Ответ на рецензию на статью В.И. Пантелеева, Л.В. Рябец «О параметрическом замыкании множества мультиопераций ранга 2»

Мы благодарим рецензента за тщательный анализ нашей статьи и за высказанные замечания. Ответы на замечания:

1. *Страница 146, обозначение для множества подмножеств $B(\cdot)$ используется лишь один раз в определении мультиоперации, предлагаю избежать излишнее обозначение.*

   Обозначение заменено фразой: «Для целого положительного n отображение $f : E_2^n \to 2^{E_2}$ назовем n-местной мультиоперацией ранга 2 или просто мультиоперацией»

2. *Страница 146, строка -10. 'будем также будем'→ 'будем также'.*

   Опечатка исправлена.

3. *Страница 146, определение суперпозиции, формула (1). Не ясно что i в множестве по которому рассматривается объединение пробегает все целые значения от 1 до n, прошу добавить это.*

   Добавлено уточнение в формулу (1). Теперь формула выглядит так:

   $$s(f_0, f_1, \ldots, f_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\ i \in \{1,\ldots,n\}}} f_0(\beta_1, \ldots, \beta_n), \qquad (1)$$

4. *Страница 147, строка 1. 'Если в последовательности $\beta_0 \ldots \beta_n$ некоторое β_i пусто то значение суперпозиции на наборе равно пустому'. Как я понимаю, это часть определения суперпозиции. В этом случае определение лучше писать в одно предложение, а не в два раздельных, попадающих на разные страницы.*

   Указанное предложение было уточнением определения суперпозиции. Оно было переписано следующим образом: «В соответствии с этим определением, если значение какой-либо мультиоперации f_i на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ есть $*$, то и вся суперпозиция принимает значение $*$.»

5. *Страница 146, строка -19. Предлагаю заменить 'определим понятия терм языка Par' на 'определим понятия терм t языка Par' чтобы терм был в связке с понятием 'переменные терма t'.*

   Рекомендованная правка внесена: «Определим понятия «терм t языка Par» и «множество переменных терма t»

6. *В целом, лично мне показалось что в параграфе 2 мало примеров, приводится 2.5 страницы подряд идущих определений без одного утверждения или примера. Авторы могут подумать о его расширении в этом направлении. Можно также рассмотреть вариант разделения на два параграфа-один и определениями, другой с утверждениями и леммами.*

   Нами было принято решение не разбивать параграф на 2 части. В статью был добавлен пример:

Пусть $f_1(x_1, x_2) = (-01-)$, $f_2(x_1, x_2) = (1-10)$ и $g(x_1, x_2) = (001-)$ — двухместные мультиоперации. Рассмотрим множество мультиопераций $Q = \{f_1, f_2\}$. С помощью мультиопераций из Q построим следующие формулы языка Par.

$$\Phi_1(x_1, x_2, y) = y \subseteq f_1(x_1, x_2),$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, y) = f_2(x_1, y) \subseteq f_1(x_2, y).$$

Формула $\Phi(x_1, x_2, y) = \Phi_1(x_1, x_2, y) \ \& \ \Phi_2(x_1, x_2, y)$ параметрически выражает операцию g через операции множества Q. Соответствующие таблицы истинности представлены ниже.

x_1	x_2	y	Φ_1	Φ_2	$\Phi(x_1, x_2, y)$	$y \subseteq g(x_1, x_2)$
0	0	0	И	И	И	И
0	0	1	И	Л	Л	Л
0	1	0	И	И	И	И
0	1	1	Л	И	Л	Л
1	0	0	Л	И	Л	Л
1	0	1	И	И	И	И
1	1	0	И	И	И	И
1	1	1	И	И	И	И

7. *Страница 148. Прошу привести определение параметрически полного множества операций. Несмотря на то что определение понятно, его авторы не приводят, однако формулируют основной результат статьи о полном множестве функций.*

   Было добавлено следующее определение (стр. 148, перед примером): «Множество Q является параметрически полным, если его параметрическое замыкание совпадает с $\mathcal{M}$.»

8. *Страница 148, Утверждение 2, доказательство. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in M_2$, то это бинарная операция, можно упростить до $f(x_1, x_2) \in M_2$.*

   Была исправлена опечатка. Мультиоперация f в данном случае зависит от n аргументов. Теперь первое предложение доказательства выглядит так: «Пусть мультиоперация $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$.»

9. *Страница 149, строка 11, доказательство Леммы 3. 'доказательство теоремы'$\rightarrow$ 'доказательство леммы'*

   Опечатка исправлена.

10. *Страница 149 и далее. Авторы используют понятие "формула определяет отношение". По-видимому, это эквивалентно совпадению таблиц истинности (определение параметрической выразимости). Прошу привести пояснение термину в тексте.*

    В определение параметрической выразимости добавлено уточнение. Теперь определение выглядит так: «Пусть $Q \subseteq \mathcal{M}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$, $\Phi(x_1, \ldots x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1, \ldots x_n, y$, все операциональные символы которой являются обозначениями мультиопераций над Q. Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает операцию f через операции множества Q (определяет отношение $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$), если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$ совпадают.»

11. *Страница 149, доказательство Леммы 3. Для любого $f \in A$ формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-*)$ или $y \subseteq (-1)$. Пожалуйста, поясните подробнее этот факт. Я проверил таблицы истинности для одного отношения, но хотелось бы ясного краткого перехода.*

В доказательство добавлено следующее пояснение: «Рассмотрим формулу $f(x) \subseteq f(y)$. Для первых трех мультиопераций из множества A она становится истинной в следующих случаях: если $x = 0$, то y может быть равным только 0, а если $x = 1$, то y может быть равным и 0 и 1. Это означает, что формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (0-)$.

Для оставшихся мультиопераций из A рассматриваемая формула принимает истинное значение в следующих случаях: если $x = 0$, то y может быть равным и 0 и 1, а если $x = 1$, то y может быть равным только 1, т. е. формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-1)$.

Аналогичным образом убеждаемся, что формула $x \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-*)$ для $f = (00)$ и $y \subseteq (*-)$ для $f = (11)$.»

12. *Страница 152, Следствие 1. Привести доказательство или пояснение.*

    Для следствия было добавлено следующее пояснение: «Действительно, согласно леммам 1 и 5 мультиоперации (01), $(--)$, $(**)$ и (10) содержатся в каждом параметрически замкнутом классе мультиопераций. Лемма 6 показывает, что с использованием этих мультиопераций мы можем получить мультиоперацию d_3. Далее воспользуемся леммой 8.»

13. *Страница 152, Следствие 2. Пожалуйста, добавьте о каких классах идет речь (какой класс помимо S^{-*}?)*

    Формулировка следствия была переписана: «Множество $\mathcal{M}$ содержит два параметрически замкнутых класса — S^{-*} и $\mathcal{M}$.»

Мы готовы ответить на любые дополнительные вопросы и комментарии рецензента.