f_1(x)\lambda(dx)$

для любых x и y из G, f_1 и f_2 из $\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\mu_j(dx) = f_j(x)\lambda(dx)$, $j \in \{1,2\}$.

Теорема 2.7. *Пусть G - локально компактная (левая) T_1 квазигруппа. Тогда $\mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{F})$ - замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.*

Доказательство. Если μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{F})$, то $(\mu_1+\mu_2)(\{x\}) = 0$ для любого $x \in G$ (см. также определение 2.4). Для E_1 и E_2 из $\mathcal{B}(G)$ с $\lambda(E_1)=0$ и $\lambda(E_2)=0$, $|\mu|(G-E_1)=0$, $|\mu_2|(G-E_2)=0$ тогда $|\mu_1+\mu_2|(G-(E_1\cup E_2)) \le |\mu_1|(G-E_1)+|\mu_2|(G-E_2)=0$ и $\lambda(E_1\cup E_2)=0$, следовательно, $\mu_1+\mu_2 \in \mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{F})$. При этом $|\beta\mu_j|(G-E_j)=0$ для любого $\beta \in \mathbf{F}$, следовательно, $\mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{F})$ - линейное подпространство в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. Если $\mu_j \in \mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{F})$ для любого $j \in \mathbf{N}$ и $\lim_{j\to\infty}\|\mu-\mu_j\|=0$, где $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, то $\mu \in \mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$ согласно теореме 2.5. Для любого $j \in \mathbf{N}$ существует $E_j \in \mathcal{B}(G)$ такое, что $\lambda(E_j)=0$ и $|\mu_j|(G-E_j)=0$.

Поэтому $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}(G)$ и $\lambda(E) = 0$. Тогда для любого компактного подмножества D в $G - E$ получается

$|\mu(D)| = |\mu(D) - \mu_j(D)| \leq |\mu - \mu_j|(D) \leq \|\mu - \mu_j\|$ для любого $j \in \mathbf{N}$, следовательно, $\mu(D) = 0$. Итак $|\mu|(G - E) = 0$ согласно разложению Жордана-Хана (см. также теорему 4.1.5, следствие 4.1.6 и предложения 4.1.7, 7.5.3 в [5]). Таким образом, $\mu \in \mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F})$.

Теорема 2.8. *Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная мера относительно G. Если G недискретна, то $\mathbf{M}(G, \mathbf{F})$ как линейное пространство раскладывается в прямую сумму $\mathbf{M}_d(G, \mathbf{F}) \oplus \mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F}) \oplus \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$, причем $\forall \mu \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, $\exists_1 \mu_d \in \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F})$, $\exists_1 \mu_s \in \mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F})$, $\exists_1 \mu_a \in \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$, $\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_a$ и $|\mu| = |\mu_d| + |\mu_s| + |\mu_a|$. Если левая квазигруппа G дискретна, то $\mathbf{M}(G, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$ и $\mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F}) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть G недискретна. Поскольку для $\mu \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$ норма конечна $\|\mu\| < \infty$, то $card(\Omega_{\mu,d}) \leq \aleph_0$, где $\Omega_{\mu,d} := \{x \in G : \mu(\{x\}) \neq 0\}$. Если множество $\Omega_{\mu,d}$ пусто, то $\mu_d = 0$. Если оно непусто, $\Omega_{\mu,d} \neq \emptyset$, то $\mu_d = \sum_{b \in \Omega_{\mu,d}} \mu(\{b\}) \delta_b$, где $\delta_b(V) = \chi_V(b)$, $V \subseteq G$, т.е. $\delta_d(V) = 1$ при $d \in V$, $\delta_d(V) = 0$ при $d \notin V$. Тогда $\mu_d \in \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F})$ и $\mu_c = \mu - \mu_d \in \mathbf{M}_c(G, \mathbf{F})$. При этом непрерывная мера μ_c раскладывается единственным образом в виде $\mu_c = \mu_a + \mu_s$, где $\mu_a \in \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$, $\mu_s \in \mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F})$ по теореме Лебега 4.3.2 в [5], причем $|\mu_c| = |\mu_a| + |\mu_s|$, $|\mu| = |\mu_d| + |\mu_c|$. Если бы $\mu = \tilde{\mu}_d + \tilde{\mu}_c$ при $\tilde{\mu}_d \in \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F})$, $\tilde{\mu}_c \in \mathbf{M}_c(G, \mathbf{F})$, то $\mu_d - \tilde{\mu}_d = 0 = \tilde{\mu}_c - \mu_c$, следовательно, $\mathbf{M}(G, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F}) \oplus \mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F}) \oplus \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$.

Если левая квазигруппа G дискретна, то на ней существует неотрицательная нетривиальная лево-инвариантная мера $\nu : 2^G \to [0, +\infty]$ такая, что $\nu(D) = \sum_{d \in G} \delta_d(D)$ для любого $D \subseteq G$. Поскольку λ нетривиальна и неотрицательна, и лево-квазиинвариантна, то $\lambda(\{x\}) > 0$ для любого $x \in G$, так как $\{x\}$ открыто в дискретной G. Поэтому λ эквивалентна ν. С другой стороны, $\mathbf{M}(G, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_d(G, \mathbf{F})$ для дискретного пространства G, так как $\mathcal{B}(G) = 2^G$ в этом случае. Очевидно, что $\mathbf{M}_d(G, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_a(G, \nu, \mathbf{F}) = \mathbf{M}_a(G, \lambda, \mathbf{F})$, следовательно, $\mathbf{M}_s(G, \lambda, \mathbf{F}) = \{0\}$.

Замечание 2.3. Симметрично, если G - правая квазигруппа, $\mathcal{H}$ - право-инвариантное пространство функций на G, $(\underline{M} f)(y) = M(f_y)$ для линейного функционала M на $\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$, $y \in G$, то $N \nabla M = N \circ \underline{M}$ задает свертку линейных функционалов N и M на $\mathcal{H}$ для правой квазигруппы G. Если G неассоциативна, то операция ∇ в общем неассоциативна. Для μ_1 и μ_2 из $\mathbf{M}(G, \mathbf{F})$ тогда $(\mu_1 \nabla \mu_2)(\Omega) = \int_G \mu_2(\Omega / x) \mu_1(dx)$ для любого $\Omega \in \mathcal{F}_{|\mu_1| \nabla |\mu_2|}(G)$.

В частности, $\delta_b \nabla \delta_x = \delta_{xb}$.

Пример 2.3. Данный пример показывает, что не все инвариантные пространства функций $\mathcal{H}$ и их топологические сопряженные пространства $\mathcal{H}'$ годятся для задания алгебры свертки на G. Пусть G - некомпактная локально компактная недискретная T_1 лупа с характером $\chi(G, \mathcal{T}_G) = \aleph_0$ топологического пространства $(G, \mathcal{T}_G)$, где $\mathcal{T}_G$ - топология на G. Тогда выполняется равенство $\chi(x, (G, \mathcal{T}_G)) = \chi(y, (G, \mathcal{T}_G))$ для любых x и y из G, так как $L_b : G \to G$ - гомеоморфизм G как топологического пространства $(G, \mathcal{T}_G)$ для любого $b \in G$, а G - топологическая лупа, где $\chi(x, (G, \mathcal{T}_G))$ обозначает характер топологического пространства $(G, \mathcal{T}_G)$ в точке $x \in G$. В силу теоремы 2.7 в [23]G является $T_1 \cap T_3$ топологическим пространством, а локальная компактность и регулярность влекут, что G вполне регулярна $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$ по теоремам 3.3.11 и 3.2.6 в [22]. То есть на G существует равномерность $\mathcal{U}$ совместимая с топологией $\mathcal{T}_G$. При этом группа H из доказательства этой теоремы имеет $\chi(H, \mathcal{T}_G) = \aleph_0$, так как $card(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}^n) = \aleph_0$ [25], следовательно, H метризуема по теореме 3.3.12 в [2]. Поэтому равномерность $\mathcal{U}$ на G индуцирована метрикой, хотя метрика на G может не быть лево- или право-инвариантной из-за неассоциативности G. Тогда топологическое пространство $(G, \mathcal{T}_G)$ совершенно нормально согласно следствию 4.1.13 в [22]. Как и в примере 3.2 существуют счетное семейство $\{b_j : j \in \mathbf{N}\}$ в G и $V \in \mathsf{B}_e(G)$ такие, что $cl_G V$ компактно, $b_{n+1}V \subset G - \bigcup_{j=1}^{n} b_j V$ для любого $n \ge 1$. Возьмём последовательность $V_j \in \mathsf{B}_e(G)$ с $V_1 \subseteq V$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j = \{e\}$, $V_{j+1} \subset V_j$ для любого $j \in \mathbf{N}$. Следовательно, $\{b_j : j \in \mathbf{N}\}$ и $(G - \bigcup_{j=1}^{\infty} b_j V)$ - непересекающиеся замкнутые подмножества в G. В силу леммы Урысона (теоремы 1.5.10 в [22]) существует функция $f \in C(G, \mathbf{R})$ такая, что $f(G) \subseteq [0, 1]$, $f(b_j) = 1$ для любого $j \in \mathbf{N}$, $f(G - \bigcup_{j=1}^{\infty} b_j V_j) = \{0\}$.

Для любой $h \in C_b(G, \mathbf{C}) := C(G, \mathbf{C}) \cap B(G, \mathbf{C})$, для которой существует предел $\lim_{j\to\infty} h(b_j) =: s_h$, зададим функционал $Mh = s_h$. По теореме Хана-Банаха M имеет непрерывное продолжение до линейного функционала на $C_b(G, \mathbf{C})$, где $\|g\|_{C(G,\mathbf{C})} := \sup_{x\in G} |g(x)| < \infty$ для любой $g \in C_b(G, \mathbf{C})$. Тогда $M(f) = 1$ и $M(f_y) = 0$ для любого $y \in V - \{e\}$, так как $f_y(b_n) = 0$ для $y \notin V_j$ и $n > j$. Поэтому $\underline{M}f$ разрывна.

Симметрично доказывается, что существуют $N \in C'_b(G, \mathbf{C})$ и $f \in C_b(G, \mathbf{C})$ такие, что $\bar{N}f$ разрывна. Следовательно, $C'_b(G, \mathbf{C})$ не является алгеброй свертки.

Пример 2.4. Рассмотрим локально компактную T_1 лупу G и пространство функций $C_{ru}(G, \mathbf{F}) := \{f \in C_b(G, \mathbf{F}) : \forall 0 < \epsilon < \infty, \exists V \in \mathsf{B}_e(G), \forall a \in G, \forall b \in G, (a/b \in V) \to (\|{}_a f - {}_b f\| < \epsilon\}$. Если $M \in C_{ru}(G, \mathbf{F})$, то $\bar{M}f(y) = M({}_y f)$, $\sup_{y\in G} |\bar{M}_a f(y) - \bar{M}_b f(y)| \le \|M\| \sup_{y\in G} \|{}_a({}_y f) - {}_b({}_y f)\| = \|M\| \|{}_a f - {}_b f\|$, следовательно, $\bar{M}f(y) \in C_{ru}(G, \mathbf{F})$.

Симметрично рассматривается пространство функций $C_{lu}(G, \mathbf{F}) := \{f \in C_b(G, \mathbf{F}) : \forall 0 < \epsilon < \infty, \exists V \in \mathsf{B}_e(G), \forall a \in G, \forall b \in G, (a \setminus b \in V) \to (\|f_a - f_b\| < \epsilon\}$.

Тогда для N и M из $C'_{ru}(G,\mathbf{F})$ существует свертка $N*M \in C'_{ru}(G,\mathbf{F})$. Симметрично для N и M из $C'_{lu}(G,\mathbf{F})$ существует $N\nabla M \in C'_{lu}(G,\mathbf{F})$.

Пример 2.5. Пусть G - группоид, $\mathcal{H} = B(G,\mathbf{F})$, $\|f\| = \|f\|_{B(G,\mathbf{F})} := \sup_{x\in G}|f(x)| < \infty$ для любой $f \in B(G,\mathbf{F})$. Если $M \in B'(G,\mathbf{F})$, $f \in B(G,\mathbf{F})$, то $\bar{M}f$ и $\underline{M}f$ принадлежат $B(G,\mathbf{F})$, следовательно, $B'(G,\mathbf{F})$ - алгебра относительно сверток $*$ и ∇. При этом каждый непрерывный линейный функционал N на $B(G,\mathbf{F})$ имеет вид $N(f) = \int_G f(x)\mu(dx)$, где $\mu(\Omega) = N(\chi_\Omega)$ для любого $\Omega \subseteq G$, μ - конечно-аддитивная мера $\mu : 2^G \to \mathbf{F}$, $f \in B(G,\mathbf{F})$.

В общем случае алгебра свертки некоммутативна даже для коммутативной G, так как для $M_j \in \mathcal{H}'$ с $M_j({}_bf) = M_j(f)$ для любых $b \in G$, $f \in \mathcal{H}$, $M_j(1) = 1$, $j \in \{1,2\}$, $M_1 \neq M_2$, $M_1*M_2(f) = M_2(f)$, $M_2*M_1(f) = M_1(f)$.

Пример 2.6. Пусть G - недискретная локально счетно компактная левая T_1 лупа, а λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная относительно G мера на $\mathcal{F}_\lambda(G) \supset \mathcal{B}(G)$. Возьмем непустое открытое подмножество U в G.

Поскольку G локально счетно компактна, то существует непустое открытое подмножество V в U такое, что его замыкание cl_GV в G счетно компактно. Отображение $L_x : G \to G$ является гомеоморфизмом G на G для любого $x \in G$, так как G - топологическая левая лупа, где $L_xg = xg$ для всяких x и g в G. Из теоремы 2.3 в [23] следует, что левая лупа G является T_3-пространством, так как $H = \{e\}$ удовлетворяет условиям (ii) замечания 2.1 в [23]. Поэтому регулярность и недискретность G влечет, что $card(V) \geq \aleph_0$. В силу теоремы 2.5 в [23] и предложения 1.5.5 в [22] существуют непустые открытые подмножества V_0 и V_1 в G такие, что $cl_GV_0 \cup cl_GV_1 \subseteq V$, $cl_GV_0 \cap cl_GV_1 = \emptyset$. Далее по индукции строятся открытые подмножества $V_{j(m)}$ в V, где $j(m) \in \{0,1\}^m$, $m \in \mathbf{N}$. Пусть $V_{j(m)}$ построено. Тогда существуют открытые подмножества $V_{j(m),0}$ и $V_{j(m),1}$ такие, что $cl_GV_{j(m),0} \cup cl_GV_{j(m),1} \subseteq V_{j(m)}$, $cl_GV_{j(m),0} \cap cl_GV_{j(m),1} = \emptyset$. Зададим $B_m := \bigcup\{cl_GV_{j(m)} : j(m) \in \{0,1\}^m\}$, $m \in \mathbf{N}$, следовательно, B_m замкнуто в G как конечное объединение замкнутых подмножеств. Возьмем $C := \bigcap_{m=1}^\infty B_m$. Если $j = (j_1, j_2, ..., j_m, ...) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, то $\bigcap_{m=1}^\infty cl_GV_{j(m)} =: E_j$ непусто и содержится в C, так как cl_GV счетно компактно, где $j(m) = (j_1, ..., j_m)$. При этом $E_j \cap E_i = \emptyset$ для всяких $j \neq i$ из $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Поэтому $card(C) \geq \mathsf{c}$, следовательно, $card(U) \geq \mathsf{c}$.

Отсюда также вытекает, что любое открытое подмножество V в G со счетно компактным замыканием cl_GV содержит компактное подмножество D гомеоморфное $\{0,1\}^\xi$ с $\lambda(D) = 0$, где $\xi = \chi(G,\mathcal{T}_G)$ - топологический характер топологического пространства $(G,\mathcal{T}_G)$, $\mathcal{T}_G$ обозначает топологию на G. Поскольку G недискретна, то $\xi \geq \aleph_0$. Непрерывная вероятностная мера на $\{0,1\}^\xi$ порождает непрерывную вероятностную меру μ на D. Она имеет продолжение до вероятностной меры на G,

$\mathcal{F}_\mu(G)$. По построению μ сингулярна по отношению к λ. Таким образом, алгебра $\mathbf{M}_s(G,\lambda,\mathbf{R})$ нетривиальна.

Пример 2.7. Рассмотрим бесконечные компактные левые T_1 лупы G_j с лево-инвариантными относительно G_j вероятностными мерами $\mu_j : \mathcal{F}_{\mu_j}(G_j) \to [0,1]$, $j \in \{1,2\}$. Для прямого произведения $G = G_1 \times G_2$ левых луп, если $h \in C(G,\mathbf{F})$, то $h_1(x) = h(x,e_2) \in C(G_1,\mathbf{F})$ и $h_2(y) = h(e_1,y) \in C(G_2,\mathbf{F})$, где $x \in G_1$, $y \in G_2$, e_j - единичный элемент в G_j.

Поскольку $M_1(h) := \int_{G_1} h(x,e_2)\mu_1(dx)$ и $M_2(h) := \int_{G_2} h(e_1,y)\mu_2(dy)$ задают непрерывные линейные функционалы $M_j \in C'(G_j,\mathbf{F})$, то существуют меры $\nu_j \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$ такие, что $M_j(h) = \int_G h(x,y)\nu_j(dx,dy)$ по теореме 7.3.6 в [5]. Тогда $\nu_j \in \mathbf{M}_s(G,\mu,\mathbf{F})$, где $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. С другой стороны, $\nu_1 * \nu_2 = \mu$. То есть, в данном случае $\mathbf{M}_s(G,\mu,\mathbf{F})$ не является подалгеброй в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$.

Теорема 2.9. *Предположим, что G - локально компактная T_1 квазигруппа, λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная относительно G мера на $\mathcal{F}_\lambda(G)$. Если $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, функция $\phi_\Omega(y) := \mu(y \setminus \Omega)$ непрерывна в $q \in G$ для любого компактного подмножества Ω в G с $\lambda(\Omega) = 0$, где $y \in G$, то μ абсолютно непрерывна относительно λ.*

Доказательство. Возьмем открытую окрестность W для q в G такую, что $0 < \lambda(W) < \infty$, так как λ неотрицательна и нетривиальна. Тогда $\eta \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ для $\eta(dx) = \chi_W(x)\lambda(dx)$. В силу теоремы 2.6 $\eta * |\mu| \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ симметрично для (правой) квазигруппы. Согласно следствию 2.3 $0 = \eta * |\mu|(\Omega) = \int_G |\mu|(y \setminus \Omega)\eta(dy) \ge \int_W |\mu(y \setminus \Omega)|\lambda(dy)$. Поэтому $\phi_\Omega(y) = 0$ λ-п.в. на W, следовательно, $\mu(q \setminus \Omega) = 0$. При этом $(\lambda(\Omega) = 0) \leftrightarrow (\forall z \in G, \lambda(z\Omega) = 0)$, так как λ лево-квазиинвариантна относительно G. С другой стороны, $q \setminus (q\Omega) = \Omega$, следовательно, $\mu(q \setminus (q\Omega)) = \mu(\Omega) = 0$, так как $q\Omega$ компактно и $\lambda(q\Omega) = 0$.

Замечание 2.4. Рассмотрим локально компактную T_1 квазигруппу $G = Q(\mathcal{A})$ и неотрицательные линейные функционалы N и M на $\mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, где $\mathcal{K}(G,\mathbf{F})$ обозначает пространство всех непрерывных функций $g : G \to \mathbf{F}$ с компактным носителем $supp(g)$. Напомним, что функционал N неотрицателен, если $Nf \ge 0$ для любой $f \ge 0$ из $\mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, где $f \ge 0$, если $f(x) \ge 0$ для любого $x \in G$. При этом G является $T_1 \cap T_3$ топологическим пространством по теореме 2.7 в [23]. В свою очередь локальная компактность и регулярность влекут, что G вполне регулярна $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$ по теоремам 3.3.11 и 3.2.6 в [22]. В силу теоремы 7.2.8 в [5] N и M соответствуют регулярные борелевские меры μ и ν такие, что $Ng = \int_G g(x)\mu(dx)$ и $Mg = \int_G g(x)\nu(dx)$ для любой $g \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$. Согласно предложению 7.2.9 в [5] мере μ соответствует внешняя мера μ^* такая, что любое $\Omega \in \mathcal{B}(G)$ является μ^*-измеримым. Более того, для ограничения μ_1 меры μ^* на $\mathcal{F}_{\mu^*}(G)$ и любой $g \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$ выполняется $Ng = \int_G g(x)\mu_1(dx)$, причем мера μ_1 регулярна и $\mathcal{F}_{\mu^*}(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$ по предложению 7.2.11 в [5]. Обозначим $W_\nu = supp(\nu)$ и $K_g := supp(g) =$

$cl_G\{z \in G : g(z) \neq 0\}$ для $g \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$. Тогда $supp(\bar{M}g) \subseteq K_g/W_\nu$, следовательно, $\bar{M} : \mathcal{K}(G,\mathbf{F}) \to \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$. Поэтому существует свертка $N(\bar{M}g) =: N * Mg$ функционалов N и M, где $g \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$. Если дополнительно $supp(\mu) =: W_\mu$ σ-компактен, то $supp(\mu_1 \times \nu_1)$ тоже σ-компактен. Тогда в силу теоремы Фубини 7.6.7 в [5] для любой $h \in \mathbf{L}^1(G, \mu_1 * \nu_1, \mathbf{F})$ выполняется

$\int_G h(z) d(\mu_1 * \nu_1)(z) = \int_{G\times G} (h \circ \mathcal{A})(x,y)(\mu_1(dx) \times \nu_1(dy))$

$\int_G \left(\int_G h(xy)\nu_1(dy)\right)\mu_1(dx) = \int_G \left(\int_G h(xy)\mu_1(dx)\right)\nu_1(dy)$, так как

$\int_{G\times G} (h \circ \mathcal{A})(x,y)(\mu_1(dx) \times \nu_1(dy)) = \int_{W_{\mu_1}\times W_{\nu_1}} (h \circ \mathcal{A})(x,y)(\mu_1(dx) \times \nu_1(dy))$, где $W_{\mu_1} = supp(\mu_1)$, $W_{\nu_1} = supp(\nu_1)$. В частности,

$\forall D \in \mathcal{F}_{\mu^* * \nu^*}(G)$, $\mu_1 * \nu_1(D) = \int_G \nu_1((x \setminus D) \cap W_{\nu_1})\mu_1(dx)$.

3 Свертки функций на квазигруппах.

Теорема 3.1. *Пусть G - топологическая левая T_1 квазигруппа, λ - неотрицательная нетривиальная лево-квазиинвариантная относительно $H \subseteq G$ мера $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$, $f : G \to \mathbf{F}$ - λ-измеримая функция. Тогда ${}_bf$ λ-измерима для любого $b \in H$. Если дополнительно λ лево-инвариантна относительно $H \subseteq G$ и $f \geq 0$ или $f \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$, то $\int_G {}_bf(x)\lambda(dx) = \int_G f(x)\lambda(dx)$ для любого $b \in H$.*

Доказательство. В силу предложений 2.1.4, 2.1.7 и примера 2.6.6 в [5] достаточно рассмотреть случай неотрицательной функции f. Тогда согласно предложению 2.1.8 в [5] существует неубывающая последовательность простых неотрицательных λ-измеримых функций f_n такая, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in G$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} {}_bf_n(x) = {}_bf(x)$ для любых $x \in G$, $b \in H$, следовательно, ${}_bf(x)$ λ-измерима по предложению 2.1.5 в [5]. При этом $\int_G {}_bf(x)\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_G {}_bf_n(x)\lambda(dx)$ согласно предложению 2.3.2 в [5].

Если дополнительно λ лево-инвариантна относительно H, то $\int_G {}_bf(x)\lambda(dx) = \int_G f(z)\lambda(dz)$ для любого $b \in H$, так как $\lambda(b\Omega) = \lambda(\Omega)$ и $\lambda(b \setminus \Omega) = \lambda(\Omega)$ для любых $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G)$ и $b \in H$, так как G - левая квазигруппа, $L_x : G \to G$ - гомеоморфизм G на G как топологического пространства для всякого $x \in G$.

Теорема 3.2. *Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\phi : G \times G \to G$ и $\eta : G \times G \to G$ - непрерывные отображения такие, что $\phi(x,\eta(x,v))\eta(x,v) = v$ и $\eta(x,\phi(x,z)z) = z$ (либо $\phi(x,\eta(x,v)) \setminus \eta(x,v) = v$ и $\eta(x,\phi(x,z) \setminus z) = z$) для любых x, v, z из G. Тогда $\forall 0 < \epsilon < \infty, \forall x \in G, \exists W \in \mathsf{B}_x(G)$, $\forall y \in W, \|\hat{L}^s_{\phi(x,z)} f(z) - \hat{L}^s_{\phi(y,z)} f(z)\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} < \epsilon$ при $s = 1$ (либо $s = -1$ соответственно).*

Доказательство. В силу предложения 7.4.3 в [5] $\forall 0 < \epsilon < \infty, \exists h \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, $\|f - h\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} < \epsilon/3$, $supp(h) =: K_h$ - компактен. Согласно лемме 2.2 $\forall 0<\delta<\infty$, $\forall x\in G$, $\exists W\in \mathsf{B}_x(G)$, $\forall y\in W$, $\forall z\in G$, $|_{\phi(x,z)}h(z)-{}_{\phi(y,z)}h(z)|<\delta$, следовательно,

$\int_G |h(\phi(x,z)z)-h(\phi(y,z)z)|^p\lambda(dz)=$
$\int_{\{z\in G:(\phi(x,z)z\in K_h)\vee(\phi(y,z)z\in K_h)\}}|h(\phi(x,z)z)-h(\phi(y,z)z)|^p\lambda(dz)$
$\le \delta^p[\lambda(\eta(x,K_h))+\lambda(\eta(y,K_h))]$,

так как $\eta(x,\phi(x,z)z)=z$. Поскольку G локально компактна, то $W\in \mathsf{B}_x(G)$ можно взять с компактным замыканием cl_GW, следовательно, $\lambda(\eta(y,K_h))\le\lambda(\eta(cl_GW,K_h))<\infty$, так как λ конечна на любом компактном подмножестве в G, а $\eta(cl_GW,K_h)$ компактно по теореме 3.1.10 в [22], так как отображение $\eta: G\times G\to G$ (совместно) непрерывно. Поэтому $\|_{\phi(x,z)}f(z)-{}_{\phi(y,z)}f(z)\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}<\epsilon$ при $0<\delta<\epsilon/(3\max(1,[\lambda(\eta(x,K_h))+\lambda(\eta(cl_GW_0,K_h))]^{1/p}))$, где $W\subseteq W_0$, $W_0\in\mathsf{B}_x(G)$, $0<\delta_0=\epsilon/(3\max(1,[2\lambda(\eta(x,K_h))]^{1/p}))$, W_0 соответствует δ_0 как и выше для h, cl_GW_0 компактно, так как $\lambda(\eta(cl_GW_0,K_h))\ge\lambda(\eta(cl_GW,K_h))\ge\lambda(\eta(x,K_h))$. Доказательство второго случая $\phi(x,\eta(x,v))\setminus\eta(x,v)=v$ и $\eta(x,\phi(x,z)\setminus z)=z$ проводится аналогично.

Определение 3.1. Пусть G - топологическая левая T_1 квазигруппа, $\lambda:\mathcal{F}_\lambda(G)\to[0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, $\mu\in\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, $\nu\in\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\nu(dx)=f(x)\lambda(dx)$, $f\in\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$. Тогда $d(\nu*\mu)(x)=:(f\tilde{*}_\lambda\mu)(x)\lambda(dx)$, $d(\mu*\nu)(x)=:(\mu\tilde{*}_\lambda f)(x)\lambda(dx)$. Если дополнительно $\mu\in\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\mu(dx)=g(x)\lambda(dx)$, $g\in\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ то $(g\tilde{*}_\lambda f)(x)\lambda(dx):=(\mu\tilde{*}_\lambda f)(x)\lambda(dx)$. Если λ задана, то кратко можно писать $\tilde{*}$ вместо $\tilde{*}_\lambda$. Если дополнительно λ лево-инвариантна, то $*$ также используется вместо $\tilde{*}$.

Лемма 3.1. *Пусть $G=Q(\mathcal{A})$ - топологическая левая T_1 квазигруппа, λ - лево-квазиинвариантная мера относительно G, ν - мера на G, λ и ν со значениями в $[0,\infty]$ или $\mathbf{F}$, $|\nu|$- σ-конечна, $f:G\to\mathbf{F}$ $|\lambda|$-измеримая функция. Тогда функции $g_1(x,y)=f(xy)$ и $g_2(x,y)=f(x\setminus y)$ $|\nu|\times|\lambda|$-измеримы на $G\times G$, где $x\in G$, $y\in G$.*

Доказательство. Поскольку G - топологическая левая T_1 квазигруппа, а мера λ лево-квазиинвариантна, то $\forall D\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $(|\lambda|(D)=0)\leftrightarrow(\forall y\in G,|\lambda|(yD)=0)\leftrightarrow(\forall y\in G,|\lambda|(y\backslash D)=0)$, следовательно, $L_y\mathcal{F}_\lambda(G)=\mathcal{F}_\lambda(G)$ и $L_y^{-1}\mathcal{F}_\lambda(G)=\mathcal{F}_\lambda(G)$ для любого $y\in G$, так как $L_y\mathcal{B}(G)=\mathcal{B}(G)$ и $L_y^{-1}\mathcal{B}(G)=\mathcal{B}(G)$. Отображения $\mathcal{A}(x,y)=xy$ и $Div_l(x,y)=x\backslash y$ (совместно) непрерывны из $G\times G$ в G, следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}(G))\subset\mathcal{B}(G\times G)$ и $Div_l^{-1}(\mathcal{B}(G))\subset\mathcal{B}(G\times G)$. Поскольку $|\nu|$ σ-конечна, то $\forall D\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $\forall W\in\mathcal{F}_\nu(G)$, $(|\lambda|(D)=0)\to((|\nu|\times|\lambda|)(W\times D)=0)$. Если $S\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, то по теореме Фубини 5.2.2 в [5] $\mathcal{A}^{-1}(S\cap J)$ и $Div_l^{-1}(S\cap J)$ $|\nu|\times|\lambda|$-измеримы для любого компактного подмножества J в G, следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(S)$ и $Div_l^{-1}(S)$ $|\nu|\times|\lambda|$-измеримы, так как G локально компактна, $|\nu|(J)<\infty$, $|\lambda|(J)<\infty$. По условию леммы $f^{-1}(E)\in\mathcal{F}_\lambda(G)$ для любого $E\in\mathcal{B}(G)$. Тогда из предложений 2.6.1, 2.6.2 и 2.6.4 в [5] следует, что $g_j^{-1}(E)\in\mathcal{F}_{|\nu|\times|\lambda|}(G\times G)$ для любых $E\in\mathcal{B}(\mathbf{F})$, $j\in\{1,2\}$.

Теорема 3.3. *Предположим, что $G = Q(\mathcal{A})$ - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная левоквазиинвариантная мера, $f \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, либо $\nu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, либо $\nu : \mathcal{F}_\nu(G) \to [0,\infty]$ и $\nu(K) < \infty$ для любого компактного подмножества K в G, и существует открытое подмножество V в G с $0 < \nu(V) < \infty$, $g : G \to \mathbf{F}$ $|\nu|$-измерима и $g(x) = 0$ для любого $x \in G - S$, где S - σ-компактное подмножество в G. Пусть существует постоянная $0 < \kappa < \infty$ такая, что*

(а) $\int_G \int_G |h(y)g(x)f \circ \xi_j(x,y)|\lambda(dy)|\nu|(dx) \le \kappa \|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}$
для любой $h \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, где $1 \le p \le \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\xi_1 = \mathcal{A}$, $\xi_2 = Div_l$. Если $1 \le p < \infty$ и $f|_{G-D} = 0$ λ-п.в., $D \subset G$, D - σ-компактно, то

(б) $\exists \int_G g(x)f \circ \xi_j(x,y)\nu(dx) =: k_j(y)$
и конечен для λ-п.в. $y \in G$, $k_j \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\|k_j\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \kappa$. Если $p = \infty$, то $k_j(y)$ существует и конечна для локально λ-п.в. $y \in G$, $k_j \in \mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\|k_j\|_{\mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \kappa$.

Доказательство. Если $\nu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, то существует $|\nu|$-измеримая функция $t : G \to \mathbf{F}$ такая, что $\nu(dx) = t(x)|\nu|(dx)$ в силу теоремы Радона-Никодима. Поскольку $\|\nu\| < \infty$, то существует σ-компактное подмножество Θ в G такое, что $|\nu|(G - \Theta) = 0$. Поэтому можно выбрать функцию t такой, что $t|_{G-\Theta} = 0$, причем в случае неотрицательной меры ν естественно $t|_\Theta = 1$. Тогда функция tg $|\nu|$-измерима и $tg|_{G-\Theta} = 0$. Для $h \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$ существует $K_h \subset G$, K_h компактно, $h|_{G-K_h} = 0$. В силу леммы 3.1 функция $u(x,y) = h(y)t(x)g(x)f \circ \xi_j(x,y)$ $|\nu| \times \lambda$-измерима. Пусть $f_j(x,y) := |f \circ \xi_j(x,y)|$. Из теоремы Фубини вытекает, что

$$\int_G \left(\int_G h(y)t(x)g(x)f_j(x,y)\lambda(dy) \right)|\nu|(dx) =$$

$$\int_G \left(\int_G h(y)t(x)g(x)f_j(x,y)|\nu|(dx) \right)\lambda(dy),$$

причем существует

$$\int_G h(y)t(x)g(x)f_j(x,y)|\nu|(dx) = h(y) \int_G t(x)g(x)f_j(x,y)|\nu|(dx)$$

и этот интеграл конечен для λ-п.в. $y \in G$. Тогда можно задать $k_j(y)$ по формуле (б) в тех точках y, в которых этот интеграл существует и конечен, $k_j(y) = 0$ в противном случае. Поскольку $h \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$ произвольна, то функция k_j λ-измерима. При этом на локально компактном пространстве рассматриваются радоновы меры [27] (см. также замечание 2.1 выше), то в силу теоремы 7.2.8 в [5] мера λ регулярная, так как $\mathcal{F}_\lambda(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$ и $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $f|_{G-D} = 0$ λ-п.в., где D σ-компактно, $D \subset G$. Множества $\Omega_1 = \Theta \setminus D$ и $\Omega_2 = \Theta D$ σ-компактны в силу (совместной) непрерывности ξ_1 и ξ_2. Поэтому для Ω_j существует последовательность $\{s_{n,j} : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathcal{K}(G,[0,\infty))$ такая, что $0 \le s_{n,j}(x) \le s_{n+1,j}(x) \le 1$ для любых $n \in \mathbf{N}$, $j \in \{1,2\}$ и $x \in G$, $\lim_{n\to\infty} s_{n,j}(x) = \chi_{\Omega_j}(x)$ λ-п.в. согласно предложению 2.1.8 в [5]. Тогда существует

$\tilde{k}_j(y) = \lim_{n\to\infty} s_{n,j}(y) \int_G t(x)g(x)f_j(x,y)|\nu|(dx)$
для λ-п.в. $y \in \Omega_j$ и $\tilde{k}_j(y)|_{G-\Omega_j} = 0$ по теореме о монотонной сходимости 2.4.1 в [5]. При этом, если $\tilde{k}_j(y) \ne 0$, то существует $x \in \Theta$ такое, что $t(x)g(x)f_j(x,y) \ne 0$, следовательно, $y \in \Omega_j$, так как $\xi_j(x,y) \in D$. Из σ-компактности Ω_j вытекает, что

$$\left| \int_G \tilde{k}_j(y)h(y)\lambda(dy) \right| \le \kappa \|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})},$$

$k_j \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$ и $\|k_j\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \kappa$ по теореме 4.5.1 в [5], где $1 \le p < \infty$.

Пусть теперь $p = \infty$. Предположим, что существует компактное подмножество K в G такое, что $\lambda(\Upsilon_j \cap K) > 0$, где Υ_j обозначает множество всех тех $x \in G$, для которых интеграл $\int_G t(x)g(x)f_j(x,y)|\nu|(dx)$ или не существует, или ∞. Тогда для $h \in \mathcal{K}(G,[0,\infty))$ с $h(K) = \{1\}$ получается противоречие с условием (a), следовательно, Υ_j - локально λ-нулевое. Поэтому $k_j(y)$ существует λ-п.в.

Предположим, что множество $\{y \in G : |k_j(y)| > \kappa\} =: W_\kappa$ не является локально λ-нулевым, тогда существует $\eta > \kappa$ такое, что W_η не локально λ-нулевое. Тогда бы существовало компактное подмножество K в W_η с $\lambda(K) > 0$. По условиям теоремы мера λ регулярна, следовательно, существует открытое подмножество V в G с $K \subset V$ и $\lambda(V \cap (G-K)) < (\eta-\kappa)\lambda(K)/\kappa$. Существует функция $h \in \mathcal{K}(G,[0,\infty))$ такая, что $h(K) = \{1\}$, $h(G-V) = \{0\}$, $h(G) \subseteq [0,1]$. Тогда по теореме Фубини

$$\|h\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{R})}\kappa \le \kappa\lambda(V) < \kappa\lambda(K) + (\eta-\kappa)\lambda(K)$$
$$\le \int_G |h(y)k_j(y)|\lambda(dy) \le \int_G \left(\int_G |h(y)g(x)f_j(x,y)|\lambda(dy) \right) |\nu|(dx).$$

Последнее противоречит условию (a), следовательно, $k_j \in \mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})$ и $\|k_j\|_{\mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \kappa$.

Теорема 3.4. *Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, мера $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ нетривиальна и лево-квазиинвариантна, $f \in \mathbf{L}^{1,\infty}_G(G,\lambda,\mathbf{F})$, где $\mathbf{L}^{p,r}_G(G,\lambda,\mathbf{F}) := \{g : G \to \mathbf{F} : \forall x \in G, s_x(z) \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F}), s_x(z) := g(x\backslash z)\lambda^{L_x^{-1}}(dz)/\lambda(dz), \|g\|_{\mathbf{L}^{p,r}_G(G,\lambda,\mathbf{F})} := \|h(x)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} < \infty, \|s_x(z)\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} =: h(x) \in \mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})\}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le r \le \infty$. Тогда существует свертка*

$$\mu \tilde{*}_\lambda f(x) = \int_G \frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y \setminus x)\mu(dy)$$

для λ-п.в. $x \in G$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3 существует интеграл

$$\int_G g(y)d(\mu*\nu)(y) = \int_G\int_G g(xy)f(y)\lambda(dy)\mu(dx)$$

для любой $g \in \mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, где $\nu(dx) = f(x)\lambda(dx)$. Из теоремы 3.1 вытекает, что

$$\int_G g(xy)f(y)\lambda(dy) = \int_G g(z)f(x\setminus z)\frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dz)}{\lambda(dz)}\lambda(dz), \text{ следовательно,}$$
$$\int_G g(y)d(\mu*\nu)(y) = \int_G\int_G g(z)f(x\setminus z)\frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dz)}{\lambda(dz)}\lambda(dz)\mu(dx).$$

Поскольку $\nu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, то существует σ-компактное подмножество S в G такое, что $f|_{G-S} = 0$ λ-п.в. Из теорем 3.3 и 2.2 следует неравенство

$\int_G \int_G |g(z)f(x \setminus z)| \frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dz)}{\lambda(dz)} \lambda(dz)|\mu|(dx) \leq \|g\|_{C(G,\mathbf{F})} \|\mu\| \|f\|_{\mathbf{L}_G^{1,\infty}(G,\lambda,\mathbf{F})} < \infty$.

Поэтому $\int_G f(x \setminus y) \frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dy)}{\lambda(dy)} \mu(dx) =: k(y) \in \mathbf{L}^1(G, \lambda, \mathbf{F})$. Тогда по теореме Фубини

$$\int_G g(y)k(y)\lambda(dy) = \int_G \left(\int_G g(y)f(x \setminus y) \frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dy)}{\lambda(dy)} \mu(dx) \right) \lambda(dy) = \int_G g(y)(\mu \tilde{*}_\lambda f)(y)\lambda(dy)$$

для любой $g \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$, где $(\mu \tilde{*}_\lambda f)(y) = \int_G f(x \setminus y) \frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dy)}{\lambda(dy)} \mu(dx)$, следовательно, $\|\mu \tilde{*}_\lambda f - k\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})} = 0$ согласно предложениям 4.2.5 и 7.3.2 в [5].

Следствие 3.1. *Если выполняются условия теоремы 3.4 и $h \in \mathbf{L}^1(G, \lambda, \mathbf{F})$, то существует свертка $(h \tilde{*}_\lambda f)(y) = \int_G h(x)f(x \setminus y) \frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dy)}{\lambda(dy)} \lambda(dx)$.*

Доказательство. Данное следствие является частным случаем теоремы 3.4 при $\mu(dx) = h(x)\lambda(dx)$.

Замечание 3.1. В отличие от групп из-за неассоциативности (левой) квазигруппы G в общем случае свертки $({}_bh)\tilde{*}_\lambda f$ и ${}_b(h \tilde{*}_\lambda f)$ могут быть различны, где $b \in G$, $b \neq e$.

Если выполняются условия теоремы 3.4 и мера λ лево-инвариантна относительно G, то $\frac{\lambda^{L_x^{-1}}(dy)}{\lambda(dy)} = 1$ и $\mathbf{L}_G^{p,\infty}(G, \lambda, \mathbf{F}) = \mathbf{L}^p(G, \lambda, \mathbf{F})$. Если дополнительно $\lambda(G) < \infty$, то $\mathbf{L}_G^{p,r}(G, \lambda, \mathbf{F})$ изоморфно $\mathbf{L}^p(G, \lambda, \mathbf{F})$, так как $h(x) = \|g\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}$ в этом случае, где $1 \leq r < \infty$.

Теорема 3.5. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\mu \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, мера $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0, \infty]$ нетривиальна и лево-квазиинвариантна, $f \in \mathbf{L}_G^{p,\infty}(G, \lambda, \mathbf{F})$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда существует подмножество $S \in \mathcal{F}_\lambda(G)$ с $\lambda(S) = 0$ при $1 \leq p < \infty$, S - локально λ-нулевое при $p = \infty$, такое, что для любого $x \in G - S$ существует свертка*

$$\mu \tilde{*}_\lambda f(x) = \int_G \frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y \setminus x)\mu(dy).$$

Если доопределить свертку $\mu \tilde{*}_\lambda f|_S = 0$, то $\|\mu \tilde{*}_\lambda f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} \leq \|\mu\| \|f\|_{\mathbf{L}_G^{p,\infty}(G,\lambda,\mathbf{F})}$.

Доказательство. При $1 \leq p < \infty$ существует σ-компактное подмножество D в G такое, что $f|_{G-D} = 0$ λ-п.в., так как $f \in \mathbf{L}_G^{p,\infty}(G, \lambda, \mathbf{F}) \subset \mathbf{L}^p(G, \lambda, \mathbf{F})$. Поскольку $\mu \in \mathbf{M}(G, \mathbf{F})$, квазигруппа G локально компактна, то $supp(|\mu|)$ σ-компактен. Применение неравенства Гёлдера (предложение 3.3.2 в [5]) даёт

$$\int_G \left|\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y \setminus x)h(x)\right|\lambda(dx) \leq$$
$$\left(\int_G \left|\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y \setminus x)\right|^p \lambda(dx) \right)^{1/p} \left(\int_G |h(x)|^q \lambda(dx) \right)^{1/q}$$
$$\leq \|f\|_{\mathbf{L}_G^{p,\infty}(G,\lambda,\mathbf{F})} \|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}$$

при $1 \leq p < \infty$ для любой $h \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$ и

$\int_G |\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y\backslash x)h(x)|\lambda(dx) \le ess_\lambda{-}\sup_{x\in G} |\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y\backslash x)| \|h\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \|f\|_{\mathbf{L}_G^{\infty,\infty}(G,\lambda,\mathbf{F})} \|h\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})}$ при $p=\infty$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Поэтому утверждение данной теоремы вытекает из теоремы 3.3 при использовании $g=\chi_{supp(|\mu|)}$, $\kappa = \|\mu\| \|f\|_{\mathbf{L}_G^{p,\infty}(G,\lambda,\mathbf{F})}$, $\xi_2(x,y)=x\setminus y$.

Следствие 3.2. *Если выполняются условия теоремы 3.4, но уже с $f\in \mathbf{L}_G^{p,r}(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\mu(dx)=\eta(x)\lambda(dx)$ и $1\le p\le\infty$, $1\le r\le\infty$ и $\eta\in \mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})$, где $r^{-1}+t^{-1}=1$, то существует свертка $\eta\tilde{*}_\lambda f\in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$ и $\|\eta\tilde{*}_\lambda f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} \le \|f\|_{\mathbf{L}_G^{p,r}(G,\lambda,\mathbf{F})} \|\eta\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})}$, где $\eta\tilde{*}_\lambda f|_S=0$ для S из теоремы 3.5.*

Доказательство. Следствие вытекает из теорем 3.3, 3.5, Фубини и неравенства Гёльдера, так как

$$(\eta\tilde{*}_\lambda f)(x)=\int_G \eta(y)\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y\setminus x)\lambda(dy)$$

для любого $x\in G-S$, $\eta\tilde{*}_\lambda f|_S=0$ и

$$\int_G |\eta(y)| \left(\int_G |\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y\setminus x)h(x)|\lambda(dx)\right)\lambda(dy) \le$$
$$\int_G |\eta(y)| \left(\int_G |\frac{\lambda^{L_y^{-1}}(dx)}{\lambda(dx)} f(y\setminus x)|^p\lambda(dx)\right)^{1/p}\lambda(dy)\|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}$$
$$\le \|f\|_{\mathbf{L}_G^{p,r}(G,\lambda,\mathbf{F})}\|\eta\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})}\|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}.$$

Теорема 3.6. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, мера $\lambda:\mathcal{F}_\lambda(G)\to[0,\infty]$ нетривиальна и лево-инвариантна, $f\in \mathbf{L}_G^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, $1\le p<\infty$. Тогда $\forall 0<\epsilon<\infty$, $\forall b\in G$, $\exists W\in \mathsf{B}_b(G)$, $\forall \mu\in \mathbf{M}(G,[0,1])$ такой, что $\mu(G)=1$ и $\mu(G-W)=0$ выполняется неравенство $\|\mu\tilde{*}_\lambda f-\hat{L}_b^{-1}f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}<\epsilon$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.5 и замечания 3.1 существует свертка $\mu\tilde{*}_\lambda f\in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, так как λ лево-инвариантна. Согласно теореме 3.2 $\forall 0<\epsilon<\infty, \forall b\in G, \exists W\in\mathsf{B}_b(G), \forall y\in W$, $\|\hat{L}_y^{-1}f-\hat{L}_b^{-1}f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}<\epsilon/2$, где $\hat{L}_y^{-1}f(x)=f(y\setminus x)$, так как $y(y\setminus x)=x$ для любых x и y в левой квазигруппе G. Тогда для любых $h\in\mathcal{K}(G,\mathbf{F})$, $\mu\in\mathbf{M}(G,[0,1])$ с $\mu(G)=1$ и $\mu(G-W)=0$ в силу теоремы Фубини

$$\int_G |\mu\tilde{*}f(x)-f(b\setminus x)||h(x)|\lambda(dx)=$$
$$\int_G \left|\int_W (f(y\setminus x)-f(b\setminus x))\mu(dy)\right||h(x)|\lambda(dx)\le$$
$$\int_W \left(\int_G |f(y\setminus x)-f(b\setminus x)||h(x)|\lambda(dx)\right)\mu(dy)\le$$
$$\int_W \|\hat{L}_y^{-1}f-\hat{L}_b^{-1}f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}\|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}\mu(dy)\le\epsilon\|h\|_{\mathbf{L}^q(G,\lambda,\mathbf{F})}/2,$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Поэтому из предложения 7.3.2 в [5] вытекает, что $\|\mu\tilde{*}_\lambda f-\hat{L}_b^{-1}f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}<\epsilon$.

Теорема 3.7. *Пусть G - локально компактная T_1 лупа, $\lambda:\mathcal{F}_\lambda(G)\to[0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, фактор квазиинвариантности $\psi(x,y)=\lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$ непрерывен на $G\times G$, $0<\alpha=\inf_{x\in G,y\in G}\psi(x,y)\le\sup_{x\in G,y\in G}\psi(x,y)=\beta<\infty$, $1\le r\le\infty$,*

$r^{-1} + t^{-1} = 1$, $f \in \mathbf{L}^t(G, \lambda, \mathbf{F})$, $g \in \mathbf{L}^{\infty,r}_G(G, \lambda, \mathbf{F})$. *Тогда свертка* $f\tilde{*}_\lambda g$ *непрерывна. Причем* $f\tilde{*}_\lambda g \in C_0(G, \mathbf{F})$ *при* $1 < r < \infty$.

Доказательство. Пусть $\phi(x, y) = y/(e/(y \setminus x))$. Поскольку $\psi(x, y)$ и $\phi(x, y)$ непрерывны на $G \times G$, $\psi(x, y)$ ограничена на $G \times G$, то $\forall x \in G$, для любого компактного подмножества K в G, $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\forall P_e \in \mathsf{B}_e(G)$, $\exists Q_e \in \mathsf{B}_e(G)$, $\forall s \in Q_e x$, $\forall y \in K$, $|\psi(y, x) - \psi(y, s)| < \epsilon$ и $\phi(s, y) \in P_e\phi(x, y)$ по теоремам 2.5 и 2.6 в [23]. Функцию g можно доопределить с точностью до множества λ меры нуль в классе эквивалентности функций в $\mathbf{L}^{\infty,r}_G(G, \lambda, \mathbf{F})$, так что при $1 \le r < \infty$, $\forall 0 < \epsilon < \infty$, $\exists h \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$, $\|\tilde{g}_{(x)}(y) - \tilde{h}_{(x)}(y)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} < \epsilon$ для любого $x \in G$, где $\breve{g}(y) = g(y \setminus e)$, $\tilde{g}_{(x)}(y) = \breve{g}(\phi(x, y) \setminus y)\psi(y, x)$, так как $0 < \alpha \le \beta < \infty$, где $supp(h) =: K_h$ компактен согласно предложению 7.4.4 в [5]. Тогда

$\int_G f(y)g(y \setminus x)\psi(y, x)\lambda(dy) =$

$\int_G f(y)\breve{g}(\phi(x, y) \setminus y)\psi(y, x)\lambda(dy)$ и

$\int_G |f(y)\breve{g}(\phi(x, y) \setminus y)\psi(y, x)|\lambda(dy) \le \|f\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})}\|\tilde{g}_{(x)}(y)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} < \infty$

согласно неравенству Гёльдера и следствию 3.2, так как

$\|\tilde{g}_{(x)}(y)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} = \{\int_G |\breve{g}(\phi(x, y) \setminus y)\psi(y, x)|^r\lambda(dy)\}^{1/r} < \infty$

для всех $x \in G$, причем $supp(\tilde{h}_{(x)}) =: K_{\tilde{h}_{(x)}}$ компактен для любого $x \in G$. Итак, свертка $f\tilde{*}_\lambda g$ существует и конечна для любых $x \in G$, $1 \le r < \infty$.

Поскольку $(x/y)\backslash x = y$, $x/(y\backslash x) = y$, $\phi(x, y) = y/(e/(y\backslash x))$ для любых x, y из G, то $\eta(x, z) = x/(z\backslash e)$, $\phi(x, \eta(x, z))\backslash\eta(x, z) = z$, $\eta(x, \phi(x, y)\backslash y) = y$, $g(z) = \breve{g}(e/z)$ для любых x, y, z из G. Тогда

$f\tilde{*}_\lambda g(x) - f\tilde{*}_\lambda g(s) =$

$\int_G f(y)[\breve{g}(\phi(x, y) \setminus y)\psi(y, x) - \breve{g}(\phi(s, y) \setminus y)\psi(y, s)]\lambda(dy)$, следовательно, $\forall x \in G$, $\forall 0 < \delta < \infty$, $\exists Q_e \in \mathsf{B}_e(G)$, $\forall s \in Q_e x$, $\|\tilde{g}_{(x)}(y) - \tilde{g}_{(s)}(y)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} < \delta$ и

$|f\tilde{*}_\lambda g(x) - f\tilde{*}_\lambda g(s)| \le \|f\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})}\|\tilde{g}_{(x)}(y) - \tilde{g}_{(s)}(y)\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} < \epsilon$ при $0 < \delta \le \epsilon/\max(\|f\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})}, 1)$ в силу леммы 2.2, теоремы 3.2 и следствия 3.2. Таким образом, свертка $f\tilde{*}_\lambda g(x)$ непрерывна при $1 \le r < \infty$.

Если $f \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$ и $h \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$, то $f\tilde{*}_\lambda h(x) \in \mathcal{K}(G, \mathbf{F})$, так как $supp(f\tilde{*}_\lambda h) \subseteq K_f K_h$, где $K_h = supp(h)$. Поскольку $0 < \alpha \le \beta < \infty$, то при $1 < r < \infty$ существуют последовательности f_n и h_n в $\mathcal{K}(G, \mathbf{F})$ такие, что $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})} = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \|g - h_n\|_{\mathbf{L}^{\infty,r}_G(G,\lambda,\mathbf{F})} = 0$, так как $1 < t < \infty$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in G} |f\tilde{*}_\lambda g(s) - f_n\tilde{*}_\lambda h_n(s)| = 0$ согласно следствию 3.2, так как $\phi : G \times G \to G$, $\psi : G \times G \to [\alpha, \beta]$ непрерывны. Поэтому $f\tilde{*}_\lambda g \in C_0(G, \mathbf{F})$ при $1 < r < \infty$.

В случае $r = \infty$ существует σ-компактное подмножество S в G такое, что $\int_{G-S} |f(y)|\lambda(dy) = 0$, так как $t = 1$. При этом имеется последовательность $\{S_n : n \in \mathbf{N}\}$ компактных подмножеств такая, что $S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq S$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{n=1}^\infty S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} \|f - f\chi_{S_n}\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})} = 0$, $f\chi_{S_n} \in \mathbf{L}^p_G(G, \lambda, \mathbf{F})$ с $1 < p < \infty$ по теореме Лузина [5] . При этом для компактной окрестности W точки $x \in G$ такой, что $x \in Int_G(W)$, $cl_G(Int_G(W)) = W$,

$(f\chi_{S_n})\tilde{*}_\lambda g(s) = \int_G (f\chi_{S_n})(y)g(y \setminus s)\psi(y, x)\lambda(dy)$

$= \int_G (f\chi_{S_n})(y)(g\chi_{S_n\setminus W})(y\setminus s)\psi(y,x)\lambda(dy)$
для любой $s\in W$, а $S_n\setminus W$ компактно. С другой стороны, $(g\chi_{S_n\setminus W})\in \mathbf{L}^{\infty,q}_G(G,\lambda,\mathbf{F})$ с $1<q<\infty$, $q^{-1}+p^{-1}=1$, так как $0<\alpha\le\beta<\infty$. Из доказательства выше вытекает, что свертка $(f\chi_{S_n})\tilde{*}_\lambda g$ непрерывна на G, так как x произвольно, а $s\in W$.

Для непрерывной функции $h: G\to\mathbf{F}$ выполняется $\sup_{x\in G}|h(x)| = \|h\|_{\mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})}$, так как $0<\lambda(U)$ для любого открытого подмножества U в G. Поэтому последовательность $((f\chi_{S_n})\tilde{*}_\lambda g)\chi_W$ фундаментальна в $C(W,\mathbf{F})$ относительно нормы $\|h\|_{C(W,\mathbf{F})} := \sup_{s\in W}|h(s)|$ согласно следствию 3.2. Итак, $((f\chi_{S_n})\tilde{*}_\lambda g)\chi_W$ сходится к $(f\tilde{*}_\lambda g)\chi_W$ по норме $\|h\|_{C(W,\mathbf{F})}$ для любого компактного подмножества W в G такого, что $cl_G(Int_G(W)) = W$, следовательно, $f\tilde{*}_\lambda g$ непрерывна.

Предложение 3.1. *Предположим, что G - локально компактная T_1 лупа, $\lambda:\mathcal{F}_\lambda(G)\to[0,\infty]$ - лево-квазиинвариантная мера, $A\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $B\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $0<\lambda(A)<\infty$, $0<\lambda(x/B)<\infty$ для любого $x\in AB$, $0<\alpha_\lambda := ess_{\lambda\times\lambda}-\inf_{x\in G,y\in G}\psi(x,y)<\infty$, где $\psi(x,y)=\lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$. Тогда функция $k(x)=\lambda(A\cap(x/B))$ непрерывна и ненулевая, $Int_G(AB)\ne\emptyset$. Если $x_1\in G$, $B\supseteq D\setminus x_1$, $D\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $\lambda(A\cap D)>0$, то AB содержит открытую окрестность точки x_1. Если дополнительно cl_GA и cl_GB компактны, то $k\in\mathcal{K}(G,[0,\infty))$.*

Доказательство. Характеристические функции $\chi_A(y)$ и $\chi_{x/B}(y)$ принадлежат $\mathbf{L}^2(G,\lambda,\mathbf{R})$. Поскольку
$k(x)=\int_G\chi_A(y)\chi_B(y\setminus x)\lambda(dy)=\lambda(A\cap(x/B))$, то
$|k(x)-k(s)|\le(\lambda(A))^{1/2}\|\check{\chi}_B(\phi(x,y)\setminus y)-\check{\chi}_B(\phi(s,y)\setminus y)\|_{\mathbf{L}^2(G,\lambda,\mathbf{R})}$
согласно неравенству Коши-Буняковского, где $\check{f}(y)=f(y\setminus e)$, $\phi(x,y) = y/(e/(y\setminus x))$. В силу теоремы 3.2 функция $k(x)$ непрерывна.

Если cl_GA и cl_GB компактны, то $k\in\mathcal{K}(G,[0,\infty))$, так как $k(x)=0$ при $x\in G-AB$, $G-AB\subseteq G-(cl_GA)(cl_GB)$. При этом

$$\int_G k(x)\lambda(dx)=\int_G\left(\int_G\chi_A(y)\chi_B(y\setminus x)\lambda(dy)\right)\lambda(dx)$$

$$=\int_G\left(\int_G\chi_B(y\setminus x)\lambda(dx)\right)\chi_A(y)\lambda(dy)\ge\alpha_\lambda\lambda(A)\lambda(B)>0$$

по теореме Фубини, следовательно, $k(x)$ - ненулевая функция. При этом $k(x)$ положительна на некоторой открытой окрестности W_{x_0} точки x_0, в которой $k(x_0)>0$, причем $W_{x_0}\subset AB$, так как $k(x)$ непрерывна. Если $x_1\in G$, $B\supseteq D\setminus x_1$, $D\in\mathcal{F}_\lambda(G)$, $\lambda(A\cap D)>0$, то $k(x_1)=\lambda(A\cap D)$, так как $x_1/(D\setminus x_1)=D$, следовательно, AB содержит открытую окрестность точки x_1.

Теорема 3.8. *Предположим, что G - локально компактная T_1 лупа, $\lambda:\mathcal{F}_\lambda(G)\to[0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, фактор квазиинвариантности $\psi(x,y)=\lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$ непрерывен на $G\times G$, $0<\alpha=\inf_{x\in G,y\in G}\psi(x,y)\le\sup_{x\in G,y\in G}\psi(x,y)=\beta<\infty$,*

$1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $p^{-1}+q^{-1} > 1$, $p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}$, $f \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$, $g \in \mathbf{L}^{\infty,q}_G(G,\lambda,\mathbf{F}) \cap \mathbf{L}^{q,\infty}_G(G,\lambda,\mathbf{F})$. *Тогда* $f\tilde{*}_\lambda g \in \mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})$ *и*

$$\|f\tilde{*}_\lambda g\|_{\mathbf{L}^r(G,\lambda,\mathbf{F})} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}\|g\|^{1-q/r}_{\mathbf{L}^{\infty,q}_G(G,\lambda,\mathbf{F})}\|g\|^{q/r}_{\mathbf{L}^{q,\infty}_G(G,\lambda,\mathbf{F})}.$$

Доказательство. Поскольку $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, то существуют σ-компактные подмножества S_f и S_g в G такие, что $f|_{G-S_f} = 0$, $g|_{G-S_g} = 0$ (λ-п.в.). Поэтому

$$\int_G |f(y)\psi(y,x)g(y\setminus x)|\lambda(dy) =$$
$$\int_G (|f(y)|^{p/r}|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^{q/r})|f(y)|^{1-p/r}|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^{1-q/r}\lambda(dy).$$

В силу следствия 3.2 $\zeta_{(x)}(y) \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ для λ-п.в. $x \in G$, где $\zeta_{(x)}(y) = |f(y)|^p|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q$. Из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\int_G |f(y)\psi(y,x)g(y\setminus x)|\lambda(dy) \leq \left(\int_G |f(y)|^p|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q\lambda(dy)\right)^{1/r}$$
$$\left(\int_G |f(y)|^p\lambda(dy)\right)^{(q-1)/q}\left(\int_G |\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q\lambda(dy)\right)^{(p-1)/p},$$

так как $1-p/r = p(q-1)/q$ и $1-q/r = q(p-1)/p$. Поскольку $f = f_1+\mathbf{i}f_2$, $f_j = f_j^+ - f_j^-$, где $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $f_j : G \to \mathbf{R}$, $f_j^+ : G \to [0,\infty)$, $f_j^- : G \to [0,\infty)$ [5], то достаточно рассмотреть случай неотрицательных функций f и g. Тогда существуют неубывающие последовательности неотрицательных простых функций f_n и g_n такие, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ для всякого $x \in G$. В силу теоремы 3.7 $f_n\tilde{*}_\lambda g_n \in C_0(G,[0,\infty))$, так как $f_n \in \mathbf{L}^t(G,\lambda,\mathbf{F})$, $g_n \in \mathbf{L}^{\infty,s}_G(G,\lambda,\mathbf{F})$, где $1 < t < \infty$, $t^{-1}+s^{-1} = 1$. По теореме о монотонной сходимости для любого $x \in G$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n\tilde{*}_\lambda g_n(x) = f\tilde{*}_\lambda g$, следовательно, свертка $f\tilde{*}_\lambda g$ является $(\mathcal{F}_\lambda(G),\mathcal{B}(\mathbf{F}))$-измеримой, то есть $(f\tilde{*}_\lambda g)^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{F})) \subseteq \mathcal{F}_\lambda(G)$. Функции $\eta_1(x,y) = |\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q$ и $\eta(x,y) = |f(y)|^p\eta_1(x,y)$ $|\nu|\times\lambda$-измеримы для любой σ-конечной вариации $|\nu|$ меры ν с $\mathcal{F}_\nu(G) \supseteq \mathcal{B}(G)$ согласно лемме 3.1. В силу неравенства Гёльдера

$$\left(\int_G |f(y)\psi(y,x)g(y\setminus x)|\lambda(dy)\right)^r \leq \|f\|^{rp(q-1)/q}_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}$$
$$\|g\|^{rq(p-1)/p}_{\mathbf{L}^{\infty,q}_G(G,\lambda,\mathbf{F})}\left(\int_G |f(y)|^p|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q\lambda(dy)\right).$$

Из теоремы Фубини вытекает, что

$$\int_G\left(\int_G |f(y)|^p|\psi(y,x)g(y\setminus x)|^q\lambda(dy)\right)\lambda(dx) \leq \|f\|^p_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}\|g\|^q_{\mathbf{L}^{q,\infty}_G(G,\lambda,\mathbf{F})},$$

следовательно,

$$\left(\int_G |f\tilde{*}_\lambda g(x)|^r\lambda(dx)\right)^{1/r} \leq \left(\int_G\left(\int_G |f(y)\psi(y,x)g(y\setminus x)|\lambda(dy)\right)^r\lambda(dx)\right)^{1/r}$$
$$\leq \|f\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})}\|g\|^{1-q/r}_{\mathbf{L}^{\infty,q}_G(G,\lambda,\mathbf{F})}\|g\|^{q/r}_{\mathbf{L}^{q,\infty}_G(G,\lambda,\mathbf{F})}.$$

Определение 3.2. Пусть J - топологический T_1 группоид, $b \in J$, $\{x_\gamma : \gamma \in \Lambda\} \subset J$, Λ - направленное множество. Пусть G - группоид, действующий биективно слева (или справа) на J, то есть задано отображение $G \ni b \mapsto \hat{L}_b$, $\hat{L}_b : J \to J$ биективно (или $G \ni b \mapsto \hat{R}_b$, $\hat{R}_b : J \to J$ соответственно) для любого $b \in G$. Если $b \in G$, $\forall y \in G$, $\forall z \in G$ таких, что $\hat{L}_b^{-1}y = z$ (или $\hat{R}_b^{-1}y = z$), $\exists \lim_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma y = z$ (или $\exists \lim_{\gamma\in\Lambda} yx_\gamma = z$) , то направленность $\{x_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ называется аппроксимативным обратным левым (или правым соответственно) сдвигом на b в J. В частности, если $b = e_l$ - левая (или $b = e_r$ - правая) единица в G, то $\{x_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ называется аппроксимативной левой (или правой соответственно) единицей в J.

Теорема 3.9. *Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, фактор квазиинвариантности $\psi(x,y) = \lambda^{L_x^{-1}}(dy)/\lambda(dy)$ непрерывен на $G \times G$, $0 < \alpha = \inf_{x\in G, y\in G} \psi(x,y) \le \sup_{x\in G,y\in G} \psi(x,y) = \beta < \infty$, $b \in G$, $J = (\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), *)$. Тогда J содержит аппроксимативный обратный левый сдвиг на b.*

Доказательство. Если $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, то $(\hat{L}_b^{-1}\mu)(\Omega) = \mu(b \setminus \Omega)$ для любого $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G)$. Поскольку $L_b : G \to G$ - гомеоморфизм G как топологического пространства, то $\hat{L}_b : J \to J$ - биекция, так как $L_b L_b^{-1} = id$, $L_b^{-1}L_b = id$, где $id(z) = z$ для любого $z \in G$. Для базы $\mathsf{B}_b(G)$ открытых окрестностей точки b имеется естественная направленность по включению: $U \ge V$, если $U \subseteq V$. Рассмотрим подсемейство $\mathcal{W}$ в $\mathsf{B}_b(G)$ таких $U \in \mathsf{B}_b(G)$, что замыкание $cl_G U$ компактно. Для любой $U \in \mathcal{W}$ существует мера $\mu_U \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,[0,1])$ такая, что $\mu_U(U) = 1$, $\mu_U(G - U) = 0$. Из теорем 2.6, 3.2 и 3.7 вытекает, что $\{\mu_U : U \in \mathcal{W}\}$ - аппроксимативный обратный левый сдвиг на b в J.

Теорема 3.10. *Предположим, что G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера. Замкнутое линейное подпространство X в $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ является левым идеалом в алгебре $(\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), +, *)$ тогда и только тогда, когда $\forall \mu \in X$, $\forall b \in G$, $\delta_b * \mu \in J$.*

Доказательство. Пусть X - замкнутый левый идеал в алгебре $(\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), +, *)$, $b \in G$. В силу теоремы 3.9 в банаховом группоиде $J = (\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), *)$ существует аппроксимативный обратный левый сдвиг $\{\mu_U : U \in \mathcal{W}\}$ на b. Тогда $\lim_{U\in\mathcal{W}} \mu_U * \mu \in X$ для любой $\mu \in X$, так как X - замкнутый левый идеал. Итак, $\hat{L}_b^{-1}\mu \in X$.

Пусть обратно $\forall \mu \in X$, $\forall b \in G$, $\hat{L}_b^{-1}\mu \in X$. Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что $\forall \nu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, $\forall \mu \in X$, если для любого непрерывного линейного функционала $M : \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ на банаховом пространстве $\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ такого, что $M(X) = 0$, выполняется равенство $M(\nu * \mu) = 0$, то $\nu * \mu \in X$.

С другой стороны, для $M \in (\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), \|\cdot\|)'$ существует функция $g = g_M \in \mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})$ такая, что $M(\mu) = \int_G g(x)\mu(dx)$ для любой $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ согласно теореме 2.6, так как $(\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F}))' = \mathbf{L}^\infty(G,\lambda,\mathbf{F})$ - топологически сопряженное пространство для $\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$. Поэтому

$$M(\nu * \mu) = \int_G g(x) d(\nu * \mu)(x) =$$

$$\int_G \int_G g(xy)\mu(dy)\nu(dx) = \int_G \left[\int_G \int_G g(zy) d\delta_x(z)\mu(dy) \right] \nu(dx)$$

$= \int_G M(\delta_x * \mu)\nu(dx) = \int_G M(\hat{L}_x^{-1}\mu)\nu(dx) = 0$
для любых $M \in (\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}), \|\cdot\|)'$ с $M(X)=0$, так как $\hat{L}_x^{-1}\mu \in X$ для любого $x \in G$. Итак, X - замкнутый левый идеал в $(\mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F}),+,*)$.

Теорема 3.11. *Пусть G - левая локально компактная недискретная T_1 лупа, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-инвариантная мера. Тогда не существует непрерывной меры $\mu \in \mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$ такой, что $\mu * \nu = \nu$ для любой $\nu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$.*

Доказательство. Предположим противное, что существует $\mu \in \mathbf{M}_c(G,\mathbf{F})$ такая, что $\mu*\nu=\nu$ для любой $\nu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$. Поскольку $\mu(\{e\})=0$, то существует $U \in \mathsf{B}_e(G)$ с $0<|\mu|(U)<1$. При этом существует $V \in \mathsf{B}_e(G)$ с $(V\setminus V) \subset U$. Тогда $\chi_V \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ и

$1 = \chi_V(x) = \mu * \chi_V(x) = \int_G \chi_V(y\setminus x)\mu(dy)$ в силу теоремы 2.6, но

$\left|\int_G \chi_V(y\setminus x)\mu(dy)\right| \le \int_U \chi_V(y\setminus x)|\mu|(dy) < 1.$

Получается противоречие для $\nu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$ такой, что $\nu(dx) = \chi_V(x)\lambda(dx)$.

Предложение 3.2. *Предположим, что G - локально компактная T_1 лупа, семейства $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{R}_G$ окружений диагонали неэквивалентны, где $\mathcal{L}_G := \{\mathcal{L}_{U,G} : U \in \mathsf{B}_e(G)\}$, $\mathcal{R}_G := \{\mathcal{R}_{U,G} : U \in \mathsf{B}_e(G)\}$, $\mathcal{L}_{U,G} := \{(x,y) \in G\times G : x\setminus y \in U\}$, $\mathcal{R}_{U,G} := \{(x,y) \in G\times G : y/x \in U\}$, $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-инвариантная мера, $1 \le p < \infty$. Тогда существуют функции $f \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$ такие, что отображение $G \ni x \mapsto {}_xf \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$ не является равномерно непрерывным слева.*

Доказательство. Поскольку семейства $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{R}_G$ неэквивалентны, то $\exists U \in \mathsf{B}_e(G)$, $\forall V \in \mathsf{B}_e(G)$ с $V \subseteq U$, $\exists x \in G$, $U\setminus x$ не содержится в x/V, так как $\exists U_1 \in \mathsf{B}_e(G)$, $\forall V_1 \in \mathsf{B}_e(G)$ с $V_1 \subseteq U_1$, $\exists x \in G$, U_1x не содержится в xV_1, $U\setminus x \subseteq U_1x$, $x/V \supseteq xV_1$ в силу теорем 2.5 и 2.6 в [23]. Пусть x такое, что $U\setminus x$ не содержится в x/U, тогда очевидно $\forall V \subset U$, $U\setminus x$ не содержится в x/V. При этом $B := (x/(x/U)) - U \ne \emptyset$, так как $b_1\setminus x = (x/(x/v_1))\setminus x = x/v_1$ для $v_1 \in U$ при $b_1 = x/(x/v_1)$. В силу теорем 2.5 и 2.6 в [23] существует $W \in \mathsf{B}_e(G)$ такая, что $W \subseteq U$, $0<\lambda(W)<\infty$, $((B\setminus x)\setminus W) \cap (x\setminus W) = \emptyset$, так как $b\setminus x \ne x$ для любого $b \in B$, и так как λ нетривиальна. Тогда

$\|{}_{b\setminus x}\chi_W - {}_x\chi_W\|_{\mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})} = [2\lambda(W)]^{1/p}$

для любого $b \in B$, так как λ лево-инвариантна. При этом $x \in x/V$, а $b \in B$ можно брать таким, что $b\setminus x \in x/V$, где $V \in \mathsf{B}_e(G)$, $V \subseteq U$. Поскольку x/V - открытая окрестность точки x, $\mathsf{B}_x(G) = L_x\mathsf{B}_e(G)$, $(x/v)v = x$ для любых $v \in G$, $\exists V_2 \in \mathsf{B}_e(G)$, $xV_2 \subseteq x/V$, то отображение $G \ni x \mapsto {}_x\chi_W \in \mathbf{L}^p(G,\lambda,\mathbf{F})$ не является равномерно непрерывным слева.

Предложение 3.3. *Пусть G - локально компактная левая T_1 квазигруппа, $\phi : G\times G \to G$ и $\eta : G\times G \to G$ - непрерывные отображения такие, что $\phi(x,\eta(x,v))\eta(x,v) = v$ и $\eta(x,\phi(x,z)z) = z$ (либо $\phi(x,\eta(x,v))\setminus\eta(x,v) = v$ и $\eta(x,\phi(x,z)\setminus z) = z$), $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ - нетривиальная лево-квазиинвариантная мера, $\Omega \in \mathcal{B}(G)$, $\lambda^{L^s_{\phi(x,y)}}(dy) =$*

$\lambda(dy)$ *с* $s = 1$ *(либо* $s = -1$ *соответственно),* $\zeta(x,z) = \phi(x,z)z$ *(либо* $\zeta(x,z) = \phi(x,z) \setminus z$*),* $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$. *Тогда функция* $G \ni x \mapsto \mu(\zeta(x,\Omega)) \in \mathbf{F}$ *непрерывна.*

Доказательство. Поскольку $\mu \in \mathbf{M}_a(G,\lambda,\mathbf{F})$, то по теореме Радона-Никодима существует функция $f \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ такая, что $\mu(dx) = f(x)\lambda(dx)$. Тогда

$\mu(\zeta(x,\Omega)) = \int_G \chi_{\zeta(x,\Omega)}(y)f(y)\lambda(dy) =$

$\int_\Omega(\hat{L}^s_{\phi(x,y)}f(y))\lambda^{L^s_{\phi(x,y)}}(dy) = \int_\Omega(\hat{L}^s_{\phi(x,y)}f(y))\lambda(dy)$, следовательно,

$|\mu(\zeta(x,\Omega)) - \mu(\zeta(y,\Omega))| \le \|\hat{L}^s_{\phi(x,z)}f(z) - \hat{L}^s_{\phi(y,z)}f(z)\|_{\mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})}$.

Из теоремы 3.2 и последнего неравенства вытекает утверждение данного предложения.

Замечание 3.2. В частности, при $\phi(x,z) = x$ мера λ лево-инвариантна в предложении 3.3 (см. также пример 2.2).

Предложение 3.4. *Предположим, что* G *- компактная левая* T_1 *квазигруппа,* $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,1]$ *- лево-инвариантная мера,* $\lambda(G) = 1$. *Тогда* $\mathbf{F}\lambda$ *- одномерный левый идеал в алгебре* $(\mathbf{M}(G,\mathbf{F}),+,*)$.

Доказательство. Для любых $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G)$ и $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$ выполняется равенство $\mu * \lambda(\Omega) = \lambda(\Omega)\mu(G)$, так как $\mu * \lambda(\Omega) = \int_G \lambda(x \setminus \Omega)\mu(dx)$.

Теорема 3.12. *Пусть* G *- локально компактная* T_1 *квазигруппа,* $\lambda : \mathcal{F}_\lambda(G) \to [0,\infty]$ *(и* $\lambda_1 : \mathcal{F}_{\lambda_1}(G) \to [0,\infty]$*) - нетривиальная лево- (или право- соответственно) инвариантная мера,* $\mu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$*; мера* μ *порождает одномерный левый (или правый) идеал в алгебре* $(\mathbf{M}(G,\mathbf{F}),+,*)$. *Тогда* G *компактна, а* μ *порождает одномерный (двусторонний) идеал,* $\mu(dx) = \frac{\gamma}{\alpha(x)}\lambda(dx)$ *с постоянной* $\gamma \ne 0$ *из* $\mathbf{F}$, $\alpha : G \to \mathbf{F}$ *- непрерывная ограниченная функция,* $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ *для любых* x *и* y *из* G, $\lambda(dx) = \beta\lambda_1(dx)$ *с положительной постоянной* β.

Доказательство. Если $\mathbf{F}\mu$ - одномерный левый идеал в $\mathbf{M}(G,\mathbf{F})$, то $\nu * \mu = \alpha_\nu\mu$ с $\alpha_\nu \in \mathbf{F}$ для любой $\nu \in \mathbf{M}(G,\mathbf{F})$. В частности, $\delta_a * \mu = \alpha(a)\mu$ с $\alpha(a) \in \mathbf{F}$ для любого $a \in G$. При этом

$\|\delta_a * \mu\| = |\alpha(a)|\|\mu\| \le \|\delta_a\|\|\mu\| = \|\mu\|$ по теореме 2.2, следовательно, $\alpha(a)$ - ограниченная функция. Для любых $a \in G$ и $f \in C_0(G,\mathbf{F})$ выполняется равенство

$\int_G {}_af(x)\mu(dx) = \alpha(a)\int_G f(z)\mu(dz)$,

так как $\delta_a * \mu(\Omega) = \mu^{L_a^{-1}}(\Omega) = \alpha(a)\mu(\Omega)$ для любого $\Omega \in \mathcal{F}_\mu(G)$. Из теоремы 3.2 вытекает, что $\alpha(a)$ - непрерывная функция, так как

$\int_G({}_af(x) - {}_bf(x))\mu(dx) = (\alpha(a) - \alpha(b))\int_G f(x)\mu(dx)$

для любых a и b из G. Поскольку $\mathbf{F}\mu$ - одномерный левый идеал, то $\exists\Omega \in \mathcal{F}_\lambda(G), \mu(\Omega) \ne 0$, следовательно, α - ненулевая функция.

Из доказательства выше вытекает, что $\mu^{L_a^{-1}}(dx)/\mu(dx) = \alpha(a)$, следовательно, μ - лево-квазиинвариантная мера. Согласно теореме Рисса 7.2.8 в [5] и замечанию 2.4 меры $|\mu|$, λ и λ_1 регулярны. В силу теоремы 3.1 в [24] $\mu \ll \lambda$, и существует функция $h \in \mathbf{L}^1(G,\lambda,\mathbf{F})$ такая, что $\mu(dx) = h(x)\lambda(dx)$. Поэтому $h(a \setminus x) = \alpha(a)h(x)$, так как λ лево-инвариантна.

Поскольку $a(a \setminus x) = x$ в квазигруппе G, то $\mu(dx) = \frac{\gamma}{\alpha(x)}\lambda(dx)$, где $\gamma \neq 0$ - постоянная из $\mathbf{F}$. Поэтому $\alpha(az) = \alpha(a)\alpha(z)$ для любых a и z из G. Таким образом, мера $\alpha(x)\mu(dx)$ - лево-инвариантна. Функция $\alpha(x)$ ограничена, следовательно, $\lambda(G) < \infty$. Тогда $M(f) := \int_G f(x)\lambda(dx)$ - лево-инвариантное среднее на $C_b(G, \mathbf{F})$, причем, $M(C_0(G, \mathbf{F})) \neq 0$. Из примера 3.2 вытекает, что G компактна.

В силу предложения 3.4 $\mathbf{F}\lambda$ - левый идеал, и симметрично $\mathbf{F}\lambda_1$ - правый идеал в $(\mathbf{M}(G, \mathbf{F}), +, *)$. Поэтому $\lambda_1 * \lambda = p\lambda_1 = q\lambda$, где p и q - положительные постоянные, следовательно, существует положительная постоянная β такая, что $\lambda(dx) = \beta\lambda_1(dx)$.

3.1. Заключение. Полученные в данной статьи результаты можно использовать для дальнейшего изучения гармонического анализа на квазигруппах, структуры топологических квазигрупп, связанных с ними неассоциативных алгебр, некоммутативной геометрии [13, 14]. Кроме приложений лево- (или право-)квазиинвариантных мер на квазигруппах, следует отметить возможные приложения к анализу информационных потоков, моделировании временных рядов, их представлений и обработки [17, 18, 28, 29], так как они часто основаны на тополого-алгебраических бинарных системах, мерах и пространствах функций. Другие актуальные приложения состоят в теории представлений квазигрупп и луп [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10], математической физике, и т.д.

Финансирование (Funding): Данное исследование не имеет финансовой поддержки или каких-либо грантов (This research received no external funding).

Соблюдение этических стандартов (Compliance with ethical standards): Данная статья посвящена математике и не имеет никакого отношения к биологии (not applicable, this article is in mathematics).

Открытый доступ (Open access) не предусмотрен, не планируется для данной статьи (no any, it is not planned).

Конфликт интересов (Conflicts of Interest): Автор декларирует отсутствие конфликта интересов (The authors declare no conflicts of interest).

Информация о вкладе авторов (Author Contributions): Людковский С.В. поставил проблемы, развил методологию, провел исследования, написал и напечатал статью. Автор данной статьи один Людковский С.В. Автор согласен с публикуемой версией статьи. (Conceptualization, methodology, investigation, writing S.V. Ludkowski (Ludkovsky). All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.)

Дополнительные материалы (Supplementary information) не имеются (no any).

Дополнительная информация (Additional information): Людковский С.В. родился в Москве в 1960 г., докт. физ.-мат. наук, проф. (Ludkowski S.V. was born in Moscow in 1960, Dr. Sci. in Mathem. and Phys. Sci., Prof.) ORCID 0000-0002-4733-8151.

References

[1] A.A. Adhikari, M.R. Adhikari, *Basic topology*, Volumes 1-3, Springer, Singapore, 2022.

[2] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, World Sci., Atlantis Press, Amsterdam, 2008.

[3] C. Arhancet, C. Kriegler, *Projections, multipliers snd decomposable maps on noncommutative L_p-spaces*, Mémoires de la Société Mathématique de France, **177** (2023), 1–185.

[4] R.H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer, Berlin, 1971.

[5] D.L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, New York, 2013.

[6] J.M.G. Fell, R.S. Doran, *Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles*, Volumes 1, 2, Acad. Press, Boston, 1988.

[7] A.G. Farashahi, *Classical harmonic analysis over spaces of complex measures on coset spaces of compact subgroups*, Analysis Math., **43: 3** (2017), 461–473.

[8] V. Losert, *The derivation problem for group algebras*, Annals of Mathematics, **168** (2008), 221–246.

[9] S.V. Ludkovsky *, Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields; representations and quasi-invariant measures. I; II*, J. Mathem. Sci., N.Y. (Springer), **147: 3** (2008), 6703–6846; **150: 4** (2008), 2123–2223.

[10] M.A. Naimark, *Normed rings*, Nauka, Moscow, 1968.

[11] W. Herforth, P. Plaumann, *Boolean and profinite loops*, Topology Proceedings, **37** (2011), 233–237.

[12] V. Kakkar, *Boolean loops with compact left inner mapping groups are profinite*, Topology and Its Appl., **244** (2018), 51–54.

[13] J.D.H. Smith, *An introduction to quasigroups and their representations*, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2007.

[14] L.V. Sabinin, *Smooth quasigroups and loops*, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[15] F. Gürsey, C.-H. Tze, *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.

[16] S. Gonzalez, E. Kouselo, V. Markov, A. Nechaev, *Group codes and their nonassociative generalizations*, Diskret. Math. and Appl., **14: 2** (2004), 163–172.

[17] V.N. Markov, A.V. Mikhalev, A.A. Nechaev, *Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding*, J. Mathem. Sci., N.Y. (Springer), **245: 2** (2020), 178–196.

[18] B. Plotkin, *Universal algebra, algebraic logic, and databases*, Kluwer, New York, 1994.

[19] S.V. Ludkovsky, *Existence of an invariant measure on a topological quasigroup*, Topology and Its Appl., **275** (2020), 1–11.

[20] S.V. Ludkowski, *Left invariant measures on locally compact nonassociative core quasigroups*, Southeast Asian Bull. of Mathem., **46: 3** (2022), 365–404.

[21] S.V. Ludkowski, *Topological spaces related with topological quasigroups*, arXiv: math.GR.2312.16716 (2023), 1–20.

[22] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathem. Volume 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[23] S.V. Ludkowski, *Quotient and transversal mappings for topological quasigroups*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **33: 3** (2023), 497–522.

[24] S.V. Ludkovsky, *Quasi-invariant and invariant functionals and measures on systems of topological loops and quasigroups*, Siberian Mathem. J., **64: 5** (2023), 1166–1179.

[25] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[26] V.I. Bogachev, *Measure theory*, Volumes 1, 2, Springer, Berlin, 2007.

[27] N. Bourbaki, *Integration. Measures, integration of measures*, Nauka, Moscow, 1967.

[28] I.V. Gramovich, D.Yu. Musatov, D.A. Petrusevich, *Implementation of bagging in time series forecasting*, Russ. Technol. J. **12: 1** (2024), 101–110.

[29] K.P. Shum, X. Ren, Y. Wang, *Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups*, Southeast Asian Bull. of Mathem. **38** (2014), 719–730.

Sergey Victorovich Ludkowski
Department of Applied Mathematics, MIREA - Russian Technological University,
av. Vernadsky, 78,
119454, Moscow, Russia
Email address: sludkowski@mail.ru