S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.716
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03B50,
08A99

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАМЫКАНИИ МНОЖЕСТВА МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ РАНГА 2

В.И. Пантелеев and **Л.В. Рябец**

Abstract: In this paper the problem of classifying a set of multioperations of rank 2 with respect to the parametric closure operator is considered. A completeness criterion was found and it was shown that the set of all multioperations contains two parametrically closed classes.

Keywords: multifunction, multioperation, parametric closure, superposition, completeness criterion, k-valued logic.

1 Введение

Классификация — одно из важнейших направлений исследований в теории дискретных функций. Основное направление классификации связано с оператором суперпозиции и основано на принадлежности функций замкнутым относительно суперпозиции множествам.

Panteleev V.I., Ryabets L.V. Parametric closed sets of multioperations on two-element set.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011, https://rscf.ru/project/24-21-00011/.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Наряду с классическими функциональными системами, в которых основным множеством является множество функций k-значной логики, достаточно давно изучаются и функциональные системы, в которых рассматриваются обобщения функций k-значной логики: частичные функции, гипер- и мультифункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений подмножества (с некоторыми ограничениями или без) множества A.

Однако, для функций k-значной логики при $k > 2$ классификация, основанная только на суперпозиции, приводит к континууму замкнутых множеств. Аналогичный результат справедлив для частичных функций задаваемых даже на 2-х элементном множестве [22]. Впрочем, как показал H. Machida [19], и суперпозиция гиперфункций на 2-х элементном множестве также приводит к континууму замкнутых классов. Исследования классификаций функций, заданных на конечном множестве и принимающих в качестве своих значений подмножества этого множества (все или некоторые), относительно оператора суперпозиции представлены в [8, 9, 15, 17, 19, 20, 21].

Попытки сократить континуальные классификации приводят к необходимости изучения более сильных операторов замыкания. Одним из таких является оператор параметрического замыкания, предложенный А.В. Кузнецовым [4]. Этот оператор порождает 25 параметрически замкнутых классов булевых функций, 2986 параметрически замкнутых классов функций 3-х значной логики [2, 3]. При $k \geqslant 4$ конечность числа параметрически замкнутых классов множества функций k-значной логики доказана в [1]. Подробное описание параметрически замкнутых классов булевых функций представлено в работе [10].

Одним из расширений оператора параметрического замыкания является оператор позитивного замыкания. Исследования, посвященные этому оператору над различными множествами функций, представлены в работах [11, 13, 12].

В [6, 5] идея оператора параметрического замыкания была расширена на множество гиперфункций, заданных на двухэлементном множестве. Оказалось, что язык формул, используемый при параметрическом описании, обладает сильными выразительными возможностями, которые привели к тому, что число замкнутых классов гиперфункций оказалось равно 13, несмотря на то, что множество булевых функций является подмножеством множества всех гиперфункций.

В соответствии с алгебраическим подходом, наряду с терминами (частичная, гипер-, мульти-) функция используют и термины (частичная, гипер-, мульти-) операция (см., например, [18]).

В настоящей работе показывается, что на множестве всех мультиопераций ранга 2 выразительные возможности языка параметрического описания являются очень сильными, что приводит к 2-м замкнутым классам. Этот результат остается неизменным и при переходе к позитивному замыканию [16].

2 Основные понятия и определения

Пусть $E_2 = \{0,1\}$ и $\alpha_i \in E_2$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда выражение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется двоичным набором или просто набором и обозначается $\tilde{\alpha}$, а число n называется длиной этого набора. Если длина набора $\tilde{\alpha}$ явно не указана, она определяется по контексту. Набор $\tilde{\beta}$ назовем противоположным набору $\tilde{\alpha}$, если длины этих наборов совпадают и $\beta_i = \overline{\alpha}_i$ (как обычно, $\overline{0} = 1$ и $\overline{1} = 0$) для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Для набора, противоположного набору $\tilde{\alpha}$, будем использовать обозначение $\overline{\tilde{\alpha}}$. Набор $(0,\ldots,0)$ называется нулевым и обозначается через $\tilde{0}$, а набор $(1,\ldots,1)$ — единичным и обозначается через $\tilde{1}$. Для произвольного конечного множества A через $|A|$ обозначим мощность.

Для целого положительного n отображение $f : E_2^n \to 2^{E_2}$ назовем n-местной мультиоперацией ранга 2 или просто мультиоперацией. Множество всех n-местных мультиопераций обозначим как $\mathcal{M}_n$, а множество всех мультиопераций как $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$.

В множестве $\mathcal{M}$ выделим множество всех булевых операций ($\mathcal{O}$) и множество гиперопераций ($\mathcal{H}$) следующим образом:

$$\mathcal{O}_n = \{f \mid f \in \mathcal{M}_n \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n\},\ \mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n,$$

$$\mathcal{H}_n = \{f \mid f \in \mathcal{M}_n \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| \geqslant 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n\},\ \mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n.$$

При дальнейшем изложении мы не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$» (прочерк), для пустого множества — «$*$». Под «$-$» и «$*$» будем понимать также мультиоперации, которые на любом своем наборе принимают значение E_2 и $\varnothing$, соответственно. Местность таких операций зависит от контекста.

Для одноместной мультиоперации $f \in \mathcal{M}$ будем использовать запись в виде вектора $(f(0)\,f(1))$. Например, вектором $(-\,0)$ обозначается такая мультиоперация f, что $f(0) = -$ и $f(1) = 0$. Для n-местной мультиоперации f будем также использовать запись в виде вектора $(\alpha_{\tilde{0}} \ldots \alpha_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\alpha_{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma})$.

Пусть f_0 — n-местная мультиоперация, $f_1, \ldots, f_n$ — m-местные мультиоперации. Суперпозиция с внешней операцией f_0 и внутренними операциями $f_1, \ldots, f_n$ определяет m-местную мультиоперацию

$$s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$$

следующим образом: для набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$ по определению[1]

$$s(f_0, f_1, \ldots, f_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\ i \in \{1,\ldots,n\}}} f_0(\beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{1}$$

[1] Определение суперпозиции мультиопераций позволяет находить значение мультиопераций не только на двоичных наборах. Подробно можно посмотреть в [7].

В соответствии с этим определением, если значение какой-либо мультиоперации f_i на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ есть $*$, то и вся суперпозиция принимает значение $*$.

В дальнейшем мультиоперации будем рассматривать с точностью до фиктивных аргументов. Переменные для обозначения аргументов используем обычным образом, как и понятие «мультиоперация-переменная». Также обычным образом используем понятие замыкание относительно суперпозиции множества операций Q, для которого будем использовать обозначение $[Q]$. Считаем известными обозначения для булевых операций от 2-х аргументов.

Пусть A — некоторое множество мультиопераций. Определим понятие «мультиоперация над A»:

- если $f \in A$, то f — мультиоперация над A;
- если f — мультиоперация над A, то операция, полученная из f перестановкой или отождествлением аргументов является мультиоперацией над A;
- если f_0 — n-местная, f_i — m-местные мультиоперации над A или мультиоперации-переменные ($i \in \{1, \ldots, n\}$), то мультиоперация $s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ есть мультиоперация над A.

Символами языка Par являются переменные $x_1, x_2, \ldots$, символы f_i (используемые для обозначения мультиопераций), символ включения $\subseteq$, логическая связка конъюнкция &, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки, запятая.

Определим понятия «терм t языка Par» и «множество переменных терма t» — $FV(t)$:

- любая переменная является термом, $FV(t) = \{x\}$;
- если $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — переменные (не обязательно различные), а f — символ n-местной мультиоперации, то $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ есть терм, $FV(t) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$;
- если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, f — символ n-местной мультиоперации, то $s(f, t_1, \ldots, t_n)$ есть терм, $FV(t) = \bigcup\limits_{i \in \{1, \ldots, n\}} FV(t_i)$.

Значение терма t на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ значений переменных из множества $FV(t)$ определяется следующим образом:

- если терм t есть переменная x, то значение терма совпадает со значением этой переменной;
- если терм t есть $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, то $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n})$;
- если терм t есть $s(f, t_1, \ldots, t_n)$, то

$$t(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in t_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Всякий терм t определяет некоторую мультиоперацию.

Определим понятие «формула языка Par» (параметрическая формула). Если t_1, t_2 — термы, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой. Остальные формулы определяем следующим образом: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $\Phi_1 \;\&\; \Phi_2, (\exists x_i)\Phi_1$— формула.

Пусть $Q \subseteq \mathcal{M}$, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$, $\Phi(x_1, \dots x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1, \dots x_n, y$, все операциональные символы которой являются обозначениями мультиопераций над Q. Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает мультиоперацию f через мультиоперации множества Q (определяет отношение $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$), если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ совпадают. Множество всех мультиопераций, параметрически выразимых через операции множества Q, назовем параметрическим замыканием множества Q и обозначим Par$[Q]$. Множество Q, которое совпадает со своим параметрическим замыканием, называется параметрически замкнутым классом. Множество Q является параметрически полным, если его параметрическое замыкание совпадает с $\mathcal{M}$.

Пример. Пусть $f_1(x_1, x_2) = (-01-)$, $f_2(x_1, x_2) = (1-10)$ и $g(x_1, x_2) = (001-)$ — двухместные мультиоперации. Рассмотрим множество мультиопераций $Q = \{f_1, f_2\}$. С помощью мультиопераций из Q построим следующие формулы языка Par.

$$\Phi_1(x_1, x_2, y) = y \subseteq f_1(x_1, x_2),$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, y) = f_2(x_1, y) \subseteq f_1(x_2, y).$$

Формула $\Phi(x_1, x_2, y) = \Phi_1(x_1, x_2, y) \;\&\; \Phi_2(x_1, x_2, y)$ параметрически выражает операцию g через операции множества Q. Соответствующие таблицы истинности представлены ниже.

x_1	x_2	y	Φ_1	Φ_2	$\Phi(x_1, x_2, y)$	$y \subseteq g(x_1, x_2)$
0	0	0	И	И	И	И
0	0	1	И	Л	Л	Л
0	1	0	И	И	И	И
0	1	1	Л	И	Л	Л
1	0	0	Л	И	Л	Л
1	0	1	И	И	И	И
1	1	0	И	И	И	И
1	1	1	И	И	И	И

Утверждение 1. *Любой параметрически замкнутый класс мультиопераций замкнут относительно операции суперпозиции.*

Доказательство. Пусть Q — параметрически замкнутый класс мультиопераций, $f_0, f_1, \dots f_n \in Q$ и

$$g(x_1, \dots, x_m) = s(f_0, f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_m).$$

Покажем, что $g \in Q$.

Обозначим через

$$\Phi_0(x_1,\dots,x_n,y),\quad \Phi_1(x_1,\dots,x_m,y),\quad \dots,\quad \Phi_n(x_1,\dots,x_m,y)$$

формулы языка Par, которые параметрически выражают отношения

$$y\subseteq f_0(x_1,\dots,x_n),\quad y\subseteq f_1(x_1,\dots,x_m),\quad \dots,\quad y\subseteq f_n(x_1,\dots,x_m)$$

через операции множества Q. Тогда формула

$$(\exists y_1)\dots(\exists y_n)(\Phi_1(x_1,\dots,x_m,y_1)\ \&\dots$$
$$\dots\&\ \Phi_n(x_1,\dots,x_m,y_n)\ \&\ \Phi_0(y_1,\dots,y_n,z))$$

параметрически выражает отношение $z\subseteq g(x_1,\dots,x_m)$ через операции множества Q. Таким образом, $g\in Q$. □

Утверждение 2. *Если* $[Q]=\mathcal{O}$, *то* $\mathrm{Par}[Q]=\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть мультиоперация $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{M}$. По f построим $f_1,f_2\in\mathcal{O}$ следующим образом: для набора $\tilde\alpha\in E_2^n$

- если $f(\tilde\alpha)=0$, то $f_1(\tilde\alpha)=f_2(\tilde\alpha)=0$;
- если $f(\tilde\alpha)=1$, то $f_1(\tilde\alpha)=f_2(\tilde\alpha)=1$;
- если $f(\tilde\alpha)=-$, то $f_1(\tilde\alpha)=0, f_2(\tilde\alpha)=1$;
- если $f(\tilde\alpha)=*$, то $f_1(\tilde\alpha)=1, f_2(\tilde\alpha)=0$.

Формула

$$\Phi(\tilde x,y)=(f_1\to f_2)\subseteq 1\&(\overline{y+f_1}\vee\overline{y+f_2}\subseteq 1)$$

параметрически выражает отношение $y\subseteq f(\tilde x)$. □

Лемма 1. *Мультиоперации* (01), $(--)$ *и* $(**)$ *содержатся в каждом параметрически замкнутом классе мультиопераций.*

Доказательство. Действительно, формула $y\subseteq x$ определяет отношение $y\subseteq(01)$, любая тождественно истинная параметрическая формула, например $x\subseteq x\ \&\ y\subseteq y$, определяет отношение $y\subseteq(--)$ [6], а формула $(--)(x)\subseteq y$ определяет отношение $y\subseteq(**)$. □

Лемма 2 ([6])**.** *Каждая гипероперация из множества* $\{(0-),(-1),(-0),(1-)\}$ *параметрически полна в множестве* $\mathcal{H}$.

Лемма 3. *Любая мультиоперация из множеств* $A=\{(0*),(1*),(-*),(*0),(*1),(*-)\}$ *или* $B=\{(00),(11)\}$ *параметрически полна в множестве* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Как известно, множество $\mathcal{H}\cup\{*\}$ является предполным в $\mathcal{M}$ [17]. Операции из множества A не принадлежат множеству $\mathcal{H}$, поэтому для доказательства леммы достаточно получить операции из леммы 2.

Рассмотрим формулу $f(x)\subseteq f(y)$. Для первых трех мультиопераций из множества A она становится истинной в следующих случаях: если $x=0$, то y может быть равным только 0, а если $x=1$, то y может быть равным и 0 и 1. Это означает, что формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (0-)$.

Для оставшихся мультиопераций из A рассматриваемая формула принимает истинное значение в следующих случаях: если $x = 0$, то y может быть равным и 0 и 1, а если $x = 1$, то y может быть равным только 1, т. е. формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-1)$.

Аналогичным образом убеждаемся, что формула $x \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-*)$ для $f = (00)$ и $y \subseteq (*-)$ для $f = (11)$. □

Лемма 4. *Мультиоперация* (0001) *параметрически полна в классе* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2) = (0001)$. Тогда формула $f(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ задает отношение $y \subseteq (--01)$ и, соответственно, операцию $f_2 = (--01)$.

Формула $f_2(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ задает отношение $y \subseteq (**01)$. Отождествление переменных у операции $(**01)$ позволяет получить операцию $(*1)$, которая параметрически полна по лемме 3. □

Лемма 5. *Справедливо* $(10) \in \mathrm{Par}\big[\{(01), (--), (**)\}\big]$.

Доказательство. Пусть $f = (0101)$. Тогда формула $f(x_1, x_2) \subseteq f(y, x_1)$ определяет операцию $(-**-) = g$. Формула $g(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ определяет операцию $(*--*) = h$, а $h(x_1, x_2) \subseteq g(x_1, y)$ определяет операцию $u = (-01-)$. Наконец, формула $u(x_1, x_2) \subseteq h(x_1, y)$ определяет операцию (10). □

Введем в рассмотрение мультиоперацию $d_3(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$.

Лемма 6. *Справедливо* $d_3 \in \mathrm{Par}\big[\{(01), (--), (**), (10)\}\big]$.

Доказательство. В лемме 5 рассматривались операции f, g, h, u. Из операции $u = (-01-)$ несложно получить операцию $u_1 = (-10-)$. Формула $u(x_1, x_2) \subseteq u(x_1, y)$ определяет операцию $v = (0--1)$, а формула $v(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ определяет операцию $w = (0**1)$.

Построим операции $f_1(x, y, z) = f(y, z)$ и $h_1(x, y, z) = h(x, y)$.

Рассмотрим суперпозицию с внешней операцией $f_1(x, y, z)$ и внутренними операциями h_1, x, z. Обозначим $f_2(x, y, z) = s(f_1, h_1, x, z)(x, y, z)$. Тогда $f_2(x, y, z) = (**0101**)$, а формула $f_2(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_1(x_1, x_2, y)$ определяет, соответственно, операцию $f_3 = (--0101--)$.

Построим операции $w_1(x, y, z) = w(y, z)$ и $u_{11}(x, y, z) = u_1(y, z)$.

Тогда $s(w_1, x_2, x_1, u_{11})(x_1, x_2, x_3)$ задает операцию $(0*0011*1)$. Применяя отрицание, можно получить операцию $f_4 = (*000111*)$. Далее строим суперпозицию $s(f_1, f_4, x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3) = (*101010*) = f_5$.

Формула $f_5(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_1(x_1, x_2, y)$ позволяет определить операцию $f_6 = (-101010-)$. И, наконец, формула $f_3(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_6(x_1, x_2, y)$ определяет отношение $y \subseteq d_3(x_1, x_2, x_3)$. □

3 Основной результат

Через S^{-*} обозначим множество мультиопераций, которые на любой паре противоположных наборов возвращают либо противоположные значения $(0,1)$ и $(1,0)$, либо два прочерка $(-,-)$, либо $(*,*)$.

Лемма 7. *Класс S^{-*} является параметрически замкнутым.*

Доказательство. Пусть параметрическая формула $\Phi(\tilde{x},y)$ получена с помощью мультиопераций $g_1,\dots,g_k$ из класса S^{-*}. Покажем, что такая формула будет представлять отношение $y\subseteq f(\tilde{x})$, где мультиоперация $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^{-*}.

Для этого покажем, что таблица истинности формулы Φ является симметричной, т.е. на противоположных наборах формула принимает одинаковые истинностные значения, а именно

$$\Phi(\tilde{x},y)=\Phi(\overline{\tilde{x}},\overline{y})$$

для любого набора $\tilde{x}\in E_2^n, y\in E_2$. Доказательство будем проводить индукцией по построению формулы Φ.

Базис индукции. Рассмотрим элементарную параметрическую формулу

$$\Phi(x_1,\dots,x_n,y)=g_1(z_1,\dots,z_p)\subseteq g_2(w_1,\dots,w_q), \tag{2}$$

где $\{z_1,\dots,z_p\}\subseteq\{x_1,\dots,x_n,y\}$, $\{w_1,\dots,w_q\}\subseteq\{x_1,\dots,x_n,y\}$ и $g_1,g_2\in S^{-*}$. Построим для этой формулы таблицу истинности и определим истинность формулы на произвольном наборе $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0\}$ и его отрицании. Для этого на указанном наборе рассмотрим возможные значения мультиопераций g_1,g_2. Для упрощения записи будем считать, что

$$\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)\subseteq g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q),$$

где $\{\beta_1,\dots,\beta_p\}\subseteq\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0\}$ и $\{\gamma_1,\dots,\gamma_q\}\subseteq\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0\}$.

1. Пусть $g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)=a$, где $a\in E_2$. Рассмотрим возможные значения мультиоперации g_2. Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)$ тоже принимает значение a, то в силу того, что $g_1,g_2\in S^{-*}$, получим $g_1(\overline{\beta}_1,\dots,\overline{\beta}_p)=\overline{a}$ и $g_2(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_q)=\overline{a}$. В этом случае $\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)=\Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)=\text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=\overline{a}$, то $g_1(\overline{\beta}_1,\dots,\overline{\beta}_p)=\overline{a}$ и $g_2(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_q)=a$. Тогда $\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)=\Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)=\text{Л}$.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=-$, то $g_2(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_q)=-$. Тогда формулы $a\subseteq -$ и $\overline{a}\subseteq -$ истинны и

$$\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)=\text{И},\ \ \Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)=\text{И}.$$

А если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=*$, то $g_2(\overline{\gamma}_1,\dots,\overline{\gamma}_q)=*$. Тогда формулы $a\subseteq *$ и $\overline{a}\subseteq *$ ложны и

$$\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)=\text{Л},\ \ \Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)=\text{Л}.$$

2. Пусть $g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)=-$. Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)\in E_2$ или возвращает $*$, то формула $\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)$ ложна и $\Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)$ также ложна.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=-$, то $\Phi(\tilde{\alpha},\alpha_0)$ истинна и $\Phi(\overline{\tilde{\alpha}},\overline{\alpha}_0)$ истинна.

3. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = *$. В этом случае формула $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ истинна и $\Phi(\overline{\tilde{\alpha}}, \overline{\alpha}_0)$ также истинна.

Следовательно, формула вида (2) на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения.

Шаг индукции. Рассмотрим параметрическую формулу вида $\Phi_1 \& \Phi_2$. В силу индуктивного предположения формулы Φ_1, Φ_2 на противоположных наборах принимают одинаковые истинностные значения. Следовательно, рассматриваемая формула на противоположных наборах также принимает одинаковые значения.

При рассмотрении формулы вида $\exists x_1 \Phi_1$ воспользуется очевидным фактом, что истинность формул

$$\exists x_1 \Phi_1(x_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n, \overline{y}), \quad \exists x_1 \Phi_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n, \overline{y})$$

совпадает.

Таким образом, если параметрическая формула $\Phi(\tilde{x}, y)$ получена с помощью мультиопераций $g_1, \dots, g_k \in S^{-*}$ и представляет отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$, то операция $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^{-*}. □

Лемма 8. *Любую мультиоперацию из класса S^{-*} можно параметрически выразить с помощью операции d_3, т.е.* $\mathrm{Par}\big[\{d_3\}\big] = S^{-*}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in S^{-*}$. С использованием операции d_3 построим параметрическую формулу $\Phi(\tilde{x}, y)$ для представления операции f.

Заметим, что $d_3(0, x_2, x_3) = (0001)$. Таким образом, согласно лемме 4 операция $d_3(0, x_2, x_3)$ позволяет получить любую мультиоперацию из класса $\mathcal{M}$. Построим с ее помощью формулу $\Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ представляющую отношение $y \subseteq f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Теперь положим, что $\Phi(0, x_2, \dots, x_n, y) = \Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ и заменим все вхождения 0 на переменную x_1. Формула $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ построена из операции d_3, принадлежащей множеству S^{-*}. Поэтому такая формула на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения, и, значит, определяет операцию из класса S^{-*}. С учетом того, что на наборах $(0, x_2, \dots, x_n, y)$ истинностное значение формулы Φ совпадает с истинностным значением отношения $y \subseteq f(0, x_2, \dots, x_n)$, получаем, что на наборах $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ истинностное значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ совпадает с истинностным значением отношения $y \subseteq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. □

Следствие 1. $S^{-*} = \mathrm{Par}[\varnothing]$.

Действительно, согласно леммам 1 и 5 мультиоперации (01), $(--)$, $(**)$ и (10) содержатся в каждом параметрически замкнутом классе мультиопераций. Лемма 6 показывает, что с использованием этих мультиопераций мы можем получить мультиоперацию d_3. Далее воспользуемся леммой 8.

Теорема 1. *Множество мультиопераций B параметрически полно тогда и только тогда, когда B не содержится в множестве S^{-*}.*

Доказательство. Так как B не содержится в множестве S^{-*}, то существует операция $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая на некоторой паре противоположных наборов дает следующие возможные пары значений: $(00), (0*), (0-)$, $(11), (1*), (1-), (*1), (*0), (*-), (-0), (-1), (-*)$.

Противоположным наборам соответствуют операции (01) и (10), которые есть в каждом параметрически замкнутом классе. Подставляя эти операции в качестве внутренних операций в суперпозицию с внешней мультиоперацией f вместо соответствующих переменных $x_1, \ldots, x_n$, будем получать либо полное множество, либо одну из операций

$$(0-), (-0), (-1), (1-).$$

С учетом имеющейся операции отрицания достаточно рассмотреть случай получения операции $f(x) = (0-)$. Формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет операцию $g(x) = (-1)$. А формула $f(x) \subseteq g(y)$ операцию $h(x) = (00)$. □

Следствие 2. *Множество $\mathcal{M}$ содержит два параметрически замкнутых класса — S^{-*} и $\mathcal{M}$.*

References

[1] S. Barris, R. Willard, *Finitely many primitive positive clones*, Proc. Amer. Math. Soc., **101**:3 (1987), 427–430.

[2] A.F. Danil'chenko, *Parametric expressibility of functions of three-valued logic*, Algebra and Logic, **16** (1977), 266–280.

[3] A.F. Danil'chenko, *Parametrically closed classes of functions of three-valued logic*, Izvestiya AN MSSR, **2** (1978), 13–20.

[4] A.V. Kuznecov, *Means for detection of nondeducibility and inexpressibility*, Logical Inference, Nauka, Moscow, 1979, 5–33.

[5] L.V. Riabets, *Operators of parametric and positive closure on the set of hyperfunctions of rank 2*, Intelligent systems. Theory and applications, **20**:3 (2016), 79–84.

[6] L.V. Riabets, *Parametric closed classes of hyperfunctions of rank 2*, Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **17** (2016), 46–61.

[7] V.I. Panteleev, E.S. Taglasov, *ES_I-closure of rank 2 multifunctions: completeness criterion, classification, and types of bases*, Intelligent systems. Theory and applications, **25**:2 (2021), 55–80.

[8] Lo Czu Kai, *Maximal closed classes on the set of partial many-valued logic*, Kiberneticheskiy Sbornik, **25** (1988), 131—141.

[9] Lo Czu Kai, *Completeness theory on partial many-valued logic functions*, Kiberneticheskiy Sbornik, **25** (1988), 142-157.

[10] S.S. Marchenkov, *Closed classes of Boolean functions*, Nauka, Fizmatlit., Moscow, 2000.

[11] S.S. Marchenkov, *On the expressibility of functions of many-valued logic in some logical-functional classes*, Discrete Math. Appl., **4** (1999), 110–126.

[12] S.S. Marchenkov, *Positive closed classes of three-valued logic*, J. Appl. Indust. Math., **8**:2 (2014), 256–266.

[13] S.S. Marchenkov, A.A. Popova, *Positively closed classes of partial Boolean functions*, Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern., **32** (2008), 147–151.

[14] V.I. Panteleev, L.V.Riabets, *The closure operator with the equality predicate branching on the set of hyperfunctions on two-element set*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **10** (2014), 93–105.

[15] V.V. Tarasov, *Completeness criterion for partial logic functions*, Problemy Kibernetiki, Nauka, Moscow, **30** (1975), 319–325.

[16] I.K. Sharankhaev, *On positive completeness and positively closed sets of multifunctions of rank 2*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 1313–1319.

[17] R. Doroslovački, J. Pantović, G. Vojvodić, *One interval in the lattice of partial hyperclones*, Czech Math J., **55** (2005), 719–724.

[18] M. Pouzet, I.G. Rosenberg, Small clones and the projection property. Algebra Univers. 63, 37–44 (2010).

[19] H. Machida, *Hyperclones on a two-element set*, Multiple-Valued Logic. An International Journal, **8**:4 (2002), 495–501.

[20] H. Machida, J. Pantović, *On maximal hyperclones on* $\{0,1\}$ *– a new approach*, Proc. of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ismvl 2008), (2008), 32–37.

[21] B.A. Romov, *Hyperclones on a finite set*, Proc. of 27th International Symposium on Multiple-Valued Logic, (1997), 83–88.

[22] R.V. Freiwald, *Completeness criterion of partial Boolean functons and multiple-valued logic*, DAN USSR, **167**:6 (1966), 1249–1250.

Vladimir Innokent'yevich Panteleev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
Email address: vl.panteleyev@gmail.com

Leonid Vladimirovich Ryabets
Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University,
K. Marx st, 1,
664000, Irkutsk, Russia
Email address: l.riabets@gmail.com