УДК 514.9

О проблеме вхождения в некоторых классах групп Артина

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)

Российская таможенная академия.

Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)

МТУСИ

А.С. Угаров

ТГПУ

On the occurrence problem in some classes groups Artin

V.N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)

Russian Customs Academy.

N. B. Bezverhnaya (Russia, Moscow)

MTUCI

e-mail: vnbezv@rambler.ru

A.S. Ugarov

TGPU

e-mail: ugarandrey@gmail.com

Аннотация. Основным результатом статьи является положительное решение проблемы вхождения в группах Артина с древесной структурой.

Библиография: 20 названий.

Abstract. In this article, the occurrence problem in Artin groups with arboreal structure is solved

Literature: 20 names.

Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ – конечное множество, $M = \{m_{ij}\}$, $i, j \in I$, где $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, симметрическая матрица Коксетера; $m_{ii} = 1$ для любого $i \in I$, $m_{ij} = m_{ji}$ при $i \neq j$, $i, j \in I$; $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, n, \ldots, \infty\}$

Рассмотрим конечный граф Γ, между вершинами которого v_i и элементами множества σ установлено взаимно однозначное соответствие; причем, если две вершины v_i, v_j связаны ребром, то данному ребру соответствует элемент $m_{ij} \in M$; если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то данной паре соответствует элемент $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Коксетера.

С графом Коксетера связана группа Артина G_Γ с системой образующих $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ и системой определяющих соотношений: $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}$ при $i \neq j$, где $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \ldots$, слово длины m_{ij} из чередующихся образующих σ_i, σ_j.

Запишем копредставление группы G_Γ:

$$G_\Gamma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n; \ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \ i \neq j, \ i, j \in I \rangle. \tag{1}$$

Рассмотрим в G_Γ нормальный делитель, порожденный множеством σ_i^2, $i \in I$, $N = \langle \sigma_i^2, i = \overline{1, n} \rangle^{G_\Gamma}$. Тогда группа $\overline{G_\Gamma} = G_\Gamma / N$ есть группа Коксетера, соответствующая группе G_Γ. Если группа $\overline{G_\Gamma}$ конечная, то группу Артина называют группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос β_{n+1}, определенных Э.Артиным и доказавшего разрешимость проблемы равенства слов в β_{n+1}.

Алгебраическая теория групп кос была построена А.А.Марковым [1], давшим новое доказательство проблемы равенства в группах β_{n+1}.

Проблема сопряженности слов в β_{n+1} была решена Ф.А.Гарсайдом в 1969г. [2]. Э.Брискорн и К.Сайто, используя идеи Ф.А.Гарсайда, решили проблему равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [3].

В. Н. Безверхний доказал неразрешимость проблемы вхождения в неприводимых группах Артина конечного типа. [4].

П.Шупп и К.Аппель определили широкий класс групп Артина (Коксетера) большого типа ($m_{ij} \geqslant 3$) и экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$). Для групп Артина экстрабольшого типа, используя диаграмный метод, ими были решены проблемы равенства и сопряженности слов [5].

Для групп Артина большого типа К.Аппель [6] и В.Н.Безверхний [7] независимо решили проблему равенства и сопряженности слов, а также в данном классе групп В.Н. Безверхним решена проблема обобщенной сопряженности слов. [8].

В [9] автором введено понятие группы Артина (Коксетера) с древесной структурой.

Определение 1. Группа Артина (Коксетера) называется группой Артина (Коксетера) с древесной структурой, если граф Γ, соответствующий данной группе, является дерево-графом.

Элементы матрицы Коксетера, соответствующей группе Артина (Коксетера) с древесной структурой m_{ij}, могут принимать любые значения из множества $\{2, 3, \ldots, , \infty\}$.

Теорема 1 [10]. В группах Артина G_Γ с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Автором в [11] было определено понятие группы Артина (Коксетера) с m-угольной структурой.

Определение 2 [11]. Группа Артина (Коксетера) G_Γ называется группой с m-угольной структурой, если ее граф Γ состоит из m-угольников.

Элементы матрицы Коксетера m_{ij}, соответствующей данной группе, принадлежат множеству $\{2, 3, \ldots, , \infty\}$.

Теорема 2 [12]. Пусть G_Γ – группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$; тогда в группе G_Γ разрешима проблема равенства и сопряженности слов.

Основным результатом данной статьи является решение проблемы вхождения в конечнопорожденных группах Артина с древесной структурой.

Рассмотрим основные понятия и теоремы, которые будут использованы при решении указанной проблемы.

Определение 3. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$, установить, принадлежит ли w подгруппе H.

Определение 4. В группе G разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G выписать образующие их пересечения.

Определение 5. В группе G разрешима проблема пересечения смешанных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G и любого элемента $w \in G$ установить пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.

Теорема 3 [14]. Пусть $G = G_1 * G_2$ – свободное произведение групп G_1, G_2, в каждой из которых пересечение конечнопорожденных подгрупп есть конечнопорожденная подгруппа. Тогда, если:

1) существует алгоритм, выписывающий для любых двух конечнопорожденных подгрупп группы G_i, $i = \overline{1, 2}$, образующие их пересечения;

2) существует алгоритм, позволяющий для любого $w \in G_i$, $i = \overline{1, 2}$, и любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить пусто или не пусто множество $wH_1 \cap H_2$,

то в группе G разрешимы проблемы (1), (2).

Теорема 4 [17]. В группе G, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп F_m, F_n, объединенных по циклическим подгруппам

$$G = \langle F_m * F_n; \quad w = v \rangle, \qquad w \in F_m, v \in F_n \tag{2}$$

разрешима проблема вхождения.

Основным понятием, используемым в статье, является понятие специального множества слов в свободном произведении групп с объединением и в HNN-разрешении групп.

Пусть

$$G = \langle A_1 * A_2;\ \mathrm{rel}\, A_1, \mathrm{rel}\, A_2, \varphi(U_1) = U_2 \rangle \tag{3}$$

свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1$, $U_2 < A_2$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма φ.

Известно, что каждый элемент $g \in G$ можно единственным образом представить в виде

$$g = l_{1g} l_{2g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} r_{n-1g} \dots r_{1g}, \tag{4}$$

где r_{ig}, l_{ig}^{-1} – представители правых смешанных классов группы A_1 по U_1 и A_2 по U_2, причем $r_{ig} r_{i+ig}$ (аналогично $l_{ig} l_{i+1g}$) принадлежат разным сомножителям G, K_g - ядро слова g. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям. В первом случае $l(g) = 2n + 1$ – обозначает слоговую длину g, во втором случае –

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{5}$$

где $h = K_g$, $l(g) = 2n$. Если в слове (4) $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1} \dots r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} \dots r_{1g} \tag{6}$$

называется трансформой. Слова вида (4), (5) называются нетрансформами; причем слово вида (4) нетрансформой нечетной длины, а слово вида (5) – нетрансформой четной длины. Подслово $l_{1g} \dots l_{ng}$ называется левой половиной, $r_{ng} \dots r_{1g}$ – правой половиной слов (4), (5).

Рассмотрим конечное множество $W = \{w_1 | i = \overline{1, n}\}$ слов группы G, каждое из которых приведено к виду (4), (5), (6).

Определение 6. Левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$ называется изолированной в множестве W, если не существует слова w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, из множества

$\{W \setminus \{w_i\}\}$, у которого можно выделить $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}(r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова [17], [19].

Определение 7 [13]. Назовем конечное множество слов $W = \{w_1 | i = \overline{1,n}\}$ группы G специальным, если оно удовлетворяет условиям:

1) левые половины нетрансформ из W изолированы в нем; у нетрансформ четной длины изолированы левая и правая половины;

2) длину нетрансформ $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово из подгруппы, порожденной множеством $W \setminus \{w_i\}$; длину произвольного слова $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово v, $l(v) < l(w_i)$, принадлежащее подгруппе $\langle W \rangle$;

3) если $w_0^{\epsilon} = l_{1w_0} \dots l_{sw_0} K_{w_0} r_{sw_0} \dots r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $\epsilon = \pm 1$, $j < s$, w_0 – нетрансформа из W и подгруппа $B = \langle W \rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, где

$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad r_{jw_0} \in A_2 \\ A_2, & \text{если} \quad r_{jw_0} \in A_1 \end{cases}$$

не является единичной, то $l(w_0 u w_{\alpha}^{-1}) > l(w_0)$ для любого $u \in B$ и любой нетрансформы $w_{\alpha} \in \{W \setminus \{w_0\}\}$, правая половина которой оканчивается подсловом $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$;

4) для слов w_i^{ϵ}, w_j^{η}, $\epsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$,

$$w_i^{\epsilon} = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots K_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{1w_i},$$
$$w_j^{\eta} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{1w_s},$$

где $w_i, w_j \in W$, $s \le m \le p$, не существует слова $g \ne 1$, слоговой длины $l(g) < 2s$, $g \in \langle W \rangle$ такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \ne l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{pw_i} K'_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{1w_i}.$$

Пусть $W = \{w_i | i = \overline{1,N}\}$ – специальное множество слов. Разобьем его на подмножества нетрансформ M_0 и множества M_i, $i = 1, k$ трансформ с одинаковыми крыльями, с ядрами содержащихся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из A_1 или из A_2. Каждое из M_i подмножеств порождает подгруппу, которую для краткости будем обозначать (M_i), вместо обычно принятого $gp(M_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$:

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{si}^{-1} A'_i r_{si} \dots r_{1i},$$

здесь A'_1 – подгруппа из A_1 или из A_2, порожденная ядрами всех трансформ множества M_i.

Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочим по длинам их трансформ. Упорядоченный ряд будем обозначать:

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_k). \tag{7}$$

Лемма 1 [17], [19]. Ряд (7) можно преобразовать в ряд

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \ldots \leq (M'_k) \tag{8}$$

со следующими свойствами:

1) $qp(M_0, (M_1), \ldots, (M_k)) = qp(M_0, (M'_1), \ldots, (M'_{k'}))$;

2) если подгруппа $(M'_{j'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} A'_{j'} r_{sx} \ldots r_{1x}$, $1 \leq j' \leq k'$, ряда (8) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} h r_{sx} \ldots r_{1x}$, где h принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (8) имеется подгруппа

$$(M'_i) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s-1x}^{-1} A'_i r_{s-1x} \ldots r_{1x},$$

содержащая u;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} K r_{sx} \ldots r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} A'_j r_{sx} \ldots r_{1x}$, и нетрансформы $y = l_{1y} \ldots l_{s_1 y} K_y r_{s_1 y} \ldots r_{1y}$, $s_1 \geq s$, (левая половина y изолирована) из множества M_0, выполняется соотношение $l(y^{-\epsilon} u y^{\epsilon}) \leq l(y)$, то существует подгруппа (M'_p) ряда (8), содержащая трансформу $y^{-\epsilon} u y^{\epsilon}$; если $l(y^{\epsilon} u y^{-\epsilon}) < l(y)$, $\epsilon = \pm 1$, где $l(y) = 2s_1 + 1$, либо $l(y) = 2s_1$, то существует подгруппа (M'_p) ряда (8), содержащая тарнсформу $y^{\epsilon} u y^{-\epsilon}$.

4) если

$$(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} A'_j r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$$
$$(M'_q) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A'_q r_{s_1+1,y} r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$$

подгруппы ряда (8) и подгруппа (M'_j) содержат трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} h r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$ либо трансформу $u' = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} K r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то подгруппа (M'_q) содержит трансформы u и u';

5) если $(M'_p) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} A'_p r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$ подгруппа ряда (8) и $y = l_{1y} \ldots l_{s_2 y} K r_{s_2 y} \ldots r_{s_1+1,y} r_{s_1 x} \ldots r_1$ элемент из специального множества $W \cup W^{-1}$, подслово $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы w^{η}, $\eta \pm 1$, если подгруппа (M'_p) содержит трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} h r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, либо трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1}^{-1} K r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то в ряде (8) содержится подгруппа $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A_j r_{s_1+1,y} \ldots r_{1x}$, содержащая эти трансформы.

Лемма 2 [17]. Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.

Лемма 3 [17], [19]. Пусть $w_j = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1} l_{k+1j} \ldots l_{sj} K_j r_{sj} \ldots r_{1j}$ – слово из специального множества W, где $v_j^{-1} = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1}$ не изолировано в специальном множестве W, тогда, если

$v_j^{-1}Dv_j \cap qp(M_0, S) \neq E$ (E – единичная подгруппа), где

$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad l_{kj} \in A_2 \\ A_2, & \text{если} \quad l_{kj} \in A_1 \end{cases},$$

то существует подгруппа $(M_i) = v_j^{-1}Dv_j$, принадлежащая ряду (8); $qp(M_0, S)$ – подгруппа, порожденная множеством M_0 и подгруппами (M_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ ряда (8).

Определение 8 [17], [19]. Произведение $u_1u_2\ldots u_k$ назовем словом подгруппы $qp(M_0, S)$ группы G, если

1) $u_i \neq 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$;

2) $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо принадлежит некоторой подгруппе ряда (8) для любого $i = 1, 2, \ldots, k$;

3) $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$;

4) u_i, u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (8) для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$;

5) в произведении $u_1u_2\ldots u_k$ не содержится произведение $u_iu_{i+1}u_{i+2}$, для которого выполняются условия: $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$, $u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M_s)$ для любого $i = 1, 2\ldots, k-2$; $(M_j), (M_s)$ подгруппы ряда (8).

Сомножители u_i назовем u-символами.

Определение 9. [17], [19] Будем говорить, что между словами v_1, v_2 группы G имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 больше, равна или меньше максимальной из длин $l(v_1)$, $l(v_2)$.

Определение 10. [17], [19] Слово $u_1u_2\ldots u_k$ подгруппы $qp(M_0, S)$ является простым, если $l(u_1\ldots u_k) = \max\{l(u_1), \ldots, l(u_k)\}$.

В [10] доказывается, что всякое слово подгруппы $qp(M_0, S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание 1-го рода, а также, если в слове $u_1u_2\ldots u_k \in qp(M_0, S)$ выполнить сокращения в группе G, то сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину u_1.

Теорема 4. [17], [19] Пусть группа $G\langle A_1 * A_2; \operatorname{rel} A_1, \operatorname{rel} A_2, \varphi(U_1) = U_2\rangle$, свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1, U_2 < A_2$, с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма φ, $\varphi(U_1) = U_2$, $\operatorname{rel} A_i$ определяющие соотношения A_i, $i = 1, 2$. Тогда, если подгруппа U_i, $i = 1, 2$, обладает свойством максимальности в сомножителе A_i, $i = 1, 2$, и

1) в сомножителях A_i разрешима проблема вхождения;

2) существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in A_i, i = 1, 2$ и любой конечно

порожденной подгруппы $H < A_i$ определить пусто или не пусто пересечение $wH \cap U_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой любой конечно порожденной подгруппы $H < A_i$ с подгруппой U_i; то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество W группы G в специальное множество, порождающее подгруппу $\langle W \rangle$.

Лемма 4. В группе Артина $G_{ab} = \langle a, b;\ \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$, где $m_{ab} = 2k + 1$ разрешимы:

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с циклической подгруппой $\langle w \rangle < G_{ab}$;

3) существует алгоритм, позволяющий для любого $v \in G_{ab}$, любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ и любой циклической подгруппы $\langle w \rangle < G_{ab}$ установить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$.

Доказательство. По условию леммы группе G_{ab} соответствует число Коксетера $m_{ab} = 2k + 1$, тогда G_{ab} изоморфна группе

$$B = \langle x, y;\ x^{2k+1} = y^2 \rangle,$$

где изоморфизм определяется отображением: $f : a \to x^{k+1}y^{-1}$, $b \to yx^{-k}$. [7]

Из теоремы 2 следует, что в группе B, а следовательно, и в группе G_{ab}, разрешима проблема вхождения.

Покажем, что в группе G_{ab} разрешимы проблемы (2) и (3). Доказательства будем проводить для групп B.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы B, $\langle w \rangle < B$. Будем считать, что образующие H приведены к специальному множеству: $H = qp(M_0, S)$, где S – порождена подгруппами

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \tag{9}$$

Пусть w – циклически несократимо, $l(w) = 1$, тогда $w \in \langle x \rangle$ либо $w \in \langle y \rangle$. Допустим $w \in \langle x \rangle$, если $H \cap \langle x \rangle \neq E$ (E – единичная подгруппа), то ряд (9) содержит подгруппу (M), $(M) = H \cap \langle x \rangle$ (Лемма 3), и $H \cap \langle w \rangle = \langle M \rangle \cap \langle w \rangle$. Аналогично получаем, если $w \in \langle y \rangle$.

Пусть $\forall\, i$, $i = \overline{1, k}$, $(M_i) = E$, тогда H – свободная подгруппа, порожденная множеством M_0, (Лемма 2) и $H \cap \langle w \rangle = E$.

Пусть $l(w) \geq 2$, w – циклически несократимое слово в группе B, в противном случае, сопрягая одновременно w и H, добиваемся циклической несократимости w.

Рассмотрим в B подгруппу N, порожденную x^{2k+1}. Очевидно, что $N = \langle x^{2k+1}\rangle^B$, $N < B$. Рассмотрим группу $B_1 = B/N = \langle x, y;\, x^{2k+1}, y^2\rangle$. Пусть Θ – гомоморфизм B на B_1, $\Theta(B) = B_1$. Представим w в виде $w = h_0\tilde{w}$, где $\Theta(w) = \tilde{w}$, $h \in \langle x^{2k+1}\rangle$, и каждый образующий w_i подгруппы H запишем в виде $w_i = h_i\tilde{w}_i$, $i = \overline{1, N_1}$, $h_i \in \langle x^{2k+1}\rangle$, $\Theta(w) = \tilde{w}$, заметим, что множество $\{\tilde{w}|i = \overline{1, N_1}\} \setminus \{E\}$ является специальным множеством образующих подгруппы $\Theta(H)$ в группе $B_1 = \langle x, y;\, x^{2k+1}, y^2\rangle$, которая есть свободное произведение групп $\langle x; x^{2k+1}\rangle$, $\langle y; y^2\rangle$ с объединением по единичной подгруппе E.

Из теоремы 3 следует, что в группе B_1 разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, поэтому можно эффективно выписать образующие пересечения $\langle\tilde{w}\rangle\cap\Theta(H)$.

Пусть $\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is} = \tilde{w}^p$, тогда в группе B: $\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is} = x^{\alpha(2k+1)}\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is}$, $w^p = x^{\beta(2k+1)}\tilde{w}^p$.

Если $C(B) \cap H = E$, то $H \cap \langle w\rangle = \langle w^p\rangle$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$, где $C(B)$ – центр группы B.

Пусть $\alpha \neq \beta$ и $C(B) \cap H \neq E$, тогда (лемма 3) $C(B) \cap H = (M_1)$, где (M_1) – подгруппа ряда (9), $(M_1) = \langle x^{\alpha_0(2k+1)}\rangle$. Чтобы проверить $H \cap \langle w\rangle \neq E$, рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha_0(2k+1)})^m(x^{\alpha(2k+1)}\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is})^n = (x^{\beta(2k+1)})^n(\tilde{w}_p)^n. \tag{10}$$

Так как $\tilde{w}^p$ циклически несократимо, то и $\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is}$ – циклически несократимо, поэтому равенству (10) соответствует уравнение

$$\alpha_0 m + \alpha\, n = \beta\, n. \tag{11}$$

Решая это уравнение, определяем пересечение $H \cap \langle w\rangle$.

Рассмотрим проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой $\langle w\rangle$ в группе B. Пусть v – произвольное слово группы B, $v \notin H$. Выясним, пусто или не пусто пересечение $v\,H \cap \langle w\rangle$, то есть

$$v\, u_1u_2\ldots u_k = w^p, \tag{12}$$

где $u_1u_2\ldots u_k$ – слово подгруппы H, образующие которой приведены к специальному множеству, w – циклически несократимое слово.

Рассмотрим случай, когда $l(w) = 1$, пусть $w = x^{(2k+1)\alpha_0}x^s$, $0 \leq s < 2k + 1$.

Если $l(v) > 1$, то в этом случае эффективно определяется слово $u_1u_2\ldots u_k \in H$, максимально сокращающее длину v.

Построим алгоритм, выписывающий слово $u_1u_2\ldots u_k$ из H с указанным выше свойством.

Рассмотрим группу $G = \langle A_1 * A_2;\, \mathrm{rel}\, A_1,\, \mathrm{rel}\, A_2,\, \varphi(U_1) = U_2\rangle$, является свободным произведением групп A_1, A_2 с объединением; в G выполняются условия теоремы 3. Рассмотрим слово $v \in G$, $l(v) > 1$, v – циклически несократимо в G и пусть H, $H < G$, конечно порожденная подгруппа, образующие которой W приведены к специальному множеству; $H = qp(M_0, S)$, где M_0 – нетрансформы из W, S – подгруппа, порожденная подгруппами $\{(M_i),\, i = \overline{1,k}\}$:

1) Выделяем в v максимальное подслово g^{-1}, $v = v_1 K_0 g^{-1}$, где g – левая половина некоторого w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, $w_j^{\epsilon} \in \{W \cup W^{-1}\}$, пусть $K_0 \in A_i$, $i = 1, 2$;

2) Допустим, что g – левая половина трансформы подгруппы $(M_s) = g A_s' g^{-1}$, определяем пересечение $K_0 A_s' \cap U_i$; если $K_0 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то (M_s) содержит трансформу $g K_1 g^{-1}$, с помощью которой сокращаем v;

3) Пусть $K_0 A_s' \cap U_i = \varnothing$ и g является неизолированной левой половиной нетрансформы $g K_2 g' \in M_0$ и пусть подгруппа $(M_s) = g A_s' g^{-1} \in \{(M_i,\, i = \overline{1,k}\}$. Определяем пересечение: $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i$. Если $K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i \neq \varnothing$, то в этом случае длину v умножением справа на слово $g K_1 g^{-1} g K_2 g^1$ можно уменьшить;

4) Пусть $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = \varnothing$. Допустим, что g является изолированной левой половиной нетрансформы $u \in M_0$. Если u – нетрансформа четной длины, то $l(vu) < l(v)$; пусть $u = g K_1 g'$ – нетрансформа нечетной длины и пусть существует подгруппа $(M_s) = (g')^{-1} A_s' g' \in \{(M_i),\, i = \overline{1,k}\}$. Рассматриваем пересечение $K_0 K_1 A_s' \cap U_i$. Если $K_0 K_1 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то производим сокращение слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot (g')^{-1} K_2 g'$.

5) Пусть $K_0 K_1 A_s' = \varnothing$ и M_0 содержит нетрансформу $(g')^{-1} K_3 g''$. Рассматриваем пересечение $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = K_0 K_1 K_3 (K_3^{-1} A_s' K_3) \cap U_i$. Если пересечение не пусто, то производим сокращение длины слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot (g')^{-1} K_2 g' \cdot (g')^{-1} K_3 g''$.

6) Пусть $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = \varnothing$. Тогда в слове $v = v_1 K_0 g^{-1}$ подслово $K_0 g^{-1}$ с помощью преобразования (2) либо (4) преобразуем, если это возможно, в подслово правой половины либо в правую половину некоторого w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, $w_j \in W$. Если преобразование (6) не удается выполнить, то слово $u_1 u_2 \dots u_n$ построено; в протовном случае переходим к преобразованию (1).

Выполняя преобразования (1)-(6) конечное число раз, построим слово $u_1 u_2 \dots u_n$ такое, что $v \cdot u_1 u_2 \dots u_n = v' u_n''$, где $v = v' v''$, $u_n = u_n' u_n''$. Используя свойства специального множества, можно показать, что длину слова $v' u''$ нельзя уменьшить, умножая на слова из H.

Применяя к слову v и подгруппе H из B преобразования (1)-(6), получим слово $v' u_n''$. Если $l(v' u_n'') > 1$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$.

Пусть $l(v'u''_n) = 1$, то есть $v'u''_n = x^{n_0}x^{(2k+1)\gamma_0}$, и ряду (9) принадлежит подгруппа $(M) = \langle x^{\beta} \cdot x^{(2k+1)\gamma_1} \rangle$, где $0 \leq \beta < 2l+1$. Тогда

$$vH \cap \langle w \rangle = (v'u''_n)(M) \cap \langle w \rangle. \tag{13}$$

Из (13) следует соотношение:

$$x^{n_0}x^{(2k+1)\gamma_0} \cdot (x^{\beta+(2k+1)\gamma_1})^m = (x^s x^{(2k+1)\alpha_0})^n, \tag{14}$$

из которого получаем уравнение относительно m, n:

$$n_0 + (2k+1)\gamma_0 + (\beta + (2k+1)\gamma_1)m = (s + (2k+1)\alpha_0)n \tag{15}$$

Из решения уравнения (15) выясняем: справедливы ли равенства (14) и (13).

Пусть $C(G_{ab}) \cap H = E$. Тогда подгруппа H является свободной, порожденной множеством M_0. В этом случае задача сводится к проблеме вхождения $v'u''_n$ в циклическую подгруппу $\langle w \rangle$.

Пусть $l(w) > 1$. В этом случае проверяем справедливо ли равенство (12) в группе B_1. Обозначим: $\theta(v) = \tilde{v}$, $\theta(w) = \tilde{w}$, $\theta(H) = \tilde{H}$, $\theta(u_1u_2\dots u_k) = \theta(u_1)\dots\theta(u_k) = \tilde{u}_1\tilde{u}_2\dots\tilde{u}_k$.

Из теоремы 3 следует, что можно эффективно установить в группе B_1 пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$, следовательно, справедливо ли в B_1 равенство:

$$\tilde{v}\tilde{u}_1\dots\tilde{u}_k = \tilde{w}^p. \tag{16}$$

Из циклической несократимости слова $\tilde{w}$ следует циклическая несократимость слова $\tilde{T} = \tilde{v}\tilde{u}_1\dots\tilde{u}_k$.

Пусть слову $\tilde{T}$ в группе B соответствует слово $x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T}$, а слову $\tilde{w}$ – $x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p$. Тогда соотношению (16) соответствует равенство:

$$c_0 x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T} = x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p, \tag{17}$$

где $c_0 \in C(G_{ab})$.

Пусть $C(G_{ab}) \cap H = E$, тогда $c_0 = 1$ и соотношение (17) справедливо, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $C(G_{ab}) \cap H \neq E$. Тогда среди подгрупп ряда (9) содержится подгруппа $(M) = C(G_{ab}) \cap H$, $(M) = \langle x^{(2k+1)\gamma_0} \rangle$ (Лемма 3).

Пусть $\alpha_0 \neq \beta_0$. Выясним, существуют ли m, n и $c_0 \in (M)$ такие, что

$$(x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T})^m (x^{(2k+1)\gamma_0})^n = (x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p)^m, \tag{18}$$

из которого получаем уравнение

$$\beta_0 m + \gamma_0 n = \alpha_0 m, \tag{19}$$

из решения которого следует решение (18).

Лемма доказана.

Определим понятия специального множества слов в HNN-расширении группы. Группа

$$G^* = \langle G, t;\, \mathrm{rel}\, G, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\rangle \tag{20}$$

есть HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_2 группы G, φ – изоморфизм U_1 на U_2: $\forall a \in U_1$, $\varphi(a) \in U_2$. Группа G называется основой G^*, t – проходная буква, U_1, U_2 – ассоциированными подгруппами.

Известно [18], что каждый элемент $g \in G^*$ единственным образом можно представить в виде:

$$g = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} B_2 t^{\epsilon_2} \dots B_k t^{\epsilon_k} B_{k+1} t^{\beta}, \tag{21}$$

где $\alpha, \beta = 0 \pm 1$; $\epsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1,k}$, B_i – представители левого смежного класса группы G по U_1, если $\epsilon_i = 1$, и по подгруппе U_2, если $\epsilon_i = -1$; $B_{s,\, 1 \leq s \leq k+1}$, называются слогами слова (21).

Если X – множество левых x представителей смежных классов G по U_1, Y – множество левых представителей смежных классов G по U_2, то X^{-1} – множество правых представителей G по U_1; Y^{-1} – множество правых представителей смежных классов G по U_2. Будем обозначать буквой $l(r)$ с индексами внизу элементы множества $X \cup Y (X^{-1} U Y^{-1})$.

Слово, имеющее нечетное число слов, представим в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1g} t^{\epsilon_1} \dots l_{sg} t^{\epsilon_s} K_g t^{\epsilon'_s} r_{sg} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1g} t^{\beta}, \tag{22}$$

где α, $\beta = 0; \pm 1$ $\epsilon_i = \pm 1$, $\epsilon'_i = \pm 1$, $i = \overline{1,s}$, K_g – ядро слова g. Если $K_g \in U_1$ и $\epsilon'_s = 1$, то $\epsilon_s \neq -1$; если $K_g \in U_2$ и $\epsilon_s = 1$, то $\epsilon_s \neq -1$.

Несократимое слово (21), имеющее четное число слогов, представимо в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1g} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{s-1}} l_{sg} h t^{\epsilon'_s} r_{sg} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1g} t^{\beta}, \tag{23}$$

где $h \in U_1$, если $\epsilon'_s = 1$ и $h \in U_2$ если $\epsilon'_s = -1$.

Слоговую длину слова (22) обозначим $L(g) = 2s + 1$, слова (23) $-L(g) = 2s$. Представление слова в несократимой записи (22), (23) назовем каноническим. В слове $g = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{i-1}} B_i t^{\epsilon_i} \dots B_{k+1} t^{\beta}$ подслово $g = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{i-1}} B_i$, $(t^{\alpha} B_1 \dots B_i t^{\epsilon_i})$ назовем начальным открытым (закрытым) отрезком. Аналогичные понятия вводятся для конечных отрезков.

Лемма 5. Для каждого слова $w = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_m} B_{m+1} t^{\beta}$, $\alpha, \beta = 0; \pm 1$, $\epsilon_i = \pm 1$, группы G^* существует единственное каноническое представление.

Слова вида (22), у которых

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s}=(t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})^{-1}$$

назовем трансформами, другие слова вида (22), (23) назовем нетрансформами соответственно нечетной и четной длины. У слова (22) длины $2s+1$ начальный (конечный) отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s},\ (t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

назовем закрытой левой (правой) половиной; отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s}K_gt^{\epsilon'_s},\ (t^{\epsilon_s}K_gt^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

– закрытым большим начальным (конечным) отрезком. У слова вида (23) длины $2s$ начальный (конечный) отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon'_s},\ (t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_{s-1}}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

назовем закрытой левой (правой) половиной [18].

Пусть $W=\{w_i|i=\overline{2,N}\}$ – конечное множество слов группы G^*, каждое из которых приведено к виду (22), (23). Будем говорить, что у слова

$$w_j^{\epsilon}=t^{\alpha_j}B_1t^{\epsilon_1}\dots B_it^{\epsilon_i}B_{i+1}\dots t^{\epsilon_k}B_{k+1}t^{\beta_i}$$

, где $\epsilon_i=\pm1$, $\alpha_j,\beta_j=0;\pm1$, $w_j\in W$, закрытый начальный отрезок $t^{\alpha_j}B_1t^{\epsilon_1}\dots B_it^{\epsilon_i}$ изолирован в W, если он не является начальным отрезком ни у какого слова w_i^{η}, $\eta=\pm1$, $w_i\in\{W\setminus w_j\}$.

Определение 11 [18]. Назовем конечное множество слов $W=\{w_i|i=\overline{1,N}\}$ группы G^* специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина $w_i\in W$, являющегося нетрансформой, изолирована в W; у нетрансформы четной длины изолированы закрытые левая и правая половины;

2) длину слова $w_j\in W$, являющегося нетрансформой, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{W\setminus w_j\}$; длину произвольного элемента $w_j\in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово $v\in\langle W\rangle$, $L(v)<L(w_j)$;

3) пусть

$$w_j=t^{\alpha}l_{1w_j}t^{\epsilon_1}\dots l_{sw_j}t^{\epsilon_s}\dots t^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1w_j}t^{\beta},$$

$\alpha,\beta\in\{0,\pm1\}$, $\epsilon_i,\epsilon'_k\in\{\pm1\}$, нетрансформа, закрыиая правая половина которой оканчивается на подслово $t^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots r_{1w_j}t^{\beta}$, тогда, если подгруппа

$$H=\langle W\rangle\cap t^{-\beta}r_{1w_j}^{-1}\dots r_{iw_j}^{-1}t^{-\epsilon'_i}Gt^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots t^{\beta}\neq E,$$

(E – единичная подгруппа), то $\forall u \in H$, $L(w_j u) \geq L(w_j)$, $L(w_j u w_\gamma^{-\eta_\gamma}) \geq L(w_j)$, где $w_\gamma \in \{W \setminus w_j\}$, $\gamma = \pm 1$;

4) пусть

$$w_i^\epsilon = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \ldots l_{pw_j} t^{\epsilon_p} \ldots t^{\epsilon_s} K_{w_i} t^{\epsilon'_s} \eta_{sw_i} \ldots r_{1w_i} t^{\beta_1},$$

$$w_j^\eta = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} \ldots l_{pw_j} t^{\eta_p} \ldots t^{\eta_m} K_{w_j} t^{\eta'_m} r_{mw_j} \ldots r_{1w_j} t^{\beta_2},$$

где $\epsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\alpha_s = 0; \pm 1$, $\beta_s = 0; \pm 1$, $s = 1, 2$; $\epsilon_i, \epsilon'_i = \pm 1$, $i = 1, s_j$; $\eta_\gamma, \eta'_\gamma = \pm 1$, $\gamma = \overline{1, m}$; где слова $w_i, w_j \in W$, не обязательно различные слова, $t^{\alpha_1} l_{1w_i} \ldots l_{pw_i} t^{\epsilon_p}$ начальное слово левой половины w_i^ϵ; $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} \ldots l_{pw_j} t^{\eta_p}$ начальное подслово левой половины w_j^η. Если $t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \ldots l_{pw_i} \neq t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} \ldots l_{pw_j}$, то не существует $w \in \langle W \rangle$, $L(w) < 2p$ такого, что

$$w w_j^\eta = t^{\alpha_1} l_{1w_i} \ldots l_{pw_i} t^{\eta_p} l'_{p+1} \ldots t^{\eta'_i} r_{iw_j} \ldots r_{1w_j} t^{\beta_2}$$

Разобьем специальное множество W на подмножества; нетрансформы объединим в подмножество, которое обозначим M_0. Трансформы с одинаковыми крыльями – в подмножества M_i, $i = \overline{1, k}$, каждое из которых порождает подгруппу

$$(M_i) = t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\epsilon_{1i}} \ldots r_{n_{ji}}^{-1} t^{-\epsilon_{n_{ji}}} A_i t^{\epsilon_{n_{ji}}} \ldots t^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i = 0; \pm 1$, $\epsilon_{ji} = \pm 1$, $1 \leq j \leq n_{ji}$, A_i – подгруппа группы G, порожденная ядрами трансформ с крыльями $t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\epsilon_{1i}} \ldots r_{n_{ji}}^{-1} t^{-\epsilon_{n_{ji}}}$.

Упорядочим подгруппы (M_i), $i = \overline{1, k}$, по длинам трансформ их порождающих. Получим ряд

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \tag{24}$$

Лемма 6 [18]. Пусть W – специальное множество слов группы G^*. Тогда ряд (24) можно преобразовать в ряд

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \ldots \leq (M'_{k'}), \tag{25}$$

обладающий следующими свойствами:

а) $qp(M_0, (M_1), \ldots, (M_k)) = qp(M_0, (M'_1) \ldots, (M'_{k'}))$;

б) если подгруппе

$$(M'_j) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \ldots r_{nj}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} A_j t^{\epsilon_{nj}} r_{nj} \ldots t^{\alpha}, \tag{26}$$

$\alpha \in \{0, \pm 1\}$ принадлежит трансформа

$$w = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \ldots r_{nj}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} h t^{\epsilon_{nj}} r_{nj} \ldots t^{\alpha}, \tag{27}$$

где $h \in U_1$, если $\epsilon_{nj} = 1$ и $h \in U_2$, если $\epsilon_{nj} = -1$, то ряд (25) содержит подгруппу

$$(M_i') = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \dots t^{-\epsilon_{nj-1}} A_i t^{\epsilon_{nj-1}} \dots r_{ij} t^{\alpha},$$

которой принадлежит трансформа w;

в) пусть $v = t^{-\alpha_j}\, r_{1j}^{-1} \dots t^{-\epsilon_{n_j}}\, r_{n+1}^{-1}\, t^{\epsilon_{n_{j+1}}}$ – подслово левой половины некоторого $w_j^{-\epsilon} \in W$, не являющееся изолированной в множестве W, тогда, если подгруппе (M_j') принадлежит трансформа w такая, что $w \in vGv^{-1}$, то ряду (25) принадлежит подгруппа

$$(M_i) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} r_{n+1}^{-1} t^{-\epsilon_{nj+1}} A_i t^{\epsilon_{nj+1}} \dots t^{\alpha},$$

содержащая нетрансформу w;

г) пусть для некоторой трансформы w, принадлежащей подгруппе (M_j') ряда (25) и для некоторой нетрансформы $Y \in M_0$ с изолированной закрытой левой половиной, $L(Y) = 2m+1$, $L(w) \leq (Y)$, $L(Y^{-1}wY) \leq L(Y)$, то существует подгруппа (M_s') ряда (25), содержащая трансформу $Y^{-1}wY$; если $L(Y^{\epsilon}wY^{-\epsilon}) < L(Y)$, где $L(Y) = 2m+1$, либо $L(Y) = 2m$, $\epsilon = \pm 1$, то существует подгруппа (M_s') ряда (25), содержащая $Y^{\epsilon}wY^{-\epsilon}$.

Назовем подгруппу, порожденную подгруппами ряда (25), основой подгруппы $\langle W \rangle$ и обозначим ее через S, а подгруппу $\langle W \rangle$ будем обозначать $qp(M_0, S)$.

Определение 12 [18]. Произведение $u_1 u_2 \dots u_n$ назовем словом подгруппы $qp(M_0, S)$ группы G^*, если выполняются условия: $u_i \neq 1$, $i = \overline{1,n}$; u_i принадлежит $\{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо некоторой подгруппе ряда (25); $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$; u_i, u_{i+1} – не содержатся в одной подгруппе ряда (25), кроме того, в $u_1 u_2 \dots u_n$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}$, $i = \overline{1, n-2}$, в котором $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_i)$, $u_1 u_{i+1} u_{i+2} \in (M_j)$ из ряда (25).

Сомножители u_i произведения $u_1 u_2 \dots u_n$ назовем u-символами.

Лемма 7 [18]. Подгруппа (M_0) – свободная и не содержит трансформ.

Лемма 8 [18]. Пусть $t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}}$ – подслово левой половины w^{ϵ}, $w \in W$, $\epsilon \pm 1$, не являющееся изолированной в W. Тогда, если

$$t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \dots t^{-\epsilon_{nj}}\, G\, t^{\epsilon_{nj}} \dots t^{\alpha_j} \cap \langle W \rangle \neq E,$$

E – единичная подгруппа, то ряд (25) содержит подгруппу

$$(M_{is}') = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} \dots t^{-\epsilon_{nj}} A_{is} t^{\epsilon_{nj}} \dots t^{\alpha_j}.$$

Теорема 5 [18]. Пусть

$$G^* = \langle G, t; \operatorname{rel} G, t^{-1} U_1 t = U_2, \varphi \rangle, \tag{28}$$

являющаяся HNN- расширением группы G с помощью связных подгрупп U_1, U_2 из G и фиксированного конструктивного изоморфизма φ: $\varphi(U_1) = U_2$. Тогда, если подгруппы U_1, U_2 обладают свойством максимальности и в группе G: 1) разрешима проблема вхождения, 2) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ и любой из связанных подгрупп U_1, U_2 образующие пересечения $H \cap U_i$, $i = \overline{1,2}$; 3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ и любого $w \in G$ установить пусто или не пусто пересечение $wH \cap U_i$, $i = \overline{1,2}$; то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G^* в специальное; в группе G^* разрешима проблема вхождения.

Лемма 9. В группе Артина

$$G_{ab} = \langle a, b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle \tag{29}$$

с числом Коксетера $m_{ab} = 2k$ разрешимы проблемы: 1) проблема вхождения; 2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с циклической $\langle w\rangle < G_{ab}$; 3) разрешима проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle < G$.

Доказательство. Группе G_{ab} по условию соответствует число Коксетера $m_{ab} = 2k$, в этом случае группа G_{ab} изоморфна группе

$$B = \langle x, t; t^{-1}x^k t = x^k\rangle \tag{30}$$

по изоморфизму θ: $\theta(a) = t$, $\theta(b) = xt^{-1}$. [6]

Из теоремы 5 следует, что в группе B разрешима проблема вхождения.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы G_{ab}, w – произвольный элемент G_{ab}. Обозначим: $\theta(H) = \tilde{H}$, $\theta(w) = \tilde{w}$, где $\tilde{H} < B$, $\tilde{w} \in B$. Будем предполагать, что образующие подгруппы $\tilde{H}$ приведены к специальному множеству и $\tilde{H} = qp(M_0, S)$, где M_0 – множество нетрансформ и S – подгруппа $\tilde{H}$, порожденная подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \tag{31}$$

Покажем, что можно эффективно определить пересечения $H \cap \langle w\rangle$.

Обозначим через $l_t(\tilde{v}) = k$, $\tilde{v} \in B$, число вхождений образующего t в канонически приведенное слово $\tilde{v}$.

Пусть $l_t(\tilde{w}) = 0$, тогда $\tilde{w} = x^{\alpha}x^{km}$, где $0 \leq \alpha < k$, и пусть $C(B) \cap \tilde{H} \neq E$. Тогда подгруппы ряда (31) содержат подгруппу $(M_i) = \langle x^{k\beta} \cdot x^{\alpha_0}\rangle$, $0 \leq \alpha_0 < k$ (лемма 8).

В этом случае существует $S \in \mathbb{N}$ такое, что $\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle = \langle M_i \rangle \cap \langle \tilde{w} \rangle = \langle x^S \rangle$.

Если $C(B) \cap \tilde{H} = E$, то $\tilde{H} = \langle M_0 \rangle$ – свободная группа и $\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle = E$.

Пусть $\tilde{w}$ – циклически несократимое слово, содержащее образующий t, то есть $l_t(\tilde{w}) \geq 1$. Рассмотрим в группе B нормальный делитель $N = \langle x^k \rangle^B$ и пусть φ – гомоморфизм группы B на B/N, $\varphi(B) = B/N = \bar{B}$.

Группа $\bar{B}$ является свободным произведением циклических групп $\langle t \rangle$, $\langle x; x^k \rangle$, то есть

$$\bar{B} = \langle t \rangle * \langle x; x^k \rangle. \tag{32}$$

Тогда $\tilde{w} = x^{t_0 k} \bar{w}$, где $\bar{w} = \varphi(\tilde{w})$, $\bar{H} = \varphi(\tilde{H})$.

Если $C(B) \cap \tilde{H} = E$, то образующими подгруппы $\bar{H}$ являются нетрансформы подгруппы $\tilde{H}$, $\tilde{H} = (M_0)$ и $\tilde{w}_i = x^{\alpha_i} \bar{w}_i$, где $\tilde{w}_i \in M_0$.

Из теоремы 3 следует, что в $\bar{B}$ алгоритмически разрешима проблема пересечения подгрупп, поэтому $\bar{w}^p = \bar{w}_{i_1} \ldots \bar{w}_{i_n}$, где $\bar{w}_{ij} \in \varphi(M_0)$.

Пусть $\tilde{w}^p = x^{kpt_0} \bar{w}^P$, $\tilde{w}_{i_1} \tilde{w}_{i_2} \ldots \tilde{w}_{i_n} = x^{k\beta} \bar{T}$, $\bar{T} = \bar{w}_{i_1} \ldots \bar{w}_{i_n}$. Так как слово $\bar{w}^p$ – циклически несократимо, то и слово $\bar{T}$ – циклически несократимо. Если $kpt_0 = k\beta$, то подгруппы пересекаются по подгруппе $\langle \tilde{w}^p \rangle$.

Пусть $kpt_0 \neq k\beta$ и $C(B) \cap \tilde{H} \neq E$. Тогда множество подгрупп $\{(M_j); j = \overline{1,k}\}$ содержит подгруппу $(M_i) = \langle x^{\alpha k} \rangle$. Чтобы определить пересечение $\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$ рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha k})^r (\tilde{w}^p)^m = (\tilde{T})^m, \tag{33}$$

где $\tilde{T} = x^{k\beta} \bar{T}$, подставляя в него соответствующие значения, получим:

$$x^{\alpha kr} \cdot x^{kpt_0 m} \bar{w}^{pm} = x^{k\beta m} \bar{T}^m, \tag{33}$$

r, m – неизвестные, которые определяем из уравнения:

$$\alpha r + pt_0 m = \beta m, \tag{35}$$

из решения которого определяем пересечение подгрупп.

Если $C(B) \cap \tilde{H} = E$ и $kpt_0 \neq k\beta$, то $\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle = E$.

Рассмотрим проблему пересечения смешанного класса конечно порожденной подгруппы $\tilde{H} < B$ с циклической подгруппой $\langle \tilde{w} \rangle < B$.

Пусть $\tilde{v}$ – произвольное слово группы B, $\tilde{v} \notin \tilde{H}$. Выясним, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$.

Рассмотрим случай, когда $l_t(\tilde{w}) = 0$, $l_t(\tilde{v}) = 0$. Тогда $\tilde{v} = x^r \cdot x^{k\gamma_0}$, $\tilde{w} = x^{k\alpha_0}x^s$, где $0 \leq r < k$, $0 \leq s < k$. Пусть $C(B) \cap \tilde{H} \neq E$, тогда среди подгрупп $\{(M_i); i = \overline{1,k}\}$ содержится подгруппа $(M_1) = \langle x^\beta x^{k\gamma_1} \rangle$, $0 \leq \beta < k$, и

$$\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle = \tilde{v}(M_1) \cap \langle \tilde{w} \rangle. \tag{36}$$

Из данного соотношения следует

$$x^r x^{k\gamma_0} \cdot (x^\beta x^{k\gamma_1})^m = (x^s x^{k\alpha_0})^p, \tag{37}$$

из которого получаем уравнение относительно m, p:

$$r + k\gamma_0 + (\beta + k\gamma_1)m = (s + k\alpha_0)p, \tag{38}$$

решая которое, выясняем, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$.

Если $C(B) \cap \tilde{H} = E$, то $\tilde{H} = \langle M_0 \rangle$ – свободная подгруппа и рассматриваемая задача сводится к проблеме вхождения $\tilde{v}$ в $\langle \tilde{w} \rangle$.

Пусть $l_t(\tilde{v}) \geq 1$, $l_t(\tilde{w}) = 0$.

В этом случае эффективно определяем слово $\tilde{u}_1\tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_n \in H$, максимально сокращающее длину слова $\tilde{v}$, для этого применяем преобразования (1)–(6), указанные выше.

Допустим, что в результате получили $\tilde{v} \cdot \tilde{u}_1\tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_n = \tilde{v}'\tilde{u}''_n$, где $\tilde{v} = \tilde{v}'\tilde{v}''$, $\tilde{u}_n = \tilde{u}'\tilde{u}''_n$, длину которого нельзя уменьшить, умножая на слово из $\tilde{H}$.

Если $l_t(\tilde{v}'\tilde{u}''_n) \geq 1$, то $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle = \varnothing$

Пусть $l_t(\tilde{v}'\tilde{u}''_n) = 0$, то есть $\tilde{v}'\tilde{u}''_n = x^r x^{k\gamma_0}$, то получаем вышерассмотренный случай.

Пусть $l_t(\tilde{w}) \geq 1$. В этом случае рассматриваем отображение $\varphi : B \to \bar{B}$, и рассматриваем пересечение $\varphi(\tilde{v}) \cdot \varphi(\tilde{H}) \cap \langle \tilde{\varphi}(\tilde{w}) \rangle$.

Обозначим $\varphi(\tilde{v}) = \bar{v}$, $\varphi(\tilde{w}) = \bar{w}$, $\varphi(\tilde{H}) = \bar{H}$.

Из теоремы 3 следует, что в группе $\bar{B}$ разрешима проблема пересечения смежных классов двух конечнопорожденных подгрупп.

Пусть в $\bar{B}$ имеет место равенство:

$$\bar{v} \cdot \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n = \bar{w}^p. \tag{39}$$

Из циклической несократимости $\bar{w}^p$ следует циклическая несократимость слова $\bar{T} = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n$.

Пусть слову $\bar{T}$ в группе B соответствует слово $x^{k\beta_0}\bar{T}$, а слову $\bar{w}^P$ – слово $x^{k\alpha_0}\bar{w}^p$. Тогда в группе B имеем место равенство:

$$c_0 x^{k\beta_0}\bar{T} = x^{k\alpha_0}\bar{w}^p, \tag{40}$$

где $c_0 \in C(B)$.

Пусть $C(B) \cap \tilde{H} = E$, тогда $c_0 = 1$ и соотношение (40) справедливо, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $\beta_0 \neq \alpha_0$ и $C(B) \cap \tilde{H} \neq E$. Тогда множеству подгрупп $\{(M_i), i = \overline{1,k}\}$ принадлежит подгруппа $(M) = C(B) \cap \tilde{H}$, $(M) = \langle x^{k\gamma_0} \rangle$.

Выясняем, имеет ли место соотношение

$$(x^{k\gamma_0})^n (x^{k\beta_0} \bar{T})^m = (x^{k\alpha_0} \bar{w}^p)^m, \tag{41}$$

из которого получаем уравнение:

$$\gamma_0 \cdot n + \beta_0 \cdot m = \alpha_0 m \tag{42}$$

относительно неизвестных n, m.

Из решения (42) определяем, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$. *Лемма доказана.*

Теорема 6 [19], [20]. Пусть группа

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n}; \operatorname{rel} G_1, \ldots, \operatorname{rel} G_s, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle \quad i \in I_1, j \in I_2$$

древесные произведения групп G_s, $s = \overline{1,n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < g_i$, $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма $\varphi_{ji} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$, $i \in I_1$, $j \in I_2$, $|I_1| < \infty$, $|I_2| < \infty$. Тогда, если объединяемые подгруппы U_{ij}, $i \in I_1$, $j \in I_2$ обладают свойством максимальности и в сомножителях G_i, разрешимы

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой U_{ij};

3) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с объединяемой подгруппой, то в группе G разрешима проблема вхождения.

Теорема 7. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

Данная теорема непосредственного следует из леммы 4, леммы 9 и теоремы 6.

Список цитированной литературы

1. Марков А.А. Основы алгебраической теории кос. // Тр. МИАН, Москва, АН СССР, 1945, Т.6.

2. Garsid F.A. The braid group and other groups // Quart. Math. Oxford, ser. (2), 1969, v. 20.

3. Брискорн Э. Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика, 1974, Т. 18 №6, С. 56-79.

4. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. журнал, Т. XXVI, №5, 1985, С. 27-42.

5. Appel K. Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups. // Invent. Math. 1983, P. 50-78.

6. Appel K. One Artin groups and infinite Coxeter groups. // Contempor. Math. 1984, P. 50-78.

7. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1986, С. 26-61.

8. Безверхний В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. // Фундаментальная и прикладная математика, 1999, Т. 5, №1, С.1-38.

9. Безверхний В.Н. О группах Артина и Коксетера с древесной структурой. // V Международная конференция «Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения.» Тезисы докладов. Тула, 2003, С. 33-34.

10. Безверхний В.Н. Карпова О.Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой. // Известия Тульского гос. университета, серия «Математика, Механика, Информатика.» 2006, Т. 12, С. 67-82.

11. Безверхний В.Н. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некоторых классах групп Артина и Коксетера. // Материалы XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения.» Тезисы докладов. Тула, 2014, С. 6.

12. Bezverkhnii V.N., Bezverkhnyaya N.B. Solution of the problem of equality and conjugacy of word in certain class of Artin groups. // Journal of Mathematical Science, 2021. Vol. 257. P. 751-764.

13. Безверхний В.Н. О пересечении конечнопорожденных подгрупп свободной группы. // Сб. научных трудов кафедры высшей математики Тульского политехнического института, вып. 2, 1974, С. 51-56.

14. Безверхний В.Н. Роллов Э.В. О подгруппах свободного произведения групп. // Современная алгебра, 1974, С.16-31.

15. Безверхний В.Н. О пересечении подгрупп в HNN – группах. // Фундаментальная и прикладная математика, 1998, Т. 4, С.199-222.

16. Безверхняя И.С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1981, С. 103-116.

17. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1972, С. 3-86.

18. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN – групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1981, С. 20-62.

19. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1986, С. 3-21.

20. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром. // Деп. Сиб. мат. журнала, Т. XXVI, №2, 1985, С. 219-220.

Безверхний Владимир Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор Российской Таможенной Академии;
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Безверхняя Наталия Борисовна
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа МТУСИ;
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Угаров Андрей Сергеевич
аспирант ТГПУ им. Л.Н. Толстого;
e-mail: ugarandrey@gmail.com