S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ?–? (2024) УДК 512.554

DOI 10.17377/semi.2024.15.xxx

MSC 16R10, 17A30

О ГРАФЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

И.М. ИСАЕВ

Abstract. We prove that the zero-divizor graf of alternative ring is connected. Also for each integer n>1 we constructed a non-associative ring with the number of connecting components greater than n.

Keywords: zero-divizor graf, alternative ring, non-associative ring.

1. Введение

Понятие графа делителей нуля коммутативного кольца было введено в 1986 году в работе [1]. В качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца автор этой работы И.Бек рассматривал все элементы кольца, причем две различные вершины x и y соединял ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$. Ясно, что определенный таким образом граф делителей нуля всегда связен.

В 1999 году в статье [2] способ построения графа делителей нуля был изменен. Авторы этой работы предложили считать вершинами графа делителей нуля коммутативного все ненулевые делители нуля. Оказалось, что и при таком подходе граф делителей нуля коммутативного кольца связен.

Позднее определение графа делителей нуля было распространено и на некоммутативный случай. Во-первых, используется понятие ориентированного графа делителя нуля. Вершинами такого графа считаются все делители нуля кольца, причем две различные вершины соединяются ориентированным ребром $x \longrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (см., в частности, работы [3, 5]). Во-вторых, введено понятие неориентированного графа делителей нуля, т.е. графа, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца, причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только

Isaev, I.M., On the Zero-Divisor Graph of Non-Associative Rings.

Поступила ?? июня 2024 г., опубликована ?? декабря 20?? г.

тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$ (см. [4, 3]). Понятно, что в коммутативном случае последнее определение графа делителей нуля совпадает с определением, введенным в статье [2].

Нам понадобится определение связного графа.

Маршрутом в графе G называется такая последовательность ребер этого графа $E_0, E_1, \ldots, E_n$, что конечная вершина ребра E_i совпадает с начальной вершиной ребра E_{i+1} для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Маршрут называется *цепью*, если каждое его ребро встречается в нем не более одного раза. Маршрут называется *простой цепью*, если все его вершины различны [6, С. 26]. Граф G называется *связным*, если любая пара его различных вершин соединена простой цепью [6, С. 27].

В статьях [4] доказано, что неориентированный граф делителей нуля любого ассоциативного кольца связен[1].

В настоящей работе исследуется граф делителей нуля произвольного (возможно, неассоциативного) кольца.

Графом делителей нуля кольца R мы называем граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца R, причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Приведем некоторые определения и факты из теории колец.

Кольцо R называется *первичным*, если для любых ее двух идеалов I и J из равенства $IJ = (0)$ следует, что $I = (0)$ или $J = (0)$ [7, С. 193].

Через $D(R)$ будем обозначать множество всех (односторонних и двусторонних) делителей нуля кольца R. Обозначим $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

Кольцо A называется *альтернативным*, если $x^2y = x(xy)$ и $yx^2 = (yx)x$ для всех $x, y \in A$.

Известно, что в альтернативном кольце любые два элемента порождают ассоциативное подкольцо [7, теорема Артина, С. 51]. Кроме того, во всяком альтернативном кольце справедливы следующие тождества:

$x(yzy) = ((xy)z)\,y$ – *правое тождество Муфанг*,

$(yzy)x = y\,(z(yx))$ – *левое тождество Муфанг*,

$(xy)(zx) = x(yz)x$ – *центральное тождество Муфанг* (см. [7, С. 50]).

Элемент a альтернативного кольца A называется *абсолютным делителем нуля*, если $aAa = (0)$. Кольцо A называется *невырожденным*, если A не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля [7, С. 216].

Центром кольца называется пересечение ассоциативного центра и коммутативного центра данного кольца [7, С. 163].

Альтернативное кольцо K с ненулевым центром Z, не содержащим делителей нуля кольца K, называется *кольцом Кэли–Диксона*, если кольцо частных $(Z^*)^{-1}\,K$, где $Z^* = Z \setminus \{0\}$, является алгеброй Кэли–Диксона над полем частных $(Z^*)^{-1}\,Z$ центра Z [7, С. 228, 44].

В настоящей работе доказывается связность графа делителей нуля альтернативного кольца, а также приведен пример йордановой алгебры билинейной формы, граф делителей нуля которой имеет сколь угодно большое число компонент связности. Отметим, что ряд аналогичных результатов для Ф-алгебр, получен в работе [8] .

[1] В работе [5] доказано, что в общем случае ориентированный граф делителей нуля кольца не является связным, и получены некоторые критерии связности ориентированного графа делителей нуля ассоциативного кольца.

Нам понадобится определение диаметра графа.

Длина маршрута – количество ребер в нем. *Расстоянием* $d(u, v)$ между двумя различными вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если u и v не соединены, то полагаем $d(u, v) = \infty$. *Диаметр* связного графа G есть максимальное расстояние между двумя его вершинами. Диаметр графа G обозначается $d(G)$ [6, С. 27].

Докажем две леммы, которые нам впоследствии понадобятся.

Лемма 1. *Пусть K – кольцо Кэли–Диксона с ненулевым центром Z, не содержащим делителей нуля кольца K, и $K_1 = (Z^*)^{-1} K$ – алгебра Кэли–Диксона над полем частных Z_1 центра Z. Элементы $a, b \in K$ соединены в $\Gamma(K)$ цепью тогда и только тогда, когда они соединены цепью в $\Gamma(K_1)$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, а в обратную сторону следует из импликации: если $x(z^{-1}y) = 0$, то $xy = 0$ для всех $x, y \in K$ и $z \in Z^*$.

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть A – алгебра Кэли-Диксона над полем F. Тогда граф $\Gamma(A)$ связен.*

Доказательство. Заметим, что каждый элемент x алгебры A удовлетворяет равенству вида $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$, где $t(x), n(x) \in F$ [7, С. 44, 38]. Пусть $x, y \in D(R)^*$ и $x \neq y$. Поскольку F – поле и A является F-алгеброй, то $n(x) = n(y) = 0$. Если $x - t(x) \neq 0$ и $y - t(y) \neq 0$, то элементы x, y являются делителями нуля в ассоциативной алгебре, порожденной элементами x, y и полем F. Поэтому они связаны в графе делителей нуля этой ассоциативной алгебре, а значит связаны в графе делителей нуля алгебры A. Наконец, случай $x - t(x) = 0$ (или $y - t(y) = 0$) невозможен, поскольку ненулевой делитель нуля x не может лежать в поле F. Лемма доказана. □

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Граф делителей нуля произвольного альтернативного кольца связен.*

Доказательство.

Предположим, что утверждение неверно, и пусть A – альтернативное кольцо, являющееся контрпримером к теореме. Ввиду теоремы Редмонда ([4]) кольцо A является неассоциативным.

Докажем сначала, что кольцо A первично. Предположим противное: пусть I, J – ненулевые идеалы кольца A, такие, что $IJ = (0)$. Возьмем произвольные ненулевые элементы $i \in I$ и $j \in J$. Пусть $x, a \in D(R)^*$, причем $x \neq j$ и $ax = 0$ (случай, когда $xa = 0$, рассматривается аналогично). Покажем, что существует цепь, соединяющая элементы x и j. Если $aia \neq 0$, то, пользуясь тождеством Муфанг, получаем такую цепь: $x - aia - j$. Пусть теперь $aia = 0$. Если $ia \neq 0$, то получаем такую цепь: $x - a - ia - j$. Если, наконец, $ia = 0$, то имеем следующую цепь: $x - a - i - j$. Таким образом, любой элемент $x \in D(R)^*$, не равный j, соединен с элементом j цепью. Поэтому граф $\Gamma(R)$ связен. Противоречие доказывает, что кольцо A первично.

Докажем теперь, что кольцо A является невырожденным. Предположим, что b – ненулевой абсолютный делитель кольца A, т.е. $bmb = 0$ для всех $m \in A$. Пусть $x, a \in D(R)^*$, $ax = 0$ или $xa = 0$, причем $x \neq b$. Покажем, что существует цепь, соединяющая элементы x и b. Если $aba \neq 0$, то, пользуясь тождеством Муфанг, получаем такую цепь: $x - aba - b$. Если $aba = 0$, но $ba \neq 0$, то получаем такую цепь: $x - a - ba - b$. Наконец, если $ba = 0$, то имеем следующую цепь: $x - a - b$. Таким образом, любой элемент $x \in D(R)^*$, не равный b, соединен цепью с элементом b. Следовательно, граф $\Gamma(R)$ связен. Противоречие. Поэтому кольцо A является невырожденным.

Любое первичное невырожденное неассоциативное альтернативное кольцо является кольцом Кэли–Диксона [7, теорема Слейтера, С. 229]. Из лемм 1 и 2 немедленно получаем, что граф $\Gamma(A)$ связен. Противоречие доказывает теорему. $\square$

Замечание. Из доказательств лемм и последней теоремы видно, что диаметр $d(\Gamma(A))$ графа делителей нуля альтернативного кольца не превосходит числа 6.

Следующий пример показывает, что теорема 1 не может быть обобщена на случай произвольного неассоциативного кольца.

Рассмотрим йорданову алгебру билинейной формы $B(f)$. Напомним определение этой алгебры. Пусть V - векторное пространство над полем F с заданной на нем симметрической билинейной формой $f = f(x, y)$. Рассмотрим прямую сумму векторного пространства V и одномерного пространства $F \cdot 1$ с базисом 1 и зададим на B умножение следующим образом: $(\alpha \cdot 1 + x)(\beta \cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) \cdot 1 + (\beta x + \alpha y)$, где $\alpha, \beta \in F, x, y \in V$. Эта алгебра обозначается $B(f)$ и является йордановой алгеброй с единицей 1 . Если форма f - невырождена и $dim_F V > 1$, то йорданова алгебра $B(f)$ является простой [7](гл.3, упр.2).

В нашем примере мы рассмотрим в качестве V - n-мерное векторное пространство над полем F с базисом $\{v_1, ..., v_n\}, n > 1$. Положим $v_i \cdot v_j = 1$ при $i = j$ и $v_i \cdot v_j = 0$ при $i \neq j$. Несложно проверить, что делители нуля этой алгебры разбиваются на пары элементов, которые в произведении дают 0, двух видов:

1. $(\alpha(1 + v), \beta(1 - v))$, где α, β - ненулевые элементы поля F, $v \in V$, причем $v^2 = 1$.
2. (v, w), где v, w - ненулевые векторы пространства V, причем $vw = 0$.

В частности, ребра графа делителей нуля состоят из ребер, соединяющих всевозможные пары вида:

1. $(\alpha(1+v), \beta(1-v))$, где α, β - ненулевые элементы поля F, $v \in V$, причем $v^2 = 1$.
2. (v, w), где v, w - ненулевые векторы пространства V, причем $vw = 0$.

Рассмотрим компоненты связности, составленные из делителей нуля, входящие в пары первого вида. Каждой такой паре соответствует своя компонента связности. В частности, число компонент связности графа делителей нуля алгебры

B(f) не меньше n. А именно, это компоненты связности графа делителей нуля, состоящие из пар $(\alpha(1+v_i), \beta(1-v_i))$, где α, β - ненулевые элементы поля F.

References

[1] Beck I. Coloring of Commutative Rings // J. Algebra. – 1988. – 116. – pp. 208–226.

[2] Anderson D.F., Livingston P.S. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring // J. Algebra. – 1999. – 217(2). – pp. 434–447.

[3] Akbari S., Mohammadian A. On Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // J. Algebra. – 2007. – 314. – pp.168–184.

[4] Redmond S.P. The Zero-Divisor Graph of a Noncommutative Ring // Int. J. Commut. Rings. – 2002. – 1(4). – pp. 203–211.

[5] Wu T. On Directed Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // Discrete Math. – 2005. – 296. – pp. 73–86.

[6] Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ. / Под ред. Г.П.Гаврилова. – М.: Мир, 1973. – 302 с.

[7] Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

[8] Исаев И.М., Кузьмина А.С., О связности графа делителей нуля Ф-алгебры // Вестник АлтГПА.–2011/–7.–С.7-10.

Ismail Musaevich Isaev
Altai State Pedagogical Univercity,
Molodeznaya st. 55,
656031, Barnaul, Russia
E-mail address: isaev@uni-altai.ru