S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 514.752.43
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 53C20

ЗАВИСЯТ ЛИ СВОЙСТВА ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ ОТ ВЫБОРА ТОЧКИ НАЧАЛА ЕЕ ОБХОДА?

И. Х. Сабитов

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We prove that some properties of a closed plane curve depend on the choice of its starting point of round.

Keywords: closed curve, natural parametrization, starting point.

1. Когда обсуждается вопрос об использовании замкнутой кривой в каком-нибудь рассуждении, обычно не задумываясь берут какую-нибудь подходящую ее параметризацию с согласованной по задаче ориентацией и начинают вычисления с удобной для расчетов точки. При этом, как правило, не учитывают, не влияет ли выбор точки начала обхода кривой на свойства кривой. Мы покажем, что изменение начальной точки обхода кривой изменяет как локальные, так и глобальные геометрические характеристики кривой, за исключением случаев окружности, если кривую рассматривать в функции ее натурального параметра.

2. Рассмотрим сначала пример кардиоиды с параметрическим уравнением в декартовых координатах

$$x = a\sin\varphi(1-\cos\varphi), \quad y = -a\cos\varphi(1-\cos\varphi),$$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, параметр $a > 0$.

Sabitov, I. Kh., Do the Properties of a Closed Curve Depend on the Choice of Its Starting Point?

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

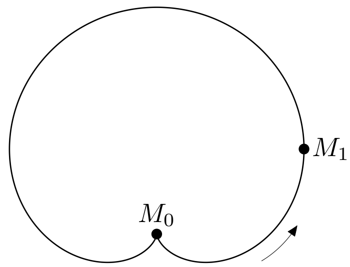

Рис. 1.
Кардиоида C (начало обхода в M_0)

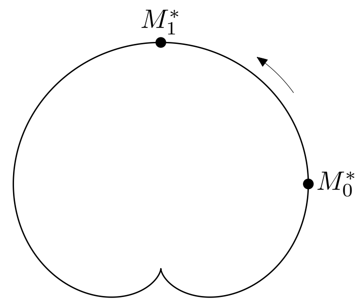

Рис. 2.
Кардиоида C^* (начало обхода в M_0^*)

Мы выбрали этот пример, потому что для него легко перейти к натуральному параметру s:

$$s = 8a\sin^2\frac{\varphi}{4}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 8a. \tag{1}$$

Далее, из (1) имеем

$$\varphi = 4\arcsin\sqrt{\frac{s}{8a}},$$

$$\sin\varphi = \frac{(4a-s)\sqrt{s(8a-s)}}{8a^2}, \quad \cos\varphi = 1 - \frac{s(8a-s)}{8a^2}.$$

На основании этих равенств легко находим значения $x(s)$, $y(s)$ и их производных:

$$x(s) = (4a-s)\frac{\left(\sqrt{s(8a-s)}\,\right)^3}{64a^3}, \quad y(s) = a\frac{[s(8a-s)-8a^2]s(8a-s)}{64a^3}, \tag{2}$$

$$x'(s) = \frac{(12a^2-8as+s^2)\sqrt{s(8a-s)}}{16a^3}, \tag{3}$$

$$y'(s) = -\frac{(4a-s)(s^2-8as+4a^2)}{16a^3}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) выводим, что выполнено нужное для натуральной параметризации равенство

$$(x')^2(s) + (y')^2(s) = 1.$$

Пусть начало обхода кардиоиды C (рис. 1) в точке $M_0(0,0)$ при значении $s=0$ и возвращаемся в ту же точку при значении $s=8a$. Считаем, что функции $x(s), y(s)$ продолжаются по периодичности с периодом $T=8a$ на все значения s (на самом деле достаточно работать со значениями s от $-8a$ до $16a$). Это приводит к уравнению вида

$$\mathbf{r}(8a+t) = \mathbf{r}(t).$$

Сдвинем на кардиоиде C^* (рис. 2) начало отсчета в точку $M_1(\frac{3\sqrt{3}a}{4}, \frac{3a}{4})$ со значением $s = 2a$. Натуральный аргумент s у кривой $\mathbf{r}^*(s)$ по-прежнему будет изменяться от 0 до $8a$. Получим новую кривую как образ отображения отрезка $[0, 8a]$ в $\mathbb{R}^2$ со значениями координат $x^*(s)$, $y^*(s)$:

$$x^*(s) = \frac{(2a-s)[(s+2a)(6a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 6a,$$
$$\frac{(10a-s)[(s-6a)(14a-s)]^{3/2}}{64a^3}, \quad 6a \leqslant s \leqslant 8a,$$
$$y^*(s) = \frac{(s+2a)(6a-s)[(s+2a)(6a-s)-8a^2]}{64a^3}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 6a,$$
$$\frac{(s-6a)(14a-s)[(s-6a)(14a-s)-8a^2]}{64a^3}, \quad 6a \leqslant s \leqslant 8a.$$

Переименуем теперь M_1 в M_0^* с начальным значением параметра $s = 0$, как и положено в начале обхода. Тогда значению длины дуги, равной $2a$, при новом обходе будет соответствовать точка M_1^* с координатами $(x = 0, y = 2a)$. Если новое положение кардиоиды получается из исходного ее положения просто движением, тогда по *определению движения* все расстояния на плоскости должны оставаться без изменения. Расстояние между точками M_0 и M_1 равно $\frac{3}{2}$, а расстояние между их образами M_0^* и M_1^* равно $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Итак, по внутренней геометрии расстояния в парах (M_0, M_1) и (M_0^*, M_1^*) оба равны $2a$, а пространственные расстояния разные. Очевидно, равенство внутренних расстояний остается верным для всех пар точек, значит, перенос начальной точки отсчета приводит к появлению нового представления кардиоиды с координатами (x^*, y^*), нетривиально изометричного исходному ее изображению как образа, в обоих случаях, одного и того же отрезка $[0, 8a]$. Как множества точек в $\mathbb{R}^2$, эти множества абсолютно идентичны, но как отображения они различны и их связывает нетривиальная изометрия. Если изменение начала обхода кривой происходит непрерывно, то соответствующая деформация кривой будет нетривиальным *изгибанием* кривой, при котором дуги непрерывно переходят в дуги с теми же длинами, но с разными по длине хордами.

То, что это так для всех кривых, кроме единичного случая, подтверждается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того, чтобы у C^1-гладкой кривой равные по длине дуги имели равные по длине хорды, необходимо и достаточно, чтобы кривая была окружностью или дугой окружности.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна, проверим его необходимость. Пусть на кривой с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ выделена некоторая дуга длины Δs. Тогда квадрат расстояния между концевыми точками $(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2$ и Δs связаны одним и тем же соотношением вида

$$(\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s))^2 = f(\Delta s) \tag{5}$$

независимо от значения s. Обозначим для краткости Δs как t. Из уравнения (5) при $s = 0$ имеем

$$f(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2,$$

так что уравнение (5) с учетом периодичности координат точек замкнутой кривой при всех t и s представится в виде

$$(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2. \tag{6}$$

Правая часть является четной функцией от t, значит, четна и левая часть. Продифференцируем уравнение (6) по s и t. Получим

$$2(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))(\mathbf{r}(s+t)'_s - \mathbf{r}'_s(s)) = 0, \tag{7}$$

$$2(\mathbf{r}(s+t) - \mathbf{r}(s))\mathbf{r}(s+t)'_t = 2(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))\mathbf{r}'_t(t). \tag{8}$$

Производные $\mathbf{r}(s+t)'_s$ и $\mathbf{r}(s+t)'_t$ равны между собой, как производные сложной функции $r(u)$, $u = s + t$ соответственно по s и по t. Левая часть уравнения (7) является четной по отношению к t, а левая часть уравнения (8), будучи равной в правой части производной по t от четной функции, является нечетной функцией. Таким образом, левая часть разности между (7) и (8) является разностью между четной и нечетной функциями, а правая часть является нечетной функцией, что бывает, только если обе они равны тождественно нулю. Значит, имеем уравнение

$$2(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))\mathbf{r}'_t(t) = 0,$$

из которого выводим равенство

$$(\mathbf{r}(t)^2 - 2\mathbf{r}(0)\mathbf{r}(t))'_t = 0.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2 = \mathbf{r}(0)^2,$$

что и означает, что кривая является окружностью. □

Опишем полученный результат более подробно. Пусть дана замкнутая C^1-гладкая кривая. Введем на ней натуральную параметризацию, для которой имеем $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$, $0 \leqslant s \leqslant L$, где L — длина кривой. Две изометричные кривые называем *эквивалентными,* если их образы на плоскости получаются движением на плоскости. По смыслу движения все расстояния на плоскости остаются неизменными, в частности, при движении не изменяются не только длины дуг, но не изменяются и длины хорд соответствующих дуг кривых. Изменим точку начала отсчета длины на кривой. Кривая как множество точек на плоскости останется неизменным, но она изменится как отображение отрезка $[0, L]$ в $\mathbb{R}^2$, в частности, образ точки $0 \in [0, L]$ в $\mathbb{R}^2$ будет другим. Обозначим два положения кривой как C и C^*. Так вот, для того, чтобы кривые C и C^* были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они были окружностями одного радиуса. Это значит, что если кривая C не была окружностью, то при изменении точки начала отсчета длины новая кривая C^* будет нетривиально изометрична исходной кривой, т. е. не получается из нее движением, в частности, изменятся длины хорд. Если изменение точки начала отсчета длины происходит непрерывно, то получается *нетривиальное изгибание* кривой. Значит, внешние свойства кривой как образа отрезка $[0, L]$, при изменении точки начала отсчета длины кривой изменятся, при этом кривизна кривой не является инвариантом изгибания.

Влияние изменения начала отсчета длины дуги кривой можно увидеть из следующего мысленного эксперимента. Пусть из некоторой точки кривой послан сигнал, идущий по кривой. После прохождения по кривой некоторого расстояния, из точки кривой, куда дошел сигнал, посылается по хорде сигнал в точку отправления сообщение о прибытии посланного сигнала. Теорема говорит, что если кривая не была дугой окружности, то сигналы, посланные из разных точек, но идущие сначала вдоль кривой на одинаковые расстояния, придут в точку отправления за разное время. Интересно было бы узнать, как изменяется в зависимости от характеристик кривой время прихода сигнала в исходную точку при данной длине пути по кривой, в частности, когда оно будет наименьшим или наибольшим.

Считаю своим приятным долгом сердечно поблагодарить А. Н. Швеца за неоценимую помощь в оформлении работы.

Idjad Khakovich Sabitov
M. V. Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory,
119991, Moscow, Russian Federation
Email address: isabitov@mail.ru