УДК 512.7

# Локальная геометрия рефлексивных пучков ранга два на трехмерных алгебраических многообразиях

**И. Ю. Ланских**

**Аннотация**

In this article we study the properties of reflexive coherent sheaves of rank 2 on smooth three-dimensional algebraic varieties. In the first part of the article, we present a new proof of the statement that the projective spectrum of a reflexive sheaf with the simplest singularities is a smooth algebraic variety, and we give a geometric interpretation of the simplest singularities in terms of the projective spectrum of a sheaf. In the second part we show that, for a general flat deformation of a torsion-free coherent sheaf with zero-dimensional essential singularities of any given length which are contained in the singularities of its reflexive hull, the singularities of a deformed sheaf are not contained in the singularities of its reflexive hull.

## 1 Введение

В настоящей статье изучаются особенности рефлексивных когерентных пучков ранга 2 на трехмерном алгебраическом многообразии $X$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Работа состоит из двух независимых частей.

Первая часть работы (параграфы 2 и 3) посвящена изучению проективного спектра (см. определение 2) рефлексивного пучка с простейшими особенностями (см. определение 1). Такие пучки впервые появились в работе [3], в которой они называются *гладкими рефлексивными пучками.* Э. Баллико и Я. Вишневский в своей работе [2, Cor. 2.8] доказали, что проективный спектр рефлексивных пучков с простейшими особенностями над гладкой схемой является гладким многообразием. В параграфе 3 мы даём независимое доказательство этого факта — см. теорему 2.

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный рефлексивный пучок ранга 2 на трехмерном многообразии $X$.

**Определение 1.** *Точка $x \in X$ называется* ***простейшей особенностью пучка*** *$\mathcal{F}$, если выполнено*

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_{X,x}) = \Bbbk_x, \tag{1}$$

*где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$, $\Bbbk_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ — поле вычетов в точке $x$.*

Нас будет интересовать случай, когда пучок $\mathcal{F}$ на $X$ имеет лишь простейшие особенности. Как известно, множество особенностей не локально свободного рефлексивного пучка $\mathcal{F}$ на $X$ нульмерно [8, Chapter 2, Lemma 1.1.10]. Поэтому для любой особой точки $x \in X$ пучка $\mathcal{F}$ существует окрестность $U \subset X$ точки $x$ такая, что $\mathcal{F}\big|_U$ имеет единственную особенность в точке $x$. Поскольку вопрос, обсуждаемый в этой главе, носит локальный характер, мы можем считать, что $X = U$, причем $x$ — единственная особенность пучка $\mathcal{F}$

на $X$. В этой главе мы покажем, что проективный спектр $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ — гладкое многообразие, которое реализуется как гиперповерхность в пятимерном многообразии, которое мы определим далее (см. теорему 2). Кроме того, в теореме 3 мы даём геометрическую интерперетацию слоя проекции на $X$ проективного спектра над простейшей особенностью. А именно, мы доказываем, что есть естественный изоморфизм между проективизацией кокасательного расслоения $\mathbb{P}(\Omega_x X)$ в особой точке $x$ и слоем структурного морфизма $\pi^{-1}(x)$, определенного ниже в (7).

Во второй части настоящей работы изучаются *плоские семейства* подпучков рефлексивного пучка $F$ ранга 2 на трехмерном многообразии $X$ с особенностью $x_0 \in X$. Как известно [6], всякий ненулевой когерентный пучок $E$ без кручения на гладком трехмерном квазипроективном многообразии $X$ является подпучком рефлексивного пучка $E^{\vee\vee}$, называемого *рефлексивной оболочкой* пучка $E$, где $E^{\vee\vee} := \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ либо локально свободен, либо имеет нульмерные особенности. Если при этом $E$ также имеет нульмерные особенности, то представляет интерес случай, когда особенности пучка $E$ совпадают с особенностями пучка $E^{\vee\vee}$. Это означает, что факторпучок $Q = E^{\vee\vee}/E$ является нульмерным пучком (см. определение 5) с носителем в множестве особенностей пучка $E^{\vee\vee}$: $\mathrm{Supp}(Q) \subset \mathrm{Sing}(E^{\vee\vee})$. При этом априори $Q$ может быть достаточно «сложным» пучком — например, иметь большую длину $\ell(Q)$. Носитель пучка $Q$ будем называть при этом *существенными особенностями* пучка $E$ и обозначать $\mathrm{Sing}^{ess}(E)$ — см. определение 4.

А.С.Тихомиров сформулировал вопрос: существует ли какая-то нижняя граница $n_0$ для длины пучка $Q$, такая, что при $\ell(Q) \geq n_0$ и любой плоской деформации $E_t$ пучка $E$ существенные особенности пучка $E_t$ удерживаются в особенностях его рефлексивной оболочки $E_t^{\vee\vee}$.

Ниже (в теореме 4) мы даем отрицательный ответ на этот вопрос для случая, когда $X = \mathbb{A}^3$. Более точно, мы рассматриваем произвольный рефлексивный пучок $F$ ранга 2 на $\mathbb{A}^3$ с особенностью в данной точке $x_0$. В этой теореме мы показываем, что существует подпучок (без кручения) $E$ с 0-мерным фактором $Q = F/E$ любой наперед заданной длины $\ell(Q) = n > 0$ с носителем в точке $x_0$, который варьируется в плоском семействе пучков $\boldsymbol{E} := \{E_t\}_{t\in C}$ с базовой кривой $C \ni 0$ на $X$, таком, что $E_0 = E$, а носитель особенностей пучка $E_t$ при $t \in C^* := C \smallsetminus \{0\}$ не содержит точку $x_0$.

Введем некоторые обозначения.

| | |
|---|---|
| $\Bbbk$ | основное поле, $\mathrm{char}\Bbbk = 0$, $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ |
| $\mathrm{Coh}(X)$ | категория когерентных пучков на $X$, |
| $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ | множество особенностей пучка $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, |
| $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ | множество особенностей пучка $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, |
| $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ | $:= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}),\ \ i \geq 0,\ \ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}(X)$, |
| $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ | $:= \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}),\ \ i \geq 0,\ \ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}(X)$. |

# 2 Локальное уравнение, задающее проективный спектр рефлексивного пучка $\mathcal{F}$

В этом параграфе мы найдем уравнение, задающее проективный спектр $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ рефлексивного пучка $\mathcal{F}$ ранга 2 с простейшими особенностями как гиперповерхность в пятимерном многообразии (см. теорему 1). Напомним, что мы работаем на многообразии $X$, где пучок $\mathcal{F}$ имеет единственную простейшую особенность $x$. Пучок $\mathcal{F}$ имеет гомологическую размерность 1, поэтому для некоторой окрестности $U \subset \mathbb{P}^3$ точки $x$ и некоторого $m \in \mathbb{N}$ существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_U^{\oplus m} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_U^{\oplus(m+2)} \to \mathcal{F}\big|_U \to 0. \tag{2}$$

**Лемма 1.** *(i) Существуют морфизмы модулей $\varphi, \psi$, делающие точной тройку*

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_x \to 0. \tag{3}$$

*(ii) Пусть для любого $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ имеем $\psi(f) = (L_1 f, L_2 f, L_3 f)$, где $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{m}_x$. Тогда $L_1, L_2, L_3$ порождают максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$*

*Доказательство.* (i) Заметим, что для произвольной точки $y \in X$ существует изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{F}_y, \Bbbk_y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{F}_y, \mathcal{O}_{X,y}), \Bbbk_y), \tag{4}$$

(см. [1, Cor. 2.2c.], для $G = \mathcal{F}_y$, $M = \mathcal{O}_{X,x}$, $N = \Bbbk_y$). В нашем случае, когда $x \in X$ — единственная простейшая особенность пучка $\mathcal{F}$, имеем

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{F}_y, \Bbbk_y) = \begin{cases} \Bbbk_y, & \text{для } x = y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5}$$

Применим функтор $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3},y} \Bbbk_x$к короткой точной последовательности (2), получаем длинную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}^1(\mathcal{F}_x, \Bbbk_x) \to \Bbbk_x^{\oplus m} \to \Bbbk_x^{\oplus(m+2)} \to \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x \to 0.$$

Поскольку $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x = \Bbbk_x^{\oplus k}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, в силу (5) получаем $k =$ $= (m+2) - m + 1 = 3$. Следовательно, существует биекция между $\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3}/\mathfrak{m}_x = \Bbbk_x^{\oplus 3}$ и $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$. Эту биекцию можно поднять до гомоморфизма модулей $\varphi : \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \to \mathcal{F}_x$. По лемме Накаямы $\varphi$ — эпиморфизм, поэтому существует короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_x \to 0,$$

где $\psi(f) = (L_1 f, L_2 f, L_3 f)$, где $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{m}_x$.

(ii) Применим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(-, \mathcal{O}_{X,x})$ к точной тройке (3), получим

$$0 \to \mathcal{F}_x^{\vee} \to \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \to \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_{X,x}) \to 0. \tag{6}$$

Рассмотрим коммутитивную диаграмму, средний столбец которой достроим по лемме о подкове:

$$
\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \arrow[u] \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{F}_x \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, equal] \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{O}_{X,x} \oplus \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \arrow[l, shift left, "pr_1"] \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "pr_2"] & \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & 0 \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

В этой диаграмме отображения $\gamma$ и $\beta$ определены следующим образом: $\gamma(f) = \psi \circ pr_1(f) + pr_2(f)$, $\beta(g) = (g, \psi(g))$. Применим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(-, \mathcal{O}_{X,x})$ к нижним двум строчкам диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 3}, \mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r, "pr_2^*"] \arrow[d, "\psi^*"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 4}, \mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "\beta^*"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Последовательность (6) получается применением леммы о змее к последней диаграмме. Поскольку каждый морфизм из $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x})$ осуществляет домножение на некоторый элемент $\mathcal{O}_{X,x}$, будем отождествлять морфизмы и элементы. Рассмотрим некоторый $F_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x})$, найдем $\delta(F_0)$. Заметим, что $(i_1^*)^{-1}(F_0) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus 4}, \mathcal{O}_{X,x})$ — это множество всех морфизмов, которые на первую координату действуют домножением на $F_0$. Пусть $\ell \in (i_1^*)^{-1}(F_0)$ и

$$\ell(g_0, g_1, g_2, g_3) = F_0 g_0 + F_1 g_1 + F_2 g_2 + F_3 g_3.$$

Тогда $\beta^*(\ell)(g) = \ell \circ \beta(g) = F_0 \cdot g + (F_1 L_1 + F_2 L_2 + F_3 L_3) g$.

Заметим, что если $F_0 \in \langle L_1, L_2, L_3 \rangle$, то $\delta(F_0) = \beta^*(\ell) \in \mathrm{im}(\psi^*)$, поэтому в силу точности (6) имеем $\langle L_1, L_2, L_3 \rangle \subset \ker \delta = \mathfrak{m}_x$. Обратное включение тоже верно, потому что условие $\delta(F_0) \in \mathrm{im}(\psi^*)$ в точности означает, что $F_0 + F_1 L_1 + F_2 L_2 + F_3 L_3 \in \langle L_1, L_2, L_3 \rangle$, а это равносильно $F_0 \in \langle L_1, L_2, L_3 \rangle$. Таким образом, $\langle L_1, L_2, L_3 \rangle = \mathfrak{m}_x$. $\square$

Пусть $A$ — коммутативное кольцо с единицей, $S = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k$ — градуированная $A$ – алгебра, $S_0 = A$, $S_+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k$ — идеал, порожденный однородными элементами. Пусть $|\mathrm{Proj}(S)|$ — множество однородных простых идеалов в $S$, не содержащих $S_+$. На $|\mathrm{Proj}(S)|$ естественно вводится топология Зарисского и структура схемы. Полученную схему будем обозначать $\mathrm{Proj}(S)$.

Пусть $\mathcal{G}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, обладающий структурой градуированной $\mathcal{O}_X$-алгебры $\mathcal{G} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_k$, где $\mathcal{G}_k$ — однородная компонента степени $k$. Предположим, что $\mathcal{G}_0 = \mathcal{O}_X$ и $\mathcal{G}$ порождается $\mathcal{G}_1$ как $\mathcal{O}_X$-алгебра. Для $U = \mathrm{Spec}(A)$ модуль

$\mathcal{G}(U) = \Gamma(U, \mathcal{G}\big|_U)$ является градуированной $A$-алгеброй. Рассмотрим проективный спектр $\mathrm{Proj}(\mathcal{G}(U))$ и естественный морфизм $\mathrm{Proj}(\mathcal{G}(U)) \to \mathrm{Spec} A = U$. Схемы $\mathrm{Proj}(\mathcal{G}(U))$ естественно склеиваются в схему $\mathrm{Proj}(\mathcal{G})$ со структурным морфизмом

$$\pi\colon \mathrm{Proj}(\mathcal{G}) \to X. \tag{7}$$

**Определение 2.** *Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок. Его* ***проективным спектром*** *называется схема* $\mathbb{P}(\mathcal{F}) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^d(\mathcal{F})\right) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}))$.

Из тройки (3) для подходящей окрестности $U \ni x$ получаем тройку

$$0 \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U^{\oplus 3} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_U \to 0. \tag{8}$$

Поскольку эпиморфизму пучков $\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ соответствует вложение их проективных спекторов $\mathbb{P}(N) \hookrightarrow \mathbb{P}(M)$, эпиморфизму $\varphi$ из (8) соответствует вложение

$$\iota\colon \mathbb{P}(\mathcal{F}|_U) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_U^{\oplus 3}) = U \times \mathbb{P}^2 \tag{9}$$

для некоторой окрестности $\mathrm{Spec} A = U \ni x$. По лемме 1 функции $(L_1, L_2, L_3)$ являются локальными координатами в окрестности точки $x$, поэтому можем без ограничения общности считать, что $(L_1, L_2, L_3) = (y_1, y_2, y_3)$ — координаты на $U$, в которых $x = (0, 0, 0)$.

Рассмотрим однородный максимальный идеал $\mathfrak{m} \in \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^d(A^{\oplus 3})$. Для $i \geq 0$ рассмотрим $i$ – ую компоненту $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap \mathrm{Sym}^i(A^{\oplus 3})$ однородного идеала $\mathfrak{m}$.

Заметим, что $\mathfrak{m}_0 \subset A$ — максимальный идеал, поэтому он определяет замкнутую точку на схеме $\mathrm{Spec} A = U$, что дает первые три координаты на $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{\oplus 3})(U) = U \times \mathbb{P}^2$.

При фиксированном $\mathfrak{m}_0$ компонента $\mathfrak{m}_1 \subset A^3$ полностью определяет $\mathfrak{m}$. Действительно, $A^3/\mathfrak{m}_0 = \Bbbk^{\oplus 3}$, поэтому образ $\mathfrak{m}_1$ при такой факторизации должен быть 2-мерным подпространством $\Bbbk^{\oplus 3}$. Все следующие компоненты $\mathfrak{m}_i$ порождаются $\mathfrak{m}_1$ (иначе получаем противоречие с простотой $\mathfrak{m}$). Двумерные подпространства $\Bbbk^{\oplus 3}$ соответствуют точкам в $\mathbb{P}^2$, что дает однородные координаты $(u_1 : u_2 : u_3)$ на $\mathbb{P}^2$, где $u_i$ — двойственный базис к стандартному базису в $\Bbbk^{\oplus 3}$.

**Теорема 1.** *В вышеописанных координатах $(u_1 : u_2 : u_3)$ на $\mathbb{P}^2$ образ $\iota(\mathbb{P}(\mathcal{F})(U))$ задается уравнением*

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0. \tag{10}$$

*Доказательство.* Поскольку $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, $\mathcal{F}(U) = M$ — конечнопорожденный $A$ – модуль. Пусть $e_1, e_2, e_3$ — естественные образующие $A^{\oplus 3}$, тогда $f_i = \varphi(e_i)$ — образующие $M = \widetilde{M}/I$, где морфизм $\varphi$ определен в (8), $\widetilde{M} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, $I = \langle y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 \rangle$. Пусть $F_I\colon \widetilde{M} \to M$ — отображение факторизации. Пусть $\mathfrak{p} \subset \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^d(M)$ —замкнутая точка. Тогда $\mathfrak{p} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathfrak{p}_d$, где $\mathfrak{p}_d = \mathrm{Sym}^d(M) \cap \mathfrak{p}$. Заметим, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_d) \subset \mathrm{Sym}^d(A^{\oplus 3})$. Тогда $\varphi^{-1}\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0 \subset A$ — максимальный идеал, задающий некоторую точку $(c_1, c_2, c_3) \in U$, то есть $\mathfrak{p}_0 = \langle (y_1 - c_1, y_2 - c_2, y_3 - c_3) \rangle$. Кроме того, при фиксированном $\mathfrak{p}_0$ максимальный идеал $\mathfrak{p}$ однозначно задается своей первой компонентой $\mathfrak{p}_1$.

Обозначим $\widetilde{\mathfrak{p}_1} = F_I^{-1}(\mathfrak{p}_1)$. Заметим, что $\widetilde{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_0 \subset \Bbbk^{\oplus 3}$ — плоскость, содержащая вектор $(y_1, y_2, y_3) = (c_1, c_2, c_3)$. Координаты $(u_1 : u_2 : u_3)$ любой такой плоскости в двойственном базисе удовлетворяют уравнению (10), что и требовалось. $\square$

# 3 Гладкость проективного спектра

В этом параграфе мы покажем, что проективный спектор $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ рефлексивного пучка $\mathcal{F}$ — это гладкое 4-мерное многообразие, которое реализуется как гиперповерхность в пятимерном многообразии $U \times \mathbb{P}^2$, для $U \subset \mathbb{P}^3$, выбранного в (2) (см. теорему 2). Более того, в теореме 3 мы докажем, что есть естественный изоморфизм между проективизацией кокасательного расслоения $\mathbb{P}(\Omega_x X)$ в особой точке $x$ и слоем структурного морфизма $\pi^{-1}(x)$, определенного в (7).

**Теорема 2.** *Для рефлексивного пучка $\mathcal{F}$ ранга 2 с простейшими особенностями многообразие $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ — гладкое 4–мерное многообразие.*

*Доказательство.* Мы докажем, что $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ локально по $X$ реализуется гладкой гиперповерхностью в 5-мерном гладком многообразии. А именно, достаточно работать на 5-мерном гладком многообразии $U \times \mathbb{P}^2$, поскольку (9) задает вложение $\iota\colon \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to U \times \mathbb{P}^2$. Покроем слой $\mathbb{P}(\mathcal{F}|_U)_x = \pi^{-1}(x)$, где $\pi$ — структурный морфизм (7), аффинными картами

$$W_i = \{(y_1, u_2, y_3, u_1, u_2, u_3) \mid u_i \neq 0\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Проверим гладкость слоя в каждой из карт. Достаточно рассмотреть без ограничения общности карту $W_1$, в которой уравнение (10) многообразия $\iota(\mathbb{P}(\mathcal{F})) \cap W_1$ переписывается в виде

$$y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 = 0,$$

где $z_2 = \dfrac{u_2}{u_1}$, $z_3 = \dfrac{u_3}{u_1}$. Оно содержит ненулевой линейный член, следовательно, $\iota(\mathbb{P}(\mathcal{F})) \cap W_1$ — гладкое многообразие.

Для неособых точек пучка $\mathcal{F}$ утверждение теоремы очевидно, потому что пучок $\mathcal{F}$ локально свободен.

□

Напомним, что в окрестности $U$ мы ранее определили локальные координаты $(y_1, y_2, y_3)$ так, что $x = (0, 0, 0)$ и $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ задается уравнением (10). Кроме того, имеется структурный морфизм (7). Несложно заметить, что над каждой точкой $y \neq x \in U$ слой $\pi^{-1}(y) \simeq \mathbb{P}^1$, а $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^2$.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую $C \subset U$, проходящую через $x$, задаваемую идеалом $(p_1, p_2) \subset \mathfrak{m}_x$. Заметим, что $p_i \in \mathfrak{m}_x$ $(i = 1, 2)$ можно представить в виде

$$p_i = a_{i,1} y_1 + a_{i,2} y_2 + a_{i,3} y_3, \tag{11}$$

где $a_{i,j} \in \mathcal{O}_{U,x}$, окрустность $U$ выберем так, чтобы функции $a_{i,j}$ были регулярны. Обозначим $Y := \mathbb{P}(\mathcal{F}) \xhookrightarrow{\iota} U \times \mathbb{P}^2$ , $C^* := C \backslash \{x\}$, $Y_y := \pi^{-1}(y)$ $(y \in U)$.

**Замечание 1.** *Заметим, что для $y \neq x \in U$ слой $Y_y$ — это прямая, лежащая на $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, которая естественным образом проецируется во вторую компоненту $\mathbb{P}^2$ и определяется уравнением (10). Кроме того, в силу уравнения (7) $Y_x \simeq \mathbb{P}^2$.*

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$W^* := \left\{ (y, u) \in Y \mid y \in C^* \right\}.$$

Заметим, что эта линейчатая поверхность состоит из прямых $Y_y$ для $y \in C^*$.

**Теорема 3.** *Существует единственная линейчатая поверхность* $W_C \xhookrightarrow{\iota_C} Y$ *над кривой* $C$*, состоящая из прямых* $\ell_y \subset Y_y$ $(y \in C)$*, такая, что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} W_C \arrow[r, "\pi_C"] & C \\ W^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_{C^*}"] & C^* \arrow[u, hook] \end{tikzcd},$$

*где* $\pi_C, \pi_{C^*}$ *— ограничения проекции* $Y \to U$ *на кривые* $C$ *и* $C^*$*. Кроме того, слой* $W_C$ *над точкой* $x$ *однозначно определяется касательным направлением к* $C$ *в точке* $x$*. Как следствие получаем, что если* $x$ *— простейшая особенность рефлексивного пучка* $F$ *ранга* 2*, то существует естественный изоморфизм слоя* $\pi^{-1}(x)$ *и проективизации кокасательного расслоения* $\mathbb{P}(\Omega_x X)$ *(где* $\pi$ *— структурный морфизм, определенный в (7)).*

*Доказательство.* Для начала докажем единственность $W_C$. Рассмотрим морфизм ограничения на вторую координату $p\colon W_C \to \mathbb{P}^2$, Этот морфизм переводит прямую $\ell_y \subset Y_y$ в её проекцию на $\mathbb{P}^2$. Таким образом, каждой точке $y \in C$ соответствует точка $p(\ell_y) \in (\mathbb{P}^2)^\vee$, поэтому имеется гладкий морфизм $\varepsilon\colon C \to (\mathbb{P}^2)^\vee$. В силу замечания 1 образ $\varepsilon$ в каждой точке $y \in C^*$ определен не зависимо от выбора линейчатой поверхности $W_C$ (координаты $\varepsilon(y)$ в $(\mathbb{P}^2)^\vee$ отождествлены с вышеопределенными локальными координатами $y \in U$ ). Тогда образ в точке $x$ тоже определяется однозначно в силу непрерывности.

Теперь докажем существование. Положим $a_i(y) := (a_{i,1}(y) : a_{i,2}(y) : a_{i,3}(y)) \in (\mathbb{P}^2)$, где $a_{i,j}$ определены в (11), а $a_{i,j}(y)$ обозначает элемент поля $\Bbbk_y = \mathcal{O}_{y,U}/\mathfrak{m}_y$, получаемый подстановкой локальных координат $y$ в регулярную функцию $a_{i,j}$. Заметим, что поскольку кривая $C$ гладкая, точки $a_1(y), a_2(y) \in \mathbb{P}^2$ различны. Положим $\ell_x := \langle a_1(x), a_2(x) \rangle \in (\mathbb{P}^2)^\vee$. Таким образом, достаточно доказать, что на множестве $W^* \sqcup \ell_x$ можно ввести структуру гладкой схемы. Заметим, что это множество локально задается уравнениями

$$a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + a_{i,3}y_3 = 0,\ i = 1, 2,$$

и условием, что точки $u, a_1(y), a_2(y) \in \mathbb{P}^2$ лежат на одной прямой:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_{1,1}(y) & a_{1,2}(y) & a_{1,3}(y) \\ a_{2,1}(y) & a_{2,2}(y) & a_{2,3}(y) \end{pmatrix} = 0.$$

Действительно, эти уравнения задают подсхему $U \times \mathbb{P}^2$, для которой над кривой $C$ лежит $W^* \sqcup \ell_x$ по построению, а других точек нет. Остается заметить, что в силу различности $a_1(y)$ и $a_2(y)$, пересечение схем, задаваемых этими тремя уравнениями, является гладкой двумерной поверхностью.

По предыдущему построению $\ell_x$ однозначно определялось как $[a_1(x), a_2(x)]$. Заметим, что если выбрать другую кривую $C'$, проходящую через $x$ с совпадающим с $C$ касательным направлением, то соответственно определенные точки $a'_1$ и $a'_2$ будут лежать на прямой $\langle a_1(x), a_2(x) \rangle$, следовательно, прямые $\langle a_1(x), a_2(x) \rangle$ и $\langle a'_1(x), a_2(x)' \rangle$ совпадут.

Таким образом, мы доказали, что $Y_x^\vee$ канонически изоморфно $\mathbb{P}(T_x X)$, откуда немедленно следует финальное утверждение теоремы. $\square$

# 4 Вариация особенностей когерентного пучка с носителем в особенностях его рефлексивной оболочки

В этом параграфе мы докажем второй основной результат статьи — теорему 4, о том, что существуют такие пучки $E$ с особенностями, содержащимся в особенностях их рефлексивной оболочки $E^{\vee\vee}$, такие, что при общих плоских деформациях пучков $E$ их особенности не удерживаются в особенностях их рефлексивных оболочек.

Пусть $F$ — рефлексивный пучок ранга 2 на $X = \mathbb{A}^3$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с особенностью в точке $x_0 \in X$. Поскольку рассматриваемый нами вопрос локален по $X$, то, как и в главе 1, мы можем считать, что $x_0 \in X$ — единственная особенность нашего пучка $F$.

**Замечание 2.** *Напомним, что* ***носителем когерентного пучка*** *$G$ на $X$ называется замкнутое (см. [5, Ch.2 Ex.5.6]) множество*

$$\mathrm{Supp}(G) = \{x \in X \mid G_x \neq 0\}.$$

**Определение 3.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ — когерентный пучок на $X$, $f\colon X \to Y$ — морфизм схем. Будем говорить, что $\boldsymbol{E}$ —* ***плоский над $Y$ в точке*** *$x \in X$, слой $\boldsymbol{E}_x$ является плоским $\mathcal{O}_{f(x),Y}$-модулем, где на $\boldsymbol{E}_x$ задана структура $\mathcal{O}_{f(x),Y}$-модуля с помощью морфизма $f^{\#}\colon \mathcal{O}_{f(x),Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$. Если пучок $\boldsymbol{E}$ плоский над $Y$ во всех точках $x \in X$, то он называется* ***плоским над*** *$Y$.*

**Определение 4.** *Пусть $E$ — пучок без кручения с нульмерными особенностями на $X$. Множество*

$$\mathrm{Sing}^{ess}(E) := \mathrm{Supp}(E^{\vee\vee}/E)$$

*называется* ***множеством существенных особенностей*** *пучка $E$.*

**Определение 5.** *Предположим, что носитель когерентного пучка $Q$ на нётеровой схеме $X$ состоит из конечного числа замкнутых точек. Будем называть такой пучок $Q$* ***нульмерным****. На нётеровой схеме нульмерный пучок является* ***артиновым****, т.е. любая его фильтрация когерентными подпучками конечна, и наоборот, всякий артинов пучок на нётеровой схеме нульмерен.* ***Длиной артинова пучка*** *$Q$ будем называть длину $\ell(Q)$ его максимальной фильтрации когерентными подпучками. Покроем нётерову схему $X$ открытыми окрестностями $U_i$ так, чтобы каждая содержала ровно одну замкнутую точку носителя артинова пучка $Q$. Тогда:*

$$\ell(Q) := \sum_i \ell(\Gamma(U_i, Q)).$$

Мы построим такое плоское семейство подпучков $\boldsymbol{E} := \{E_t\}_{t \in C}$ с базой $C$ (то есть $\boldsymbol{E}$ — подпучок пучка $F \boxtimes \mathcal{O}_C$), что $E_t \hookrightarrow F$, причем фактор-пучки $Q_t := F/E_t$ являются артиновыми, и выполнены следующие условия

$$x_0 \notin \mathrm{Supp}(Q_t), \text{ при } t \neq 0, \tag{12}$$

$$x_0 \in \mathrm{Supp}(Q_0). \tag{13}$$

Мы будем строить плоское семейство $\boldsymbol{E}$ для открытого подмножества $C \subset \mathbb{A}^1$, которое выберем ниже. Плоский над $C$ пучок $\boldsymbol{E} = \{E_t\}_{t \in C}$ иногда будем называть *плоским семейством над $C$*.

Пусть $x_1, \dots, x_n \in X = \mathbb{A}^3$ — различные точки, отличные от $x_0$, $\ell_i = \langle x_0, x_i \rangle$ — прямые. Обозначим $x_i(t) = (1-t)x_0 + tx_i$. Рассмотрим морфизм

$$\psi\colon \ell_i \to Y := X \times \mathbb{A}^1, \quad t \mapsto (x_i(t), t).$$

Обозначим

$$X_t := X \times \{t\} \subset Y, \quad t \in \mathbb{A}^1.$$

Отождествим пучок $\mathcal{O}_{\ell_i}$ с пучком $\psi_*(\mathcal{O}_{\ell_i})$ на $Y$. Таким образом, на $Y$ задан когерентный пучок

$$\boldsymbol{Q} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\ell_i}. \tag{14}$$

Обозначим

$$Q_t := \boldsymbol{Q}\big|_{X_t} = \oplus_{i=1}^{n} \Bbbk_{(x_i(t),t)}. \tag{15}$$

Пусть $F$ — рефлексивный пучок ранга 2 на $X$. Положим

$$\boldsymbol{F} := F \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}. \tag{16}$$

Заметим, что для любого $t \in \mathbb{A}^1$ пучок $Q_t$ является артиновым, причем его длина $\ell(Q_t) = n$ не зависит от $t$, поэтому он плоский над $\mathbb{A}^1$. Кроме того, пучок $\boldsymbol{F}$ — плоский над $\mathbb{A}^1$ (см. [5, Ch. 3, Prop. 9.2]).

**Лемма 2.** *Существует морфизм*

$$\boldsymbol{F} \xrightarrow{s} \boldsymbol{Q} \tag{17}$$

*такой, что*

(a) *при ограничении на некоторую открытую окрестность $V \subset X \times C^*$, где $C^*$ — подходящее открытое подмножество в $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$, для которой морфизм $s|_V$ является эпиморфизмом*

$$s\big|_V\colon \boldsymbol{F}\big|_V \twoheadrightarrow \boldsymbol{Q}\big|_V, \tag{18}$$

(b) *носитель коядра морфизма $s$ содержится в конечном числе точек, включая, возможно, точку $(x_0, 0)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X \times \{t\} \arrow[r, equal] & X_t \arrow[r, hook, "j_t"] \arrow[d, "p_t"'] & Y \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_2"] & X \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "p_2"] \\
 & t \arrow[r, hook, "g_t"] & \mathbb{A}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

Поскольку морфизм $p_2$ — плоский и пучки $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{Q}$ плоские над $\mathbb{A}^1$ определен морфизм замены базы (см [7, p. 104]):

$$\varphi\colon g_t^* \mathcal{E}xt^0_{p_2}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}) \to \mathcal{E}xt^0_{p_t}(j_t^* \boldsymbol{F}, j_t^* \boldsymbol{Q}). \tag{19}$$

При $t \neq 0$ по построению $\mathrm{Supp} Q_t \cap x_0 = \varnothing$, пучок $F$ локально свободен в точках над носителем $Q_t$ и имеет ранг 2. Отсюда имеем

$$\mathcal{E}xt^0_{p_t}(j_t^* \boldsymbol{F}, j_t^* \boldsymbol{Q}) = \mathrm{Hom}(F_t, \oplus_{i=1}^{n} \Bbbk_{x_i(t)}) = \Bbbk^{2n}, \tag{20}$$

где

$$F_t := \boldsymbol{F}\big|_{X_t} = j_t^*\boldsymbol{F}. \tag{21}$$

Таким образом, при $t \neq 0$, по (19) и (20) определен морфизм замены базы $\xi\colon g_t^*\mathcal{E}xt_p^0(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q}) \to \Bbbk^{2n}$. Покажем, что $\xi$ — изоморфизм. Для этого достаточно доказать, что морфизм $\varphi$ из (19) является изоморфизмом. Для этого, согласно [7, Th. 1.4], нам достаточно проверить, что $\mathrm{Ext}^1(F_t, Q_t) = 0$. Действительно, поскольку $F_t$ локально свободен при $t \neq 0$, то $\mathrm{Ext}^1(F_t, Q_t) = \mathrm{H}^1(\mathcal{H}om(F_t, Q_t))$ ввиду [5, III, Prop 6.3(c)], что равно нулю, так как $\mathcal{H}om(F_t, Q_t)$ — нульмерный пучок.

Таким образом, $g_t^*\mathcal{E}xt_{p_2}^0(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q}) = \Bbbk^{2n}$ при $t \neq 0$, а значит, $\mathcal{E}xt_{p_2}^0(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q})\big|_{\mathbb{A}^1\setminus\{0\}}$ — локально свободный пучок ранга $2n$ в силу [5, II, Ex. 5.8(c)].

Возьмем произвольное $\hat{t} \neq 0$. Пусть $s_{\hat{t}} \in \mathrm{H}^0(g_{\hat{t}}^*\mathcal{E}xt_p^0(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q}))$ — ограничение на $X_{\hat{t}}$ общего сечения $s \in \mathrm{H}^0(\mathcal{H}om(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q}))$. Поскольку $F$ локально свободен над $U\setminus\{x_0\}$, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F|_{x_i(\hat{t})} \arrow[r, equal] & \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \Bbbk^2_{x_i(\hat{t})} \arrow[d, "\alpha"] \\
F_{\hat{t}} \arrow[u, two heads] \arrow[r, "s_{\hat{t}}"] & Q_t
\end{tikzcd}$$

Ввиду (15) можем считать, что $\alpha$ — эпиморфизм, а значит, $s_{\hat{t}}$ — также эпиморфизм. Тогда, поскольку морфизм замены базы (19) — изоморфизм, по теореме о замене базы ([7, Th. 1.4.]) отображение $\chi\colon \mathcal{E}xt_p^0(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q}) \to \mathrm{Hom}(F_{\hat{t}}, \oplus_{i=1}^n \Bbbk_{x_i(\hat{t})})$ — сюрьекция над некоторой открытой окрестностью

$$C^* \subset \mathbb{A}^1\setminus\{0\} \tag{22}$$

точки $\hat{t}$. Тем самым, морфизм $s_{\hat{t}}$ можно продолжить до морфизма $s\colon \boldsymbol{F}|_V \to \boldsymbol{Q}|_V$ где $V \subset X \times C^*$ — подходящая открытая окрестность в $X \times C^*$, где выполняется условие (18).

Остается проверить условие (b) леммы. Заметим, что все точки носителя $\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\ s)$ имеют вид $(x,t)$, где $t \in \mathbb{A}^1\setminus C^*$. Кроме того, вне точек $(x_i(t), t) \in Y$ пучок $\boldsymbol{Q}$ равен нулю. Таким образом, носитель $\mathrm{coker} s$ лежит в конечном множестве

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\ s) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{t\in\mathbb{A}^1\setminus C^*} (x_i(t), t). \tag{23}$$

$\square$

**Теорема 4.** *Пусть $n$ — наперед заданное натуральное число, $\boldsymbol{Q} \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\ell_i}$ — когерентный пучок на $Y = X \times \mathbb{A}^1$, определенный в (14), $F$ — рефлексивный пучок ранга 2 на $X$, $\boldsymbol{F} = F \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$, морфизм $s\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{Q}$ и открытое подмножество $C^*$ в $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ определены в лемме 2, и $C = C^* \cup \{0\}$. Положим $\widetilde{\boldsymbol{Q}} := \mathrm{im}\ s$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

*(i) $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ — плоский над $C$ пучок. Тем самым, существует плоское над $C$ семейство подпучков $\boldsymbol{E} := \ker(\boldsymbol{F} \overset{\widetilde{s}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{\boldsymbol{Q}}) = \{E_t\}_{t\in C}$ пучка $F$, где морфизм $\widetilde{s}\colon \boldsymbol{F} \to \widetilde{\boldsymbol{Q}}$ определен условием, что композиция $\boldsymbol{F} \overset{\widetilde{s}}{\to} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \boldsymbol{Q}$ совпадает с $s$.*

*(ii)* *Множество существенных особенностей пучка $E = E_0$ совпадает с точкой $\{x_0\} = \mathrm{Sing}(F)$*

$$\mathrm{Sing}^{ess}(E_0) = \mathrm{Sing}(F),$$

*и $\ell(F/E) = \ell(Q_0) = n$.*

*(iii)* *Для любого $t \in C^*$ множество существенных особенностей пучка $E_t$ имеет вид $\mathrm{Sing}^{ess}(E_t) = \cup_{i=1}^{n} x_i(t)$, так что*

$$\mathrm{Sing}^{ess}(E_t) \cap \mathrm{Sing}(F) = \varnothing,$$

*и $\ell(E_t) = n$.*

*Доказательство.* (i) Обозначим $\varkappa = \mathrm{coker}\, s$. Из формулы (23) следует, что пучок $\varkappa$ либо имеет носитель в точке $(x_0, 0)$ и тогда $\varkappa$ — артинов, либо $\varkappa = 0$. Второй случай тривиален, поэтому считаем, что $\varkappa \neq 0$. Пучок $\varkappa$ как артинов пучок имеет конечную фильтрацию подпучками $\varkappa_i$

$$0 \hookrightarrow \varkappa_r \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \varkappa_2 \hookrightarrow \varkappa_1 \hookrightarrow \varkappa_0 = \varkappa,$$

такими, что $\tau_i := \varkappa_i/\varkappa_{i+1}$ является $\mathcal{O}_{X_0}$ – пучком, где $X_0 = X \times \{0\} \subset X \times C$. Эта фильтрация строится следующим образом. Полагает $\tau_0 := \varkappa_0|_{X_0}$ и определяем пучки $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ индукционно по формуле

$$0 \longrightarrow \varkappa_{i+1} := \ker r_i \longrightarrow \varkappa_i \xrightarrow{r_i := \otimes \Bbbk_0} \tau_i \longrightarrow 0\ .$$

Положим $\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{Q}$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & \varkappa_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\boldsymbol{Q}} := \ker \eta_0 \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{Q}_0 \arrow[r, "\eta_0"] \arrow[d, equal] & \varkappa_0 \arrow[r] \arrow[d, "r_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \boldsymbol{Q}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_1"] & \boldsymbol{Q}_0 \arrow[r, "\varepsilon_1"] & \tau_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \varkappa_1 \arrow[d] & & 0 & \\
& 0, & & &
\end{tikzcd} \tag{24}$$

где $\varepsilon_1 = r_0 \colon \eta_0$, $\boldsymbol{Q}_1 := \ker \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 := r_1 \colon \eta_1$, где $\eta_1$ определено в диаграмме (24). Будем далее рекурсивно полагать $\varepsilon_1 := r_{i-1} \circ \eta_{i-1}$, $\boldsymbol{Q}_i := \ker \varepsilon_i$, где $\eta_i$ для $i \geq 2$ определяется из диаграммы (24), в которой индексы у пучков и морфизмов сдвинуты на $i - 1$. В частности, эта диаграмма для каждого $i$ дает точную тройку $\mathcal{O}_{X \times C}$-пучков

$$0 \to \boldsymbol{Q}_{i+1} \to \boldsymbol{Q}_i \to \tau_i \to 0. \tag{25}$$

Покажем, что если $\boldsymbol{Q}_i$ — плоский над $C$, то $\boldsymbol{Q}_{i+1}$ — плоский над $C$. Применяя к (25) функтор $-\otimes_{\mathcal{O}_{X\times C}}\mathcal{O}_{X_0}$, получаем

$$0\to\mathcal{T}or_1(\tau_i,\mathcal{O}_{X_0})\to\boldsymbol{Q}_{i+1}\otimes\mathcal{O}_{X_0}\to\boldsymbol{Q}_i\otimes\mathcal{O}_{X_0}\to\tau_i\to 0, \tag{26}$$

поскольку $\mathcal{T}or_1(\boldsymbol{Q}_i,\mathcal{O}_{X_0})=0$ для плоского над $C$ пучка $\boldsymbol{Q}_i$.

**Лемма 3.** *Справедливо равенство $\ell(\mathcal{T}or_1(\tau_i,\mathcal{O}_{X_0}))=\ell(\tau_i)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим следующую точную тройку, где $\Bbbk_0$ — поле вычетов точки $0\in C$:

$$0\to\mathcal{O}_C\xrightarrow{\cdot t}\mathcal{O}_C\to\Bbbk_0\to 0. \tag{27}$$

Так как $p_2\colon X\times C\to C$ — плоский морфизм, то после применения $p_2^*$ к (27) получим точную тройку

$$0\to\mathcal{O}_{X\times C}\xrightarrow{\cdot X_0}\mathcal{O}_{X\times C}\to\mathcal{O}_{X_0}\to 0. \tag{28}$$

Применеяя функтор $-\otimes_{\mathcal{O}_{X\times C}}\tau_i$ к (28) и учитывая изоморфизмы $\tau_i=\mathcal{O}_{X\times C}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times C}}\tau_i$, $\mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{X\times C},\tau_i)=0$, получаем точную последовательность

$$0\to\mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{X\times C},\tau_i)\to\tau_i\xrightarrow{0}\tau_i\to\tau_i\to 0,$$

откуда следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 3 и (26) получаем

$$\ell(\boldsymbol{Q}_{i+1}|_{X_0})=\ell(\boldsymbol{Q}_i|_{X_0})=n. \tag{29}$$

С другой стороны, так как $\tau_i$ — $\mathcal{O}_{X_0}$-пучок, то из (25) следует, что $\boldsymbol{Q}_{i+1}|_{X\times C^*}=\boldsymbol{Q}_i|_{X\times C^*}$. Тем самым:

$$\ell(\boldsymbol{Q}_{i+1}|_{X_t})=\ell(\boldsymbol{Q}_i|_{X_t})=n, t\in C^*. \tag{30}$$

Так как длина артинова пучка есть его многочлен Гильберта, то из (29), (30) и [5, III, Th. 9.9], заключаем, что $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ — плоский над $C$. Утверждение (i) теоремы доказано.

Таким образом, имеем эпиморфизм плоских над $C$ пучков $\widetilde{s}\colon\boldsymbol{F}\to\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ и диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{F} \arrow[d, "\widetilde{s}"'] \arrow[dr, "s"] & & & \\ 0 \arrow[r] & \widetilde{\boldsymbol{Q}} \arrow[r] & \boldsymbol{Q} \arrow[r, "\eta_0"] & \varkappa \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Так как $\widetilde{s}$ — эпиморфизм, $\boldsymbol{E}:=\ker\widetilde{s}$ — плоский над $C$ подпучок пучка $\boldsymbol{F}$. Поскольку в окрестности точки $x_0$ имеем $\mathrm{Supp}(\widetilde{Q}_t)=\mathrm{Supp}(Q_t)=\mathrm{Supp}(\oplus_{i=1}^n\Bbbk_{x_i(t)})=\cup_{i=1}^n\{x_i(t)\}$, где $\widetilde{Q}_t:=\widetilde{\boldsymbol{Q}}\big|_{X_t}$, то условия (12) и (13) (они же утверждения (ii) и (iii) основной теоремы) выполнены. Таким образом, $\boldsymbol{E}$ — искомое плоское над $C$ семейство подпучков пучка $F$. $\square$

**Замечание 4.** *Теорема 4 непосредственно переносится на случай, когда основное поле $\Bbbk$ есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а $X$ есть любое гладкое (в частности, проективное) трехмерное многообразие, рассматриваемое как комплексное многообразие. В этом случае:*

*а) в качестве пучка $F$ можно брать по-прежнему пучок $F$ с нульмерной особенностью $x_0$*

*на $X$, и произвольной комплексно-аналитической картой $U \subset X$, в которой выбраны точки $x_1, \dots, x_n$, ростки прямых $\ell_i \subset U$ задаются теми же уравнениями $x_i(t) = (1-t)x_0 + tx_i$, что и ранее, а $t$ пробегает подходящую открытую аналитическую кривую $\widetilde{C} \subset \mathbb{C}$;*

*b) $\boldsymbol{Q} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\ell_i}$ — когерентный пучок на $Y = X \times \widetilde{C}$, $F$ — рефлексивный пучок ранга 2 на $X$, морфизм $s\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{Q}$ и открытое подмножество $C^*$ в $\widetilde{C} \setminus \{0\}$ определены в лемме 2, $C = C^* \cup \{0\}$, и $\widetilde{\boldsymbol{Q}} := \operatorname{im} s$.*

*Тогда все утверждения теоремы 4 верны для комплексно-аналитического семейства пучков $\boldsymbol{E}$ с базой $C$, которое строится в пункте (i) этой теоремы.*

*В доказательстве леммы 2 в утверждениях о замене базы вместо [7] используется их комплексно-аналитический вариант, изложенный в [4].*

**Замечание 5.** *В доказательстве теоремы 4 мы фактически пользовались не рефлексивностью пучка $F$ на $X$, содержащего пучок $E$ с нульмерным фактором $F/E$, а тем, что $F$ — пучок без кручения с нульмерными особенностями, содержащий подпучок $E$, особенности которого содежатся в особенностях $F$. Тем самым, теорема 4 справедлива для произвольного когерентного пучка $F$ без кручения с нульмерным множеством особенностей.*

# Список литературы


[1] I. V. Artamkin. Deforming Torsion-free Sheaves on an Algebraic Surface. Math. USSR Izvestiya, Vol.36 (1991), No. 3, 449-483.

[2] E. Ballico, J. A. Wisniewski. On Bănică sheaves and Fano manifolds. Compositio Mathematica, tome 102, no 3 (1996), 313-335.

[3] C. Bănică. Smooth reflexive sheaves. Revue Romaine Math. Pures Appl. 63 (1991) 571-573.

[4] C. Bănică, M. Putinar, G. Schumacher. Variation der Globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Räume. Math. Ann., **250** (1980), 135-155.

[5] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Springer, New York (1997).

[6] R. Hartshorne. Stable Reflexive Sheaves. Math. Ann. **254** (1980), 121-176.

[7] H. Lange. Universial Families of Extensions. Journal of Algebra **83**, (1983) 101-112

[8] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler. Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Second Edition, Birkhäuser, 2010.



Ланских Ирина Юрьевна
Факультет математики,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Усачева ул., 6, Москва 119048
iyulanskikh@edu.hse.ru