S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 445–495 (2020) УДК 512.542.7+519.17

DOI 10.33048/semi.2020.17.029 MSC 20B25, 05E18

ТРАНЗИТИВНЫЕ НА ДУГАХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ АНТИПОДАЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 3 В АФФИННОМ СЛУЧАЕ

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. In this paper, we describe pairs (Γ, G), where Γ is an antipodal distance-regular graph of diameter 3 that possesses an arc-transitive group of automorphisms G such that G induces an affine 2-transitive permutation group on the set of its antipodal classes. As a corollary, we revise and specify a list of necessary conditions for existence of such pairs, and find several new additional necessary conditions in one-dimensional subcase.

Keywords: arc-transitive group, antipodal cover, distance-regular graph, affine 2-transitive group.

Введение

Антиподальные дистанционно регулярные графы (сокращенно «д.р.г.») диаметра 3 образуют обширный подкласс импримитивных д.р.г. и тесно взаимосвязаны с разнообразными алгебраическими или геометрическими объектами, например, такими как обобщенные матрицы Адамара, проективные плоскости и обобщенные четырехугольники. В общем случае проблема классификации антиподальных д.р.г. диаметра 3 представляется неразрешимой. Однако, можно надеяться на получение классификации и построение новых примеров антиподальных д.р.г. диаметра 3 с «богатыми» группами автоморфизмов.

Tsiovkina, L.Yu., Arc-transitive groups of automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 in affine case.

Поступила 16 сентября 2019 г., опубликована 6 апреля 2020 г.

В работе К. Годсила, Р. Либлера и Ш. Прэгер [8] получена классификация антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3. Ключевую роль в их исследовании сыграло наблюдение о том, что каждая транзитивная на дугах группа автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3 индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на множестве его антиподальных классов.

По теореме Бернсайда (см. например, [12, гл. XII, § 7.12]) конечная 2-транзитивная группа подстановок является либо аффинной, либо почти простой. Более того, как следствие классификации конечных простых групп была получена классификация всех конечных 2-транзитивных групп подстановок. Она и стала главным инструментом классификации антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3 в [8].

В работе А.А.Махнева, Д.В. Падучих и Л.Ю. Циовкиной [34] было инициировано исследование проблемы описания *реберно симметричных* (то есть, обладающих транзитивными на дугах группами автоморфизмов) антиподальных д.р.г. диаметра 3, также основанное на классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок. Каждый такой граф допускает теорико-групповую характеризацию и может быть построен на основе относительно небольшой информации о своей транзитивной на дугах группе автоморфизмов. К настоящему времени найдены несколько бесконечных семейств реберно симметричных антиподальных д.р.г. диаметра 3, не являющихся дистанционно-транзитивными, в том числе, для серий простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$, и классифицированы реберно симметричные антиподальные д.р.г. диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует почти простую группу подстановок на множестве его антиподальных классов.

Цель данной работы — классифицировать пары (Γ, G) такие, что Γ — реберно симметричный антиподальный д.р.г. диаметра 3 и G — транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа Γ, которая индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов.

Как известно, если G — конечная 2-транзитивная группа подстановок на множестве X степени n и цоколь T группы G — абелева группа, то G подстановочно изоморфна подгруппе из $A\Gamma L_d(q)$ для некоторых d и $q = p^c$, где p — простое, и $n = q^d = |T|$. В свою очередь, каждая подгруппа $G \leq A\Gamma L_d(q)$ 2-транзитивна на векторах соответствующего векторного пространства тогда и только тогда, когда стабилизатор нулевого вектора $G_0 \leq \Gamma L_d(q)$ действует транзитивно на ненулевых векторах. Аффинные 2-транзитивные группы подстановок с неразрешимым стабилизатором точки были классифицированы в работе К. Геринга [15]. Они включают три бесконечных семейства групп с G_0 из пп. $(i), (ii), (iii)$ предложения 1 ниже (${G_0}^\infty$ здесь является транзитивной линейной группой), а также спорадические примеры для $d = 2, 4, 6$ с G_0 из пп. (v) и (vi) данного предложения. Разрешимые 2-транзитивные группы подстановок были описаны Б. Хуппертом (см. [10]). Приведем общий список таких групп в соответствии с [8, теорема 2.9] (более подробное их описание можно найти в [12, гл. XII, § 7.3, § 7.5]).

Предложение 1. *Если подгруппа* $G \leq A\Gamma L_d(q)$ *2-транзитивна, то стабилизатор нулевого вектора* $G_0 \leq \Gamma L_d(q)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) *(линейные)* $d \geq 2$ *и* $SL_d(p^c) \trianglelefteq G_0 \leq \Gamma L_d(p^c)$*;*

(ii) (симплектические) d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(p^c) \trianglelefteq G_0 \leq Z_{p^c-1} \circ \Gamma Sp_d(p^c)$;

(iii) (G_2-типа) $d = 6$, $p = 2$ и $G_2(2^c)' \trianglelefteq G_0 \leq Z_{2^c-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(2^c))$;

(iv) (одномерные) $d = 1$ и $G_0 \leq \Gamma L_1(p^c)$;

(v) (исключительные) $p^{cd} \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ и $G_0{}^{\infty} = SL_2(5)$, либо $p^{cd} = 2^4$ и A_6 или $A_7 \trianglelefteq G_0$, либо $p^{cd} = 3^6$ и $G_0 = SL_2(13)$;

(vi) (экстраспециальные) $p^{cd} \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ и $SL_2(3) \trianglelefteq G_0$ или $p^{cd} = 3^4$, $R = D_8 \circ Q_8 \trianglelefteq G_0$, $G_0/R \leq S_5$ и 5 делит $|G_0|$.

В статье [35] были получены необходимые условия существования реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 при условии того, что его полная группа автоморфизмов индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Однако, итоговый список этих условий оказался потенциально неполным, поскольку в доказательствах ряда локальных утверждений были допущены некоторые неточности, в том числе, при определении строения допустимых стабилизаторов вершины в одномерном, экстраспециальном и исключительном случаях.

В настоящей работе указанный список исправлен и дополнен. А именно, найдены новые необходимые условия существования реберно симметричных антиподальных д.р.г. диаметра 3 в одномерном случае, устранены вышеупомянутые неточности и приведен уточненный вариант основной теоремы из [35]. Подчеркнем, что в отличие от работы [35], где проводилось описание пар (Γ, G) при условии $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, здесь исследуется также возможность $G < \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Теорема 1. *Предположим, что группа G действует транзитивно на дугах антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, где $r \notin \{2, k, (k-1)/\mu\}$, и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Пусть K — ядро действия G на Σ, $F \in \Sigma$, $a \in F$, $H = G_{\{F\}}$, $C = C_{G_a}(K)$, $|\Sigma| = p^e$, где p — простое число, и T — полный прообраз цоколя группы G^{Σ} в G. Если $p = 2$, то либо $K = 1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, либо $|K| = r$, $r\mu = k + 1 = 2^e$, $\mu > 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$R = GL_1(2^e) \cap G_a \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$, G_a содержит подгруппу B нечетного порядка, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$, и выполняются следующие утверждения:*

(i) если T содержит нормальную в G подгруппу порядка 2^e, то $K = E_r, r = \mu = 2^{e/2}$, H действует 2-транзитивно на F, T — элементарная абелева или специальная группа порядка $2^{e+e/2}$, $C_K(R) = 1$, $C_R(K) = \langle \tilde{h} \rangle > 1$, $\alpha_1(\tilde{h}) = |R| 2^{e/2+1} w$ и $0 \leq w \leq (e, 2^e - 1)/2$, в частности, если $|R| = 2^e - 1$, то $\alpha_1(\tilde{h}) = 0$ и группа $R/C_R(K)$ действует регулярно на $F - \{a\}$;

(ii) если $C_R(K) = 1$, то $\Phi(K) = 1, e = 6$ и $r = 32$;

(iii) если $C_R(K) > 1$, то $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$, $r \leq 2^{e/2} \leq \mu$ и $C_T(R) \leq K \leq Z(T)$, а если к тому же $\Phi(T) < K$ и $B \leq C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, группа T содержит нормальную в TB подгруппу порядка 2^e и Γ — граф из п. (i) выше;

(2) *$e = 2dc$, $d \geq 1$, r делит 2^c, T — элементарная абелева группа порядка $2^e r$, не содержащая нормальных в G подгрупп порядка 2^e, $Sp_{2d}(2^c) \trianglelefteq G_a$ или $d = 3$ и $G_2(2^c) \trianglelefteq G_a$.*

Теорема 2. *В предположениях и обозначениях из теоремы 1, а также при условии, что $p > 2$ и $\mu > 1$, имеем $|K| = r$, $r\mu = k + 1 = p^e$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *реализуется экстраспециальный случай, $r = p$, T — экстраспециальная группа порядка rp^e и экспоненты p и либо*

(*i*) *$p^e = 3^4$, $Q_8 \circ D_8 \simeq R_0 \trianglelefteq C$, $G_a/R_0 \leq S_5$ и 5 делит $|G_a|$, либо*

(*ii*) *$p^e = 5^2$, $SL_2(3) \leq C, G_a \leq SL_2(3).Z_4$, либо*

(*iii*) *$p^e = 7^2$, $SL_2(3) \leq C, SL_2(3).Z_2 \leq G_a \leq SL_2(3).Z_6$, либо*

(*iv*) *$p^e = 11^2$, $C \simeq SL_2(3)$, $G_a \simeq Z_5 \times SL_2(3)$ или $Z_5 \times GL_2(3)$, либо*

(*v*) *$p^e = 23^2$, $G_a \simeq Z_{11} \times (SL_2(3).Z_2)$, $C \simeq SL_2(3)$ или $SL_2(3).Z_2$;*

(2) *реализуется исключительный случай и $G_a \trianglerighteq S \simeq SL_2(5)$ при $k \neq 728$ и $G_a \simeq SL_2(13)$ при $k = 728$, T — специальная группа порядка rp^e и экспоненты p и либо*

(*i*) *$p^e = 3^6$, $r = 3$, $C = G_a \simeq SL_2(13)$, либо*

(*ii*) *$p^e = 9^2$, $r \in \{3, 9\}$, $G_a/S \leq D_8$, $S \leq C$, либо*

(*iii*) *$p^e = 11^2$, $r = 11$, $S = C$, $G_a \simeq SL_2(5)$ или $SL_2(5) \circ Z_{10}$, либо*

(*iv*) *$p^e = 19^2$, $r = 19$, $S \leq C$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{18}$, либо*

(*v*) *$p^e = 29^2$, $r = 29$, $S \leq C$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{14}$ или $SL_2(5) \circ Z_{28}$, либо*

(*vi*) *$p^e = 59^2$, $r = 59$, $S = C$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{58}$;*

(3) *реализуется одномерный случай, $R = G_a \cap GL_1(p^e) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$ и либо*

(*i*) *$e > 4$, $r \geq p^{e/2}$, T — специальная группа порядка rp^e и экспоненты p, и R не нормализует подгрупп индекса p в K, либо*

(*ii*) *$e = 4$, $r = p^2 = \mu$, T — специальная группа порядка p^6, группа R действует полурегулярно на $[a]$ и группа $R/C_R(K)$ действует полурегулярно на $F - \{a\}$, либо*

(*iii*) *$e = 4, p = 3$, T — специальная группа порядка rp^4 и $R \leq N_G(K_1)$, где K_1 — подгруппа индекса p в K, $|R| = 20$, $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$ и $|R/C_R(K)| \leq 2$, либо*

(*iv*) *$e = 2$, $r = p$, T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \leq GL_2(p)$, либо*

(*v*) *$e = 2$, $3 < r = p$ — простое число Мерсенна, T — абелева группа и $C_T(G_a) = 1$;*

(4) *реализуется симплектический случай, $e = 2dc$, $d \geq 1$, r делит p^c, $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$, T — специальная группа порядка rp^{2dc} и экспоненты p.*

Мы также дополняем результат [36, теорема 1], где классифицировались графы с $p > 2$, удовлетворяющие условиям, перечисленным в основной теореме из [35].

Теорема 3. *Пусть Γ — реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3, удовлетворяющий условиям из пп. 1, 2, 4 или условию $GL_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$ при $e = 2$ из п. 3(iv) заключения теоремы 2. Тогда граф Γ изоморфен дистанционно регулярному графу, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.*

Следствие 1. *Если в теореме 2 вместо условия $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ предполагать, что $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, то графы из пп. 1 и 2, а также граф со свойством $GL_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$ для $e = 2$ из п. 3(iv) заключения теоремы 2 не существуют.*

Замечание 1. 1) Случаи $\mu = 1$, а также случаи $r \in \{2, k, (k-1)/\mu\}$, рассмотрены в [33] и [34], где было установлено, что при $\mu \in \{1, (k-1)/r\}$ аффинный случай не реализуется.

2) При $K = 1$ возникает всего два различных (с точностью до изоморфизма) графа. Один из них строится как геометрический граф для обобщенного четырехугольника GQ$(5,3)$ с удаленным спредом (этот обобщенный четырехугольник допускает 24 спреда и его группа автоморфизмов действует транзитивно на них (см. [4])). Полная группа автоморфизмов данного антиподального д.р.г. имеет абстрактное строение вида $2^4.GL_2(4).Z_2$. Другой граф может быть получен путем удаления спреда из псевдогеометрического графа для GQ$(5,3)$, который был впервые построен А. Броувером и Дж. Куленом и независимо М.Х. Клином (см. [3]). Они также показали, что окрестность вершины в таком антиподальном д.р.г. изоморфна графу прямых графа Петерсена, при этом полная группа автоморфизмов имеет абстрактное строение вида $2^4.S_6$.

3) Для каждой допустимой тройки параметров (k, r, μ) граф из пп. 1, 2 и 4 заключения теоремы 2 существует (для тройки параметров (k, r, μ) из пп. 1 или 2 теоремы 2 такой граф является дистанционно-транзитивным и изоморфен графу из п. 4 (с теми же параметрами)). Для тройки параметров $(k, r, \mu) = (8, 3, 3)$ графы из пп. 3 и 4 заключения теоремы 2 существуют, изоморфны между собой и ввиду результата А. Броувера и Х. Вилбринка могут быть построены как геометрический граф для обобщенного четырехугольника GQ$(2,4)$ с удаленным спредом (см. [2, с. 386]).

4) По следствию 1 в списке необходимых условий существования графа из основной теоремы в [35] пропущенными оказались условия в одномерном случае (п. 1 теоремы 1 и п. 3 теоремы 2).

Настоящая статья состоит из введения и четырех разделов. В разделе 1 приведены обозначения, определения и вспомогательные результаты. В разделе 2 на основе классификации 2-транзитивных конечных групп подстановок установлены базовые свойства группы G и исследована ситуация, когда G содержит нормальную подгруппу порядка $|\Sigma|$ (см. предложение 3). В разделе 2 также доказано, что если группа K нетривиальна, то K действует регулярно на антиподальном классе, $r\mu = |\Sigma|$ и $G = T \leftthreetimes G_a$ (см. лемму 6). В разделах 3 и 4 развит метод исключения допустимых подгрупп $T \leftthreetimes G_a$, основанный на результатах раздела 2 и классификации 2-транзитивных конечных групп подстановок, и доказаны теоремы 1 и 2 соответственно. В целом, доказательство теорем 1 и 2 следует той же схеме, что применялась в [35]. Для замкнутости изложения, а также ввиду большого объема возникающих подслучаев, некоторые вспомогательные утверждения и их доказательства из [35] будут более подробно воспроизведены и при необходимости — модифицированы. Раздел 5 посвящен доказательству теоремы 3.

1. Определения и предварительные результаты

Всюду в работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Дистанционно регулярные графы — это связные графы, в которых для произвольной пары вершин u и w, находящихся друг от друга на расстоянии l, параметр $p^l_{i,j}$, равный числу вершин, находящихся на расстоянии i от вершины u и на расстоянии j от вершины w, зависит только от i, j и l, и не зависит от выбора вершин u и w. Все параметры $p^l_{i,j}$ дистанционно регулярного графа диаметра d выражаются с помощью его *массива пересечений*, то есть последовательности параметров $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, где $b_i = p^i_{i+1,1}$ и $c_i = p^i_{i-1,1}$.

Важный подкласс этих графов образован антиподальными д.р.г. *Антиподальный граф* — это граф диаметра d, для которого бинарное отношение «совпадать или находиться на расстоянии d» на множестве его вершин является отношением эквивалентности, при этом классы данного отношения называются *антиподальными классами* графа.

Пусть Γ — связный граф диаметра $d \geq 1$, $V(\Gamma)$ — множество его вершин и d_Γ — его естественная метрика. Для любых $i \in \{1, ..., d\}$ и $a \in V(\Gamma)$ через $\Gamma_i(a)$ обозначается *i-окрестность вершины a*, то есть подграф, индуцированный множеством $\{b \in V(\Gamma) | d_\Gamma(a, b) = i\}$, а через $[a]$ и $a^\perp$ обозначаются множества $\Gamma_1(a)$ и $\{a\} \cup \Gamma_1(a)$ соответственно.

Если граф Γ антиподален, то его *антиподальным частным* называется граф на множестве антиподальных классов графа Γ, в котором две вершины F_1 и F_2 смежны тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(a) \cap F_2 \neq \emptyset$ для некоторой вершины $a \in F_1$. Если к тому же любые два антиподальных класса графа Γ образуют коклику или совершенное паросочетание, то говорят, что Γ является *антиподальным r-накрытием* своего антиподального частного, где r — это порядок антиподального класса.

Антиподальные д.р.г. диаметра 3 являются антиподальными накрытиями полных графов. Их антиподальные частные не несут дополнительной информации о строении графа, за исключением ограничений на множество его допустимых массивов пересечений, и вопрос о существовании графа, как правило, требует нетривиального анализа для каждого отдельного массива пересечений.

Если группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве $\{(a, b) \in V(\Gamma)^2 | d_\Gamma(a, b) = 1\}$, то мы будем говорить, что группа G является *транзитивной на дугах* или *флаг-транзитивной*, а если, сверх того, для любого $i \in \{1, ..., d\}$ группа G действует транзитивно на множестве $\{(a, b) \in V(\Gamma)^2 | d_\Gamma(a, b) = i\}$, то мы будем говорить, что группа G является *дистанционно-транзитивной*. Для графа Γ и множества $X \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X, которое также будем отождествлять с подграфом, индуцированным множеством $\mathrm{Fix}(X)$ в Γ.

Пусть G — группа подстановок на множестве X и $Y \subseteq X$. Через G_Y ($G_{\{Y\}}$) обозначается поточечный (соответственно, глобальный) стабилизатор множества Y в G. Если Y — G-инвариантное множество, то через G^Y обозначается группа подстановок, индуцируемая группой G на Y, таким образом, $G^Y \simeq G_{\{Y\}}/G_Y$. Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей ее порядка и через $\mathrm{Soc}(G)$ — цоколь группы G. Если H и G — две группы, то запись $H \leq G$ будет также применяться и для обозначения того, что группа H изоморфно вкладывается в G. Для натурального числа n и простого числа p через $(n)_p$ будем обозначать *p-часть числа n*, то есть максимальную степень числа p, делящую n. Для всех элементов g и x группы G через g^x обозначается элемент $x^{-1}gx$. Если A и B это некоторые непустые подмножества группы G, тогда мы полагаем $A^B = \{g^x | g \in A, x \in B\}$. Через G' и $G^{\#}$ обозначаются коммутант группы G и множество ее неединичных элементов соответственно. Если $G = G'$, то через $\mathrm{M}(G)$ обозначается мультипликатор Шура группы G.

Другие обозначения и терминология, используемые в этой статье, в основном, стандартны и могут быть найдены в [1, 2].

Далее в этом разделе приводятся вспомогательные результаты, используемые в доказательстве теорем 1 и 2.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах д.р.г. Γ дает матричное представление ψ группы G (называемое далее *стандартным*) в $GL_v(\mathbb{C})$, где $v = |V(\Gamma)|$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, § 3.7]) для каждого элемента $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где (Q_{ij}) — вторая матрица собственных значений графа Γ и $\alpha_j(g)$ — число вершин x графа Γ таких, что $d_\Gamma(x, x^g) = j$. Поскольку значения характеров являются целыми алгебраическими числами, то в случае если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, получим, что $\chi_i(g)$ — целое число.

Антиподальный д.р.г. диаметра 3 является антиподальным r-накрытием полного графа на $k+1$ вершинах, имеет массив пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ (см. [2]). Далее будем полагать $\lambda = k - (r-1)\mu - 1$ и $v = r(k+1)$.

В следующих двух утверждениях представлены известные ограничения на массив пересечений, а также формулы для характеров стандартного матричного представления группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3.

Предложение 2 (см. [2, 9]). *Пусть Γ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ и собственными значениями $k > n > -1 > -m$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) $1 \le (r-1)\mu \le k-1 \le \mu(2r-1) - 2$.
(2) *Кратности собственных значений n и $-m$ равны $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$ и $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$ соответственно.*
(3) *Если $\lambda \ne \mu$, то числа n и m — целые, $k = nm$, $r\mu = (m-1)(n+1)$ и $\lambda = \mu + n - m$.*
(4) *Если $\lambda = \mu$, то $n = m = \sqrt{k}$.*
(5) *Если $r > 2$, то $m \le n^2$, причем при $m = n^2$ окрестность любой вершины в Γ является сильно регулярным графом с собственными значениями $\lambda = (n-1)((n+1)^2/r - n)$, $n - (n+1)/r$ и $n - (n+1)^2/r$.*
(6) *Если k — нечетно, то μ — четно.*
(7) *Если $\mu = 1$, то $k - r + 1$ делит k, $(k-r+1)(k-r+2)$ делит $rk(k+1)$ и $(k-r+1)^2 \le k$.*
(8) *Граф Γ двудолен тогда и только тогда, когда $r = 2$ и $\mu = k-1$.*

Лемма 1 ([35, лемма 1]). *Пусть Γ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ и спектром $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^h$*

(где $m > 0$), $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\lambda \neq \mu$. Если $g \in G$, ψ — стандартное матричное представление группы G в $GL_{r(k+1)}(\mathbb{C})$,

χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности f, отвечающее собственному значению n,

χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности k, отвечающее собственному значению -1, и

χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности h, отвечающее собственному значению $-m$,

то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,

$$\chi_1(g) = ((m(r-1)+1)\alpha_0(g)+(1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n))+(\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n),$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1 = k - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/r,$$

$$\chi_3(g) = ((n(r-1)-1)\alpha_0(g)-(1+n)\alpha_3(g))/(r(m+n))+(-\alpha_1(g)+(k+1))/(m+n).$$

Если $|g| = p$ — простое число, то числа $\chi_1(g) - f$ и $\chi_2(g) - k$ делятся на p.

Группу всех автоморфизмов антиподального д.р.г. Γ диаметра 3, фиксирующих (как множество) каждый его антиподальный класс будем обозначать через $\mathcal{CG}(\Gamma)$ (она называется также *накрывающей группой* графа Γ, но в этой статье этот термин применяться не будет во избежание путаницы с теоретико-групповым понятием накрывающей группы). Нетрудно понять, что группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ действует точно и полурегулярно на каждом антиподальном классе графа Γ (см. [9, следствие 6.3]). Полезен следующий результат о графах Γ с большой абелевой группой $\mathcal{CG}(\Gamma)$.

Лемма 2 ([8, теорема 2.5])**.** *Пусть Γ — недвудольный антиподальный д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$. Если группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ абелева и действует транзитивно на каждом антиподальном классе графа Γ, то каждый простой делитель p числа r также делит и число $k+1$.*

Всюду далее в статье Γ — реберно симметричный антиподальный д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$ и собственными значениями $k > n > -1 > -m$, Σ — множество антиподальных классов графа Γ и G — подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, действующая транзитивно на дугах графа Γ. Тогда группа G индуцирует дважды транзитивную группу подстановок G^{Σ} на Σ.

Далее также предполагается, что группа G^{Σ} — аффинная, $F \in \Sigma$, $a \in F$, и используются следующие обозначения: $H = G_{\{F\}}$, K — ядро действия G на Σ (то есть $K = G \cap \mathcal{CG}(\Gamma)$), C — ядро действия $G_{\{F\}}$ на F и $\bar{G} = G/K = \bar{T}\bar{H}$, где $\bar{T}$ — нормальная в $\bar{G}$ элементарная абелева подгруппа порядка $p^e = v/r$, действующая регулярно на Σ и T — полный прообраз группы $\bar{T}$ в G. В работе [34] были рассмотрены случаи $r = 2$, $r = k$ и показано, что случай $\lambda = \mu$ невозможен. В случае $\mu = 1$ число p нечетно и граф Γ изоморфен второй окрестности некоторого геодезического бирегулярного графа и по [33] не существует. Поэтому будем считать, что $2 < r < k$, $\lambda \neq \mu$ и $\mu > 1$.

Для подгруппы $X \leq \mathcal{CG}(\Gamma)$ можно определить *частное* Γ^X графа Γ на множестве X-орбит, полагая две X-орбиты смежными, если в одной из них найдется вершина, смежная в Γ с вершиной из другой орбиты. Если при этом $1 < |X| < r$, то по [9, следствие 6.3] граф Γ^X является антиподальным д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k,(r-|X|)\mu,1;1,|X|\mu,k\}$ и ввиду предложения 2 не может быть двудольным, так как иначе граф Γ также являлся бы двудольным как $|X|$-кокликовое расширение графа Γ^X, что противоречило бы условию $r > 2$. Если к тому же $X \trianglelefteq G$, то группа $G/X \leq \mathrm{Aut}(\Gamma^X)$ действует транзитивно на дугах графа Γ^X. Эти два наблюдения являются основой для метода исключения допустимых подгрупп G и K, развиваемого в следующих разделах.

Лемма 3 ([35, лемма 3]). *Пусть $g \in G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф и $|g| = p$ — простое число, то либо*
  (*i*) *p не делит r, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = v$, и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$, либо*
  (*ii*) *p делит r, $\alpha_3(g) = tr$ и $\chi_1(g) = ((1-m)t + \alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$; в частности, если $\alpha_3(g) = v$, то $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$ и $\chi_3(g) = -n(k+1)/(m+n)$;*

(2) *если Ω содержит $t > 0$ антиподальных классов, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(k+1-t)$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/r - 1$ и $\chi_1(g) = (m(r-1)+1)\alpha_0(g)/(r(m+n)) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$;*

(3) *если $\alpha_2(g) = v$, то $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$.*

2. Доказательство предложения 3 и случай $K = 1$

Приведем сначала две вспомогательные леммы из [35], которые в совокупности с леммой 3 позволяют определить массив пересечений графа Γ в случае существования элемента $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ со свойством $\alpha_2(g) = v$ или $\alpha_3(g) = v$.

Лемма 4 ([35, лемма 4]). *Если $m + n = p^s$, где $s < e$, то $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1\}$, $\lambda - \mu = \pm 2$ и $r\mu \in \{2^e, 2^e - 4\}$.*

Лемма 5 ([35, лемма 5]). *Если $m + n = p^s x$, где $x > 1, (x, p) = 1$ и $s > 0$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *p нечетно и либо*
  (*i*) *$(m; n) = (p^{e/2} + 1; p^{e/2} - 1)$ и $r\mu = p^e$, либо*
  (*ii*) *p не делит $r\mu$ и p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}, $e \geq 2s$, и, в частности, если $e = 2s$, то $r\mu = p^e - 4$, $(m; n) = (p^{e/2} - 1; p^{e/2} + 1)$;*

(2) *$p = 2$, $(r\mu, 8) = 4$ и 2-часть числа $r\mu + 4 - 2^{e+1}$ равна 2^{2s-2}.*

Прежде чем приступить к доказательству основных результатов раздела, введем некоторые обозначения. Через X^∞ и $S(X)$ обозначаются последний член ряда коммутантов группы X и ее разрешимый радикал соответственно. Для конечной p-группы X через $\mho^s(X)$ обозначается p^s*-я степень* группы X, то есть подгруппа в X, порожденная множеством элементов $\{x^{p^s} | x \in X\}$, и через $\Omega_s(X)$ — p^s*-слой* группы X, то есть подгруппа в X, порожденная множеством элементов $\{x \in X | x^{p^s} = 1\}$ (см. [1, с. 5]). Ясно, что группы $\mho^s(X)$ и $\Omega_s(X)$ характеристичны в X.

Далее мы докажем предложение 3, в котором устанавливается строение группы G при наличии нормальной подгруппы порядка p^e. Оно также исправляет утверждение [35, предложение 2], в котором была пропущена возможность $G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$ (см. п. (2) предложения 3 ниже).

Предложение 3. *Если T содержит нормальную в G подгруппу порядка p^e, то $p = 2$, H действует дважды транзитивно на F и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $K = 1$, Γ *имеет массив пересечений* $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ *и либо* $H \simeq A_6$ *или* S_6 *и окрестность вершины — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$, *либо* $H \simeq GL_2(4)$ *или* $GL_2(4).Z_2$ *и окрестность вершины — объединение трех изолированных клик;*

(2) $K = E_r, r = \mu = 2^{e/2}$, Γ *имеет массив пересечений*

$$\{2^e - 1, (2^{e/2} - 1)2^{e/2}, 1; 1, 2^{e/2}, 2^e - 1\}$$

и $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$, T *— элементарная абелева или специальная группа порядка* $2^{e+e/2}$, $C_K(R) = 1$, *где* $R = G_a \cap GL_1(2^e)$, $C_R(K) = \langle \tilde{h} \rangle > 1$, $\alpha_1(\tilde{h}) = |R|2^{e/2+1}w$ *и* $0 \leq w \leq (e, 2^e - 1)/2$, *в частности, если* $|R| = 2^e - 1$, *то* $\alpha_1(\tilde{h}) = 0$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует регулярно на* $F - \{a\}$.

Доказательство. Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка $k + 1$. Тогда любая N-орбита содержит единственную вершину из каждого антиподального класса. Для вершины a графа Γ группа G_a действует транзитивно на $[a]$, поэтому каждая N-орбита состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2, и имеется всего t $(t < r)$ N-орбит, в каждой из которых a смежна точно с α вершинами, в частности, $k = t\alpha$. Для неединичного элемента $g \in N$ получим $\alpha_2(g) = v$ и по лемме 3 $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$. Теперь ввиду леммы 4 получим $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1\}$ и $r\mu \in \{2^e, 2^e - 4\}$.

Далее, G_a действует транзитивно на множестве неединичных элементов из N и группа NG_a индуцирует дважды транзитивную группу подстановок степени 2^e на a^N.

Вершина из $[a]$ смежна с $\alpha - 1$ вершинами из $a^N - \{a\}$, между $[a]$ и $a^N - \{a\}$ имеется точно $k(\alpha - 1)$ ребер, поэтому вершина из $a^N - \{a\}$ смежна "в среднем" с $\alpha - 1$ вершинами из $[a]$. Отсюда $\alpha - 1 = \mu$ и $k = t(\mu + 1)$. Так как $b_1 = (r - 1)\mu$, то $\lambda = k - b_1 - 1 = t + \mu - (r - t)\mu - 1$, $t(\mu + 1) = r\mu - \mu + 1 + \lambda$ и $t = r - (r - 1 + \mu - \lambda)/(\mu + 1)$.

1. Пусть $t = r - 1$. Тогда G_a действует транзитивно на $\Gamma_3(a)$ и $H = G_{\{F\}}$ действует дважды транзитивно на F. Пусть $\tilde{H} = H^F$ и $\tilde{S}$ — цоколь группы $\tilde{H}(\simeq H/C)$. Если $K \neq 1$, то K изоморфна регулярной нормальной подгруппе из $\tilde{H}$. Поэтому $K = 1$, если $\tilde{H}$ — почти простая группа, и K — элементарная абелева 2-группа порядка r, если $\tilde{H}$ — аффинная группа.

Имеем $k = (r - 1)(\mu + 1)$, $\lambda = r - 2$ и $\lambda - \mu = (r - 1) - (\mu + 1)$, поэтому $n = r - 1$, $m = \mu + 1$ и $m + n = r + \mu$ делит 2^e. Ввиду неравенства $m \leq n^2$ получим $\mu \leq r^2 - 2r$. Теперь $m = \mu + 1 = 2^{e/2} - 1, n = r - 1 = 2^{e/2} + 1$ и $r\mu = 2^e - 4$ или $m = \mu + 1 = 2^{e/2} + 1, n = r - 1 = 2^{e/2} - 1$ и $r\mu = 2^e$.

1.1. Предположим, что $\tilde{S}$ — простая неабелева группа и обозначим через S полный прообраз группы $\tilde{S}$ в H. Тогда $K = 1$ и по предложению 1 для G^Σ допустимы только знакопеременный, линейный, симплектический и G_2-типа случаи. Полный перебор соответствующих комбинаций для $\tilde{S}$ и H^∞ с учетом классификации почти простых 2-транзитивных групп подстановок (см. например [8, теорема 2.9]) показывает, что либо $S = H^\infty = A_r$, $r = 6, \mu = 2$ и $S_a = A_5$, либо $\tilde{S} = L_2(5)$ и снова $r = 6, \mu = 2$. Компьютерные вычисления в Magma [21] показывают, что в первом случае указанным условиям удовлетворяет единственный с точностью до изоморфизма д.р.г., причем окрестность вершины в нем — д.р.г. с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$ и группа H изоморфна группе A_6 или группе S_6, а во втором случае — также единственный с точностью до изоморфизма д.р.г., причем окрестность вершины в нем — объединение трех изолированных 5-клик и группа H изоморфна группе $GL_2(4)$ или группе $GL_2(4).Z_2$.

1.2. Теперь предположим, что $\tilde{H}$ — аффинная группа. Тогда $K \simeq K^F = \tilde{S}$ — регулярная элементарная абелева группа порядка $r = 2^{e/2}$ и $\tilde{H} = \tilde{S}\tilde{G}_a$. Положим $f = e/2$.

Ввиду предложения 1 для $\tilde{H}$ реализуется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $f = cd$, $d \geq 2$ и $SL_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a \leq \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) симплектические $f = cd$, d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a \leq Z_{2^c-1} \circ \Gamma Sp_d(2^c)$;

(iii) G_2-типа $f = 6c$ и $G_2(2^c)' \trianglelefteq \tilde{G}_a$;

(iv) одномерные $\tilde{G}_a \leq \Gamma L_1(2^f)$;

(v) исключительные $\tilde{G}_a \in \{A_6, S_6, A_7\}$.

Поскольку K индуцирует регулярную группу подстановок на множестве N-орбит на вершинах графа, то $N \leq C_G(K)$.

Ясно, что $T = KN, C_H(K) = C \times K$ и $C_G(K) = (K \times N)C$. Далее, группа $K \times N$ регулярна на вершинах графа Γ, поэтому $G = (K \times N) : G_a$ и $G/C_G(K) \simeq G_a/C \simeq \tilde{G}_a \leq GL_f(2)$. При этом $C \trianglelefteq G_a \simeq \bar{H}$ и $(G_a)^\infty \cap C \trianglelefteq G_a$.

Полный перебор соответствующих комбинаций для H и $\tilde{H}$ показывает, что допустим лишь случай (iv).

Итак, предположим, что $\tilde{G}_a \leq \Gamma L_1(2^f)(\simeq Z_{2^f-1}.Z_f)$. Тогда $G_a = C.(\tilde{G}_a)$ и $(G_a)^\infty \leq C$. Если C действует транзитивно на $[a]$, то NC действует 2-транзитивно на a^N и, следовательно, Γ — двудольный граф, противоречие с тем, что $r > 2$.

Поэтому $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$ и $|G_a|$ делит $((2^e-1)e, (2^f-1)f|C|) = (2^f-1)f((2^f+1)2, |C|)$. Значит, $(2^f+1)/(f, 2^f+1)$ делит $|C|$.

Далее, множество $\mathrm{Fix}(G_a)$ является блоком импримитивности группы G и $|\mathrm{Fix}(G_a)| = |N_G(G_a) : G_a| = 1$.

Имеем либо $T' = K = \Phi(T) = Z(T)$ и T — специальная группа, либо $\Phi(T) = 1$ и T — элементарная абелева группа порядка $2^{e+e/2}$. Действительно, если $T' = 1$ и $\Phi(T) = K$, то $K = \mho^1(T) = \Omega_1(T)$ и T — прямое произведение l_1 подгрупп, изоморфных Z_4, и l_2 подгрупп, изоморфных Z_2, при этом $2^{l_1+l_2}$ делит $2^{e/2}$ и $2^{2l_1+l_2} = 2^{e+e/2}$, противоречие.

Так как $G_a \simeq A \leq \Gamma L_1(2^e)$, то $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap GL_1(2^e)$ и $G_a/R \leq Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (2^e-1)/|R|$ R-орбит и α делит $(e, 2^e-1)$.

Далее, множество $\mathrm{Fix}(R)$ является блоком импримитивности группы TR и $|\mathrm{Fix}(R)| = |N_{TR}(R) : R| = |N_T(R)|$. Но $[N_T(R), R] \leq T \cap R = 1$, поэтому $|\mathrm{Fix}(R)| = |C_K(R)|$ и так как $R \trianglelefteq G_a$, то все R-орбиты на $F - \{a\}$ имеют одинаковую длину.

Если $C_K(R) > 1$, то $|\mathrm{Fix}(R)| \geq 2$, откуда $R \leq C$ и $(2^e-1)/(e, 2^e-1) \leq |R| \leq \mu + 1 = 2^{e/2} + 1$, противоречие.

Таким образом, $C_K(R) = 1$. Положим $R = \langle h \rangle$. Тогда $\alpha_0(h) = 1$, $\alpha_3(h) = r - 1$ и поскольку R действует полурегулярно на множестве вершин, не лежащих в F, и централизует h, то $\alpha_1(h)$ делится на $|R|$ и по лемме 1

$$\chi_1(h) = \frac{1 + \alpha_1(h) - (k+1)}{m+n} \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$1+\alpha_1(h)=1+w|R|\equiv 0 \pmod{2^{f+1}},$$

где $\alpha_1(h)=w|R|$ и $w\le r(e,2^e-1)$.

Предположим, что $C_R(K)=1$. Тогда по [1, утверждение 24.1]

$$R_0\le R\le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K))\simeq GL_f(2)$$

и поэтому $(2^e-1)/(e,2^e-1)$ делит $|GL_f(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e,2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди $f=3$. Но группа $GL_3(2)$ не содержит элементов порядка 21, противоречие.

Значит, $C_R(K)>1$. Положим $C_R(K)=\langle\tilde h\rangle$. Тогда $\alpha_0(\tilde h)=r$ и поскольку $C_R(K)$ действует полурегулярно на множестве вершин, не лежащих в F, и централизует KR, то $\alpha_1(\tilde h)$ делится на $|KR|$ и по лемме 1

$$\chi_1(\tilde h)=\frac{m(r-1)+\alpha_1(\tilde h)-k}{m+n}=\alpha_1(\tilde h)2^{-(e/2+1)}\in\mathbb{Z},$$

поэтому $\alpha_1(\tilde h)=|R|2^{e/2+1}w$ и $0\le w\le (e,2^e-1)/2$.

В частности, если $|R|=2^e-1$, то группа $R^*=R/C_R(K)$ изоморфна циклической подгруппе из $GL_f(2)$ порядка 2^f-1 и $R\simeq(R\cap C)\times R^*$ действует транзитивно на $F-\{a\}$.

2. Пусть $t<r-1$. Тогда $t>1$, Γ содержит $2(k+1)$-коклику и ввиду границы Хофмана для коклик (см. [2, предложение 3.7.2]) имеем $2(k+1)\le m(k+1)r/(k+m)$, поэтому $n+1\le r/2$ и $m-1\ge 2\mu$. Так как G_a действует транзитивно на множестве Δ, состоящем из N-орбит, пересекающих $[a]$, то для каждой вершины из $[a]$ множество ее соседей пересекает ровно s различных N-орбит из Δ для некоторого $s<t-1$ (в случае $s=t-1$ множество вершин, лежащих в a^N, вместе с вершинами орбит из Δ, индуцирует связный подграф степени k из Γ, что невозможно).

Число ребер между объединением N-орбит, в которых нет вершины a и смежных с ней вершин, и $[a]$ равно $(r-t-1)k\mu$. Поэтому вершина из $[a]$ смежна точно с $(r-t-1)\mu$ вершинами в этом объединении, $r-t-1$ делится на $\mu+1$ и $(r-t-1)\mu/(\mu+1)=t-s-1$. Отсюда

$$z\mu=(r-2t+s)\mu=t-s-1 \text{ и } r-t-1=z(\mu+1),$$

следовательно,

$$t=s+1+z\mu \text{ и } r=s+2+z(2\mu+1).$$

Так как $s(\mu+1)=\lambda+(t-1)\mu$, то

$$s=z\mu^2+\lambda \text{ и } t\ge z\mu^2+z\mu+1.$$

Имеем $t(\mu+1)=k=mn$, $m\ge 2\mu+1$, поэтому $n\le\min\{r/2-1,t(\mu+1)/(2\mu+1)\}$.

Напомним, что $\lambda=t+\mu-(r-t)\mu-1$.

Ввиду леммы 4 допустимы только следующие две возможности (I) и (II).

(I) Пусть $(m;n)=(2^{e/2}-1;2^{e/2}+1)$. Тогда $r\mu=2^e-4$, $\lambda-\mu=n-m=2$, $t(\mu+1)=r\mu+3$, $t=r-(r-3)/(\mu+1)$, $r>\mu+4$. Поэтому

$$r-t=(r-3)/(\mu+1) \text{ и } r-t-1=(r-\mu-4)/(\mu+1).$$

Далее, $r-t=(\mu+1)(t-s-1)/\mu+1=(r-3)/(\mu+1)$. Отсюда

$$t-s-1=\mu(r-\mu-4)/(\mu+1)^2.$$

Кроме того,

$$s = (t\mu + \lambda - \mu)/(\mu + 1) = (t\mu + 2)/(\mu + 1).$$

Тогда

$$t - s - 1 = (t - 2)/(\mu + 1) - 1$$

и μ делит $t - 3$ и $s - 2$. К тому же, $(r - \mu - 4)$ делится на $(\mu + 1)^2$.

(II) Пусть $(m; n) = (2^{e/2} + 1; 2^{e/2} - 1)$. Тогда $r\mu = 2^e$, $\lambda - \mu = n - m = -2$, $t(\mu + 1) = r\mu - 1$, $t = r - (r + 1)/(\mu + 1)$, $r > \mu$. Поэтому

$$r - t = (r + 1)/(\mu + 1) \text{ и } r - t - 1 = (r - \mu)/(\mu + 1).$$

Далее, $r - t = (\mu + 1)(t - s - 1)/\mu + 1 = (r + 1)/(\mu + 1)$. Отсюда

$$t - s - 1 = \mu(r - \mu)/(\mu + 1)^2.$$

Кроме того,

$$s = (t\mu + \lambda - \mu)/(\mu + 1) = (t\mu - 2)/(\mu + 1).$$

Тогда

$$t - s - 1 = (t + 2)/(\mu + 1) - 1$$

и μ делит $t + 1$ и $s + 2$. К тому же, $(r - \mu)$ делится на $(\mu + 1)^2$.

Граф $\Omega = \tilde{\Gamma}$ на множестве N-орбит реберно регулярен с параметрами (r, t, λ_Ω), где $\lambda_\Omega = s$, и очевидно, $d(\Omega) = 2$. Каждая вершина из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна "в среднем" с $t\mu/(\mu + 1)$ вершинами из $\Omega_1(\tilde{a})$. Если $(t, \mu + 1) > 1$, то

$$t = (t, \mu + 1)y \text{ и } s(\mu + 1)/(t, \mu + 1) = y\mu + (\lambda - \mu)/(t, \mu + 1),$$

противоречие с тем, что $\lambda - \mu = \pm 2$. Значит, граф Ω не является сильно регулярным и, как следствие, G_a имеет не менее двух орбит на вершинах из $F - \{a\}$, несмежных с вершинами из a^N.

Допустим, что вершина $\tilde{b}$ из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна с $z\mu + z - 1$ вершинами из $\Omega - \tilde{a}^\perp$. Тогда $\tilde{b}$ смежна с $s - z + 2$ вершинами из $\Omega_1(\tilde{a})$. Поэтому

$$s - z + 2 < t\mu/(\mu + 1) \text{ и } z\mu^2 \leq s < z\mu^2 + z\mu + z - \mu - 2,$$

в частности, $z > 1$ и $\lambda < z\mu + z - \mu - 2$.

Заметим, что для вершины a действие G_a на $a^N - \{a\}$ импримитивное с блоками вида $[b] \cap a^N$ для t вершин b из F, смежных с вершинами из a^N.

Покажем сначала, что $e \geq 6$ и случай (v) из предложения 1 невозможен. Пусть $e = 4$. Ввиду леммы 4 $(m; n) = (3; 5)$ или $(5; 3)$. В первом случае получим $r\mu = 12$, $t(\mu + 1) = r\mu + 3 = 15$ и поэтому $\mu = 2, 4$, $r = 6, 3$, но $r > \mu + 4$, противоречие. Во втором случае $r\mu = 16$, $t(\mu + 1) = r\mu - 1 = 15$, $t = r - (r + 1)/(\mu + 1)$, $r > \mu$, поэтому $\mu = 2$, $r = 8$, но $(r - \mu)$ делится на $(\mu + 1)^2$, снова противоречие.

Пусть $\tilde{H} = H^F (\simeq H/C)$ и $\tilde{S}$ — цоколь группы $\tilde{H}$. В случае $|K| < r$ граф Γ^K допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов G/K, которая индуцирует точное действие на Σ.

Рассмотрим далее два экстремальных случая: $|K| = r$ и $K = 1$.

2.1. Пусть $|K| = r$. Тогда $G_a \simeq H^\Sigma$ и по предложению 1 для G_a допустима одна из следующих возможностей:

(i) (линейные) $e = cd$, $d \geq 3$ и $SL_d(2^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) (симплектические) $e = cd$, d четно, $d \geq 2$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq G_a \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) (G_2-типа) $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq G_a \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;
(iv) (одномерные) $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$.

2.1.1. Пусть $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$.

Покажем сначала, что возможность (I) не реализуется. Предположим обратное. Тогда число μ четно, $(r)_2 \leq 2$ и поэтому либо группа K содержит (характеристическую) подгруппу K_1 индекса 2, нормальную в G (см. например, [22, теорема 4.6]), либо K имеет нечетный порядок. В первом случае получим, что G/K_1 — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ^{K_1} и Γ^{K_1} — двудольный антиподальный д.р.г. диаметра 3, противоречие. Во втором случае получим, что $\Gamma^{K'}$ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 и $\mathcal{CG}(\Gamma^{K'}) \simeq K/K'$ — абелева группа нечетного порядка, противоречие с леммой 2.

Таким образом, $\mu = 2^l \geq 2$ и $\Gamma^{\Phi(K)}$ — антиподальный д.р.г. диаметра 3, допускающий транзитивную на дугах группу автоморфизмов $G/\Phi(K)$. Так как $\mu+1 = 2^l+1$, то l делит e и $(e)_2 > (l)_2$. Кроме того, $r-\mu = z(\mu+1)^2$, откуда $\mu+1$ делит $e/l-2$. Как и выше получим, что $|K/\Phi(K)| > 2$.

Так как $G_a \simeq A \leq \Gamma L_1(2^e)$, то $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap GL_1(2^e)$ и $G_a/R \leq Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e-1)/(e,2^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (2^e-1)/|R|$ R-орбит, α делит $(e, 2^e-1)$.

Пусть $R = \langle g \rangle$, $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g)+\alpha_3(g) = r$ и по лемме 1

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Пусть $C_R(K) = \langle \tilde{g} \rangle$.

Если $C_R(K) > 1$, то $KC_R(K) \leq C_G(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и поскольку $\mathrm{Fix}(C_R(K)) = F$, то $|KC_R(K)|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$ и по лемме 3

$$\chi_1(\tilde{g}) = (m(r-1)+\alpha_1(\tilde{g})-k)/2^{e/2+1} = (2^{e/2}r+r-2^{e/2}+\alpha_1(\tilde{g})-2^e)/2^{e/2+1} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $r \leq 2^{e/2} \leq \mu$, противоречие с тем, что $t < r-1$.

Значит, $C_R(K) = 1$ и по [1, утверждение 24.1]

$$R_0 \leq R \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$$

и поэтому $(2^e-1)/(e,2^e-1)$ делит $|GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e,2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди $e = 6$ и поэтому $l \leq 2$, противоречие с тем, что $\mu+1$ делит $e/l-2$.

2.1.2. Пусть $e = cd$, $d \geq 3$, $q = 2^c$ и $SL_d(q) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_d(q)$. По [31] степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случая $(d;q) = (4;2)$. При $(d;q) = (4;2)$ имеем $e = 4$, противоречие с доказанным выше. Группа $X = (G_a)^\infty \simeq SL_d(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [20] стабилизатор вершины a^* в X из этой орбиты изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $SL_d(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q^{l(d-l)} : ((SL_l(q) \times SL_{d-l}(q)) : q-1)$, где $0 < l < d$ (см. также [27]). Так как $t = (q^d-1)/(\mu+1)$ и t делится на

$$\frac{|SL_d(q)|}{q^{l(d-l)}|SL_l(q)||SL_{d-l}(q))|(q-1)} = \frac{(q^{(d-l+1)}-1)(q^{(d-l+2)}-1)\cdots(q^d-1)}{(q^l-1)(q^{(l-1)}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

то $l \in \{1, d-1\}$ (иначе $\mu+1 < 1$, что невозможно) и $X_{a^*} \leq M \simeq S = q^{d-1} : (SL_{d-1}(q)) : q-1)$, где S — стабилизатор l-мерного подпространства в группе

$SL_d(q)$ из ее естественного модуля. Таким образом, t делится на $(q^d-1)/(q-1)$ и $\mu+1$ делит $q-1$. Не ограничивая общности, можно полагать $l=1$.

Обозначим $y=|(a^*)^M|$. Тогда $y=(q-1)/(\mu+1)$. Предположим, что M' сдвигает вершину в $(a^*)^M$. Тогда степень минимального подстановочного представления группы $SL_{d-1}(q)$ не превосходит числа $q-1$ и по [31] $d=3$ и $q\in\{5,7,9,11\}$, противоречие.

Итак, $M'\le X_{a^*}\trianglelefteq M\simeq q^{d-1}:(SL_{d-1}(q)):q-1)$. Так как X действует 2-транзитивно на множестве блоков системы импримитивности σ на $\Omega_1(\widetilde{a})$, содержащей блок $(a^*)^M$, то длина неодноточечной M-орбиты на σ равна $q(q^{d-1}-1)/(q-1)$. Более того, группа M' транзитивна на множестве вершин из $(a^*)^X-(a^*)^M$.

Предположим, что X фиксирует поточечно множество вершин из $F-\{a\}$, несмежных с вершинами из a^N. Тогда $\Omega_1(\tilde{b})=\Omega_1(\tilde{a})$ для любой вершины $\tilde{b}\in\Omega-\tilde{a}^{\perp}$ и по транзитивности действия G на Ω заключаем, что $\Omega_2(\tilde{c})$ — коклика для любой вершины $\tilde{c}\in\Omega$. Но тогда Ω — сильно регулярный граф, противоречие.

Значит, X сдвигает некоторую вершину из $\Omega-\widetilde{a}^{\perp}$ и поэтому $s>r-t-1\ge(q^d-1)/(q-1)$. Таким образом, $s=x_0+yq(q^{d-1}-1)/(q-1)$ для некоторого $0\le x_0\le y-1$. Но тогда

$$s(\mu+1)=x_0(\mu+1)+y(\mu+1)q(q^{d-1}-1)/(q-1)=\\ y\mu(q^d-1)/(q-1)\pm 2=t\mu\pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0\le i\le d-1$, неотрицателен и не превосходит $q-1$. Поэтому $q-1=y\mu$, противоречие.

2.1.3. Пусть $e=cd$, d четно, $d\ge 2$, $q=2^c$ и $Sp_d(q)\trianglelefteq G_a\le Z_{q-1}\circ\Gamma Sp_d(q)'$.

Рассмотрим группу $Y=(G_a)^\infty K$. Так как Y действует транзитивно на F, то множество $\mathrm{Fix}(Y_a)$ является блоком импримитивности Y на F, $|\mathrm{Fix}(Y_a)|=|N_Y(Y_a):Y_a|$ и следовательно, $|N_Y(Y_a):Y_a|$ делит r. Имеем $Y_a=(G_a)^\infty$. Если $\mathrm{Fix}(Y_a)=F$, то из транзитивности Y_a на $[a]$ получим $t=1$, противоречие. Значит, $\mathrm{Fix}(Y_a)\subset F$, то есть $|N_Y(Y_a):Y_a|<r$.

Заметим, что $C_{Y_a}(K)=1$. Действительно, если $1\ne h\in C_{Y_a}(K)$, то $a^{hg}=a^{gh}=a^g$ для всех $g\in K$, то есть $h\in C\cap Y_a$ и $Y_a\le C$, противоречие.

Как было доказано выше, $e>4$, поэтому далее будем считать, что $(d;q)\ne(4;2)$. По [31] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_d(q)$ при $q\ge 3$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d=2$, $q\in\{5,7,9,11\}$, случая $d\ge 4$ и $q=2$ и случая $(d;q)=(4;3)$.

2.1.3.1. Пусть $d\ge 4$. Тогда группа $X=(G_a)^\infty\simeq Sp_d(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [20] стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $Sp_d(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q^{\tilde{k}(\tilde{k}+1)/2}.q^{2\tilde{k}\tilde{m}}:(GL_{\tilde{k}}(q)\times Sp_{2\tilde{m}}(q))$, где $0<\tilde{k}\le\tilde{k}+\tilde{m}=d/2$ (см. также [27, теорема 3.7]). Так как $t=(q^d-1)/(\mu+1)$ и t делится на

$$\frac{|Sp_d(q)|}{q^{\tilde{k}(\tilde{k}+1)/2+2\tilde{k}\tilde{m}}|GL_{\tilde{k}}(q)||Sp_{2\tilde{m}}(q))|}=\frac{(q^{2(d/2)}-1)(q^{2(d/2-1)}-1)\cdots(q^{2(\tilde{m}+1)}-1)}{(q^{\tilde{k}}-1)(q^{\tilde{k}-1}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

то $\tilde{m} \leq 1$ и $d = 4$, (иначе $\mu + 1 < 1$, что невозможно), то есть $(\tilde{m}; \tilde{k}) = (0; 2)$ или $(1; 1)$, t делится на $(q^d - 1)/(q - 1)$ и $\mu + 1$ делит $q - 1$. При этом максимальная подгруппа M группы X, содержащая стабилизатор X_{a^*} точки a^* в X, изоморфна группе вида $q^3 : (L_2(q) \times q - 1)$ из $Sp_4(q)$ (см., например, [31]). Пусть σ — система импримитивности группы X на $(a^*)^X$, содержащая блок $(a^*)^M$. Если $(\tilde{m}; \tilde{k}) = (0; 2)$, то X_{a^*} фиксирует 2-мерное изотропное подпространство в соответствующем симплектическом модуле V и действие X на блоках системы σ эквивалентно действию X на 2-мерных изотропных подпространствах. Если $(\tilde{m}; \tilde{k}) = (1; 1)$, то X_{a^*} фиксирует 1-мерное подпространство в соответствующем симплектическом модуле и действие X на блоках системы σ эквивалентно действию X на 1-мерных подпространствах. Представители этих двух классов максимальных подгрупп в $Sp_4(q)$ сопряжены в $\mathrm{Aut}(Sp_4(q))$ (см. [23, таблица 8.14]), поэтому для последующего определения длин орбит некоторых подгрупп из X_{a^*} на V достаточно рассмотреть случай $(\tilde{m}; \tilde{k}) = (1; 1)$.

Пусть $y = (q-1)/(\mu+1)$. Тогда $y = |(a^*)^M|$, $t = y(q^2+1)(q+1)$ и $(y, \mu+1) = 1$. Как и выше доказывается, что X сдвигает некоторую вершину $\widetilde{a^{**}} \in \Omega - \tilde{a}^\perp$ и следовательно, $s > r - t - 1 \geq (q^2 + 1)(q + 1)$. Более того, по [23, таблица 8.14] порядок каждой неединичной X-орбиты на $\Omega - \tilde{a}^\perp$ делится на $(q^2 + 1)(q + 1)$.

Заметим, что $(X_{a^*})' \simeq q^3.SL_2(q)$, при этом на соответствующем модуле V нормальная подгруппа порядка q^3 из $(X_{a^*})'$ имеет ровно $q - 1$ одноточечных орбит, ровно $q - 1$ орбит длины q^3 и ровно $q^2 - 1$ орбит длины q. При этом подгруппа из $(X_{a^*})'$, изоморфная $SL_2(q)$, действует тривиально на одной из гиперболических прямых, содержащей 1-мерное подпространство, отвечающее вершине a^*, и транзитивно на ненулевых векторах ортогональной ей гиперболической прямой. Поэтому группа $(X_{a^*})'$ имеет орбиту длины $q(q^2 - 1)$ на V. Таким образом, на $(a^*)^X$ имеется ровно y $(X_{a^*})'$-орбит длины 1, ровно y $(X_{a^*})'$-орбит длины q^3 и ровно одна $(X_{a^*})'$-орбита длины $q(q^2 - 1)/(\mu + 1) = yq(q + 1)$. Поэтому

$$s = x_1 + x_2 q^3 + x_3 yq(q + 1)$$

для некоторых $0 \leq x_1 \leq y - 1, 0 < x_2 \leq y, 0 \leq x_3 \leq 1$. Тогда

$$s(\mu + 1) = x_1(\mu + 1) + x_2(\mu + 1)q^3 + x_3(\mu + 1)yq(q + 1) = \\ y\mu q^3 + y\mu q^2 + y\mu q + y\mu \pm 2 = t\mu \pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0 \leq i \leq 3$, неотрицателен и не превосходит $q - 1$. Отсюда $x_2(\mu + 1) = y\mu$ и $\mu + 1$ делит y, противоречие.

2.1.3.2. Пусть $d = 2$, т. е. $2^e = q^2$. Тогда группа $X = (G_a)^\infty \simeq Sp_2(q) = SL_2(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [20] стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $Sp_2(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q.GL_1(q)$, поэтому $\mu + 1$ делит $2^c - 1$, t делится на $2^c + 1$ и $z(\mu + 1) \geq 2^c + 1$. По [27, теорема 3.7] следующая за минимальной степень примитивного подстановочного представления группы $Sp_2(2^c)$ равна $2^{c-1}(2^c - 1)$ или $2^{c/2}(2^c + 1)$ (при четном c).

Предположим, что X не имеет одноточечных орбит на $\Omega - \tilde{a}^\perp$. Тогда либо $z\mu + z$ делится на $2^c + 1$, либо

$$z\mu + z \geq 2^{c-1}(2^c - 1) + (2^c + 1) = 2^{c-1}(2^c + 1) + 1.$$

В случае (I) имеем $r\mu+4=2^{2c}$. Тогда $r=z\mu^2+2z\mu+\mu+z+4$ и $t=z\mu^2+z\mu+\mu+3$. Если $z\mu+z$ делится на 2^c+1, то t взаимно просто с $\mu+1$, $(t,2^c+1)=(\mu+3,2^c+1)$ и 2^c+1 делит $\mu+3$. Таким образом, $\mu=2^c-2$ и $r=2^c+2$, противоречие. Значит,

$$r=\mu(z\mu+z)+(z\mu+z)+\mu+4\geq(\mu+1)(2^{c-1}(2^c+1)+1)+\mu+4>2^{2c},$$

противоречие.

В случае (II) имеем $r\mu=2^{2c}$, $\mu=2^l$ и $r=z(\mu+1)^2+\mu=2^{2c-l}$. Но 2^c+1 не делит $2^l(2^{2c-2l}-1)$, поэтому $r\leq z\mu+z$, противоречие.

Пусть $a^*\in F$ и $|(a^*)^X|=t$. Так как $(X_{a^*})'\simeq E_q$ имеет на $(a^*)^X$ ровно $y=(2^c-1)/(\mu+1)$ орбит длины q и ровно y одноточечных орбит, то $s=x_1+x_2q$ для некоторых $0\leq x_1\leq y-1, 0<x_2\leq y$. Тогда

$$s(\mu+1)=x_1(\mu+1)+x_2(\mu+1)q=y\mu q+y\mu\pm 2=t\mu\pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0\leq i\leq 1$, неотрицателен и не превосходит $q-1$. Поэтому $x_2(\mu+1)=y\mu$ и $\mu+1$ делит y, противоречие.

2.1.4. Пусть $e=6c$, $q=2^c$ и $G_2(q)'\simeq(G_a)^\infty\trianglelefteq G_a\leq Z_{q-1}\circ\mathrm{Aut}(G_2(q))$. Тогда группа $X=(G_a)^\infty$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [20] (см. также [27, таблица 4.1]) стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $G_2(2^c)'$. Такая подгруппа имеет вид $q^{2+3}.GL_2(q)$ или $q^{1+4}.GL_2(q)$, поэтому $\mu+1$ делит $q-1$ и t делится на $(q^6-1)/(q-1)$. Если X поточечно фиксирует $r-t-1=z\mu+z$ вершин из $\Omega-\tilde{a}^\perp$, то получим противоречие как и выше.

По [32] степень минимального подстановочного представления группы X равна 28 в случае $c=1$ (напомним, что $G_2(2)'\simeq U_3(3)$), 416 в случае $c=2$ и $(q^6-1)/(q-1)$ в случае $c>2$.

Если $c=1$, то $2^e=2^6$ и $64/3\geq t\geq z\mu+z\geq 28$, противоречие.

Если $c=2$, то $2^e=2^{12}=4096$ и $z\mu+z\geq 416$, что влечет $\mu=2$ и $t=1365$, противоречие с тем, что $\mu+1$ не делит t.

Поэтому $z(\mu+1)\geq(q^6-1)/(q-1)$ и $c>2$. Обозначим через M (максимальную) подгруппу в X индекса t/y, содержащую X_{a^*}.

Заметим, что имеется всего четыре M-орбиты на множестве блоков системы импримитивности σ на $\Omega_1(\widetilde{a})$, содержащей блок $(a^*)^M$. Эти орбиты имеют длины 1, $q(q+1)$, $q^3(q+1)$ и q^5 (см. [32, теорема 1]). Если $M\simeq q^{2+3}.GL_2(q)$, то действие X на σ эквивалентно (примитивному) действию X на 1-мерных изотропных подпространствах соответствующего 8-мерного пространства и стабилизатор ненулевого изотропного вектора в X, отвечающего вершине a^*, действует транзитивно на ненулевых векторах представителя M-орбиты в случаях, когда ее длина равна $q(q+1)$ или $q^3(q+1)$ (см. [27, § 4.3]). Если $M\simeq q^{1+4}.GL_2(q)$, то действие X на σ эквивалентно (примитивному) действию X на правых смежных классах X/M и аналогично, группа M' в этом представлении действует транзитивно на $q-1$ правых смежных классах группы X по M', содержащихся в классе Mx из орбиты длины $q(q+1)$ или $q^3(q+1)$. Так как группа X_{a^*} нормальна в M, то каждая M-орбита на $(a^*)^X$ является объединением некоторого числа X_{a^*}-орбит на $(a^*)^X$, причем это число делит y. Учитывая, что $t/y\leq z(\mu+1)<t$ и $(y,q(q+1))=1$, получим $y\neq 1$ и поэтому каждая M-орбита на σ совпадает с некоторой X_{a^*}-орбитой на σ. Поэтому $s=$

$x_1+x_2q+x_3q^2+x_4q^4+x_5q^5$ для некоторых $0\le x_1\le y-1, 0\le x_2,x_3,x_4,x_5\le y$. Тогда

$$s(\mu+1)=(x_1+x_2q+x_3q^2+x_4q^4+x_5q^5)(\mu+1)=y\mu(q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)\pm 2=t\mu\pm 2,$$

противоречие, как и выше.

2.2. Пусть теперь $K=1$. Тогда $H\simeq H^\Sigma$ и, как и в случае 2.1, по предложению 1 для H^Σ выполняется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $e=cd$, $d\ge 3$ и $SL_d(2^c)\trianglelefteq H^\Sigma\le \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) симплектические $e=cd$, d четно, $d\ge 1$, $q=2^c$ и $Sp_d(q)\trianglelefteq H^\Sigma\le Z_{q-1}\circ\Gamma Sp_d(q)$;

(iii) G_2-типа $e=6c$, $q=2^c$ и $G_2(q)'\trianglelefteq H^\Sigma\le Z_{q-1}\circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) одномерные $H^\Sigma\le\Gamma L_1(2^e)$.

2.2.1. Пусть $H^\Sigma\le\Gamma L_1(2^e)$. Тогда $\Gamma L_1(2^e)$ содержит подгруппу индекса r, поэтому r делит $(2^e-1,r)e$. В случае $(2^e-1,r)=1$ получим $2^e-1<e^2$ и $e\le 4$, противоречие. В случае $(2^e-1,r)=3$ получим $2^e-1<9e^2$ и $e\le 9$, при этом $r\le e$ в случаях $e=5,6,7,9$ и $r=12,24$ в случае $e=8$, противоречие.

Теперь если группа H^∞ фиксирует хотя бы одну точку из F, то группа $H^\infty\le C$ действует транзитивно на $[a]$ и таким образом, Γ — двудольный граф, противоречие.

Поэтому можно считать, что H^∞ действует без неподвижных точек на F. Пусть $Y=H^\infty\cap G_a$ и $l=|H^\infty:Y|$. Тогда l делит r и G_a действует транзитивно на $\Omega_1(\widetilde{a})$. При этом G_a фиксирует H^∞-орбиту, содержащую вершину $\widetilde{a}$, и действует транзитивно на H^∞-орбитах на Ω, пересекающих $\Omega_1(\widetilde{a})$.

Заметим, что для подгруппы $(H^\infty)_{\{E\}}$, где $E\in\Sigma-\{F\}$, имеем $|H^\infty:(H^\infty)_{\{E\}}|=2^e-1$ и для вершины $b\in[a]\cap E$ имеем $(H^\infty)_b=Y_b$ и

$$|H^\infty:Y_b|=|H^\infty:(H^\infty)_{\{E\}}||(H^\infty)_{\{E\}}:Y_b|=|H^\infty:Y||Y:Y_b|,$$

поэтому 2^e-1 делит $(2^e-1,r)|Y:Y_b|$.

Если $|Y:Y_b|=2^e-1$, то есть группа Y транзитивна на $[a]$, то в силу связности графа Ω получим, что H^∞ имеет не более двух орбит на F.

Если же $|Y:Y_b|=(2^e-1)/3$, то $(r)_2=2$.

Предположим, что H^∞ имеет более двух орбит на F. Тогда любая H^∞-орбита на Ω является кокликой в Ω, $(r)_2=2$ и для любой вершины c из H^∞-орбиты, содержащей вершину a, группа $(H^\infty)_c$ имеет ровно три орбиты на $[c]$ (очевидно, каждая из них — длины $(2^e-1)/3$). Рассмотрим граф Φ, множеством вершин которого являются H^∞-орбиты на Ω, а множеством ребер — пары различных H^∞-орбит на Ω, некоторые представители которых смежны в Ω. Тогда граф Φ регулярен степени 3 и $d(\Phi)=2$. Значит, $|\Phi|\le 10$ и так как степень вершины в Φ нечетна, то $|\Phi|=6$ или 10, то есть все H^∞-орбиты на F имеют нечетную длину.

Пусть далее M — это максимальная подгруппа в H^∞, содержащая Y. Тогда, рассмотрев допустимые возможности (I) и (II) для $r\mu$, получим, что $|H^\infty:M|$ не делится на 4 или является степенью 2.

2.2.2. Пусть $e=cd$, $d\ge 3$, $q=2^c$ и $SL_d(q)\trianglelefteq H^\Sigma\le\Gamma L_d(q)$. Имеем $M\ge Z(H^\infty)$. Поэтому $\widetilde{M}=M/Z(H^\infty)$ — это максимальная подгруппа в $\widetilde{H^\infty}=H^\infty/Z(H^\infty)\simeq L_d(q)$.

Пусть l_0 — длина $Z(H^\infty)$-орбиты на F. Заметим, что если $l_0 > 1$, то $l_0 = (l_0, 2^c - 1) = (r, 2^e - 1) = 3$ и следовательно, $|H^\infty : Y|_3 = 3$.

Если длина H^∞-орбиты на F нечетна, то по [20] группа $\widetilde{M}$ изоморфна параболической максимальной подгруппе из $SL_d(q)$ и $|H^\infty : Y|$ делится на

$$\frac{|SL_d(q)|}{q^{l(d-l)}|SL_l(q)||SL_{d-l}(q))|(q-1)} = \frac{(q^{(d-l+1)}-1)(q^{(d-l+2)}-1)\cdots(q^d-1)}{(q^l-1)(q^{(l-1)}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

где $0 < l < d$ (см. также [27]). Но $(r, 2^e - 1)$ делит 3, поэтому ввиду теоремы Жигмонди получим $e = 6$, $d = 3$, противоречие.

Значит, H^∞ имеет не более двух орбит на Ω. Если этих орбит — две, то, в силу связности графа Ω, каждая из них является $(r/2)$-кокликой в Ω. В свою очередь, каждой из этих коклик соответствует $(2^e r/2)$-коклика в Γ, противоречие с границей Хофмана для коклик (см. [2, предложение 3.7.2]).

Таким образом, группа H^∞ транзитивна на F.

Так как

$$2^e - 1 > |H^\infty : Y| = \frac{|SL_d(q)|}{|Y|} = \frac{q^{d(d-1)/2}(q^d-1)(q^{d-1}-1)\cdots(q^2-1)}{|Y|},$$

то

$$|M|^2 > q^{d(d-1)}(q^{d-1}-1)^2\cdots(q^2-1)^2 \geq |H^\infty|$$

и

$$|\widetilde{M}|^2 > q^{d(d-1)}(q^{d-1}-1)^2\cdots(q^2-1)^2/(d,q-1)^2 \geq |\widetilde{H^\infty}|.$$

Предположим, что подгруппа $\widetilde{M}$ имеет негеометрический тип (см. [24, § 4.2–4.3] или [23, § 2.1–2.2]). Тогда по теореме Ашбахера (см., например, [23, теорема 2.1.5]) $\widetilde{M}$ — почти простая группа. Если $\mathrm{Soc}(\widetilde{M}) \simeq A_{\tilde{d}}$, где $\tilde{d} = d+1, d+2$, то

$$2(\tilde{d}!) \geq \frac{|M|}{(d,q-1)} > \frac{|H^\infty|}{(d,q-1)(q^d-1)},$$

противоречие. Следовательно, $\mathrm{Soc}(\widetilde{M}) \not\simeq A_{\tilde{d}}$. Но по [24, теорема 4.30] $|\widetilde{M}|^2 < q^{6ud}$, где $u = 2$ при $H^\infty = U_d(q)$ и $u = 1$ в остальных случаях, то есть

$$|H^\infty| < |M|^2 < q^{6ud}(d,q-1)^2.$$

Отсюда $u = 1$ и $d \leq 6$ или $u = 2$ и $d \leq 12$. Так как $|\widetilde{H^\infty} : \widetilde{M}|$ делится на 4 и не является степенью 2, то из [24, предложение 4.28] следует, что $d \leq 6$ и $\widetilde{H^\infty} \simeq L_4(2)$ и $\widetilde{M} \simeq A_7$. Тогда $|H^\infty : M| = 8$ и так как A_7 не содержит собственных подгрупп индекса, делящего r, то $M = Y$, $r = 8$ и $e = 4$, противоречие.

Если подгруппа $\widetilde{M}$ имеет геометрический тип, то по [24, предложение 4.7] и теореме Ашбахера допустимый индекс максимальной подгруппы в H^∞, содержащей Y, делится на 4 и не является степенью 2, противоречие.

2.2.3. Пусть $e = cd$, d четно, $d \geq 2$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$. По [31] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d = 2, q \in \{5,7,9,11\}$, $d \geq 4$ и $q = 2$, $d = 4, q = 3$. Как и выше, $(d; q) \neq (4; 2)$.

2.2.3.1. Пусть $d \geq 4$. В этом случае ввиду [27, теорема 3.7] группа $Sp_d(q)$ не содержит максимальных подгрупп допустимого индекса, не делящегося на 4 или равного степени 2, за исключением параболических максимальных подгрупп или максимальных подгрупп негеометрического типа.

Если M изоморфна параболической максимальной подгруппе из $Sp_d(q)$, то $M \simeq q^{k(k+1)/2}.q^{2km} : (GL_k(q) \times Sp_{2m}(q))$, где $0 < k \leq k+m = d/2$, и r делится на

$$\frac{|Sp_d(q)|}{q^{k(k+1)/2+2km}|GL_k(q)||Sp_{2m}(q))|} = \frac{(2^{2c(d/2)}-1)(2^{2c(d/2-1)}-1)\cdots(2^{2c(m+1)}-1)}{(2^{ck}-1)(2^{c(k-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1)(2^c-1)}.$$

Но $(r, 2^e-1)$ делит 3, поэтому ввиду теоремы Жигмонди получим $e=6$, противоречие.

Отсюда, как и в случае 2.2.2, получим, что группа H^∞ транзитивна на F.

По [27, теорема 3.7] если M изоморфна максимальной подгруппе негеометрического типа из $Sp_d(q)$, то M — почти простая группа и простая группа $\mathrm{Soc}(M)$ действует абсолютно неприводимо на естественном $Sp_d(q)$-модуле. Так как

$$2^e-1 > |H^\infty : Y| = \frac{|Sp_d(q)|}{|Y|} = \frac{q^{d^2/4}(q^{2(d/2)}-1)(q^{2(d/2-1)}-1)\cdots(q^2-1)}{|Y|},$$

то при $d \geq 4$ имеем

$$|M|^2 > q^{d^2/2}(q^{d-2}-1)^2\cdots(q^2-1)^2 > |H^\infty|.$$

Если $\mathrm{Soc}(M) \simeq A_{\tilde{d}}$, где $\tilde{d} = d+1, d+2$, то $2(\tilde{d}!) \geq |M| > |H^\infty|/(q^d-1)$, что влечет $q=2$ и $d=4,6$, противоречие. Отсюда по [24, предложение 4.28, теорема 4.30] $|M|^2 < q^{6d}$ и $d \leq 6$. Учитывая [23, таблицы 8.14, 8.29], при $d=4,6$ индекс допустимой максимальной подгруппы в H^∞, содержащей Y, делится на 4 и не является степенью 2, противоречие.

2.2.3.2. Пусть $d=2$, то есть $2^e=q^2$. По [23, таблицы 8.1, 8.2] (см. также [27, теорема 3.7]) группа $L_2(q)$ не содержит максимальных подгрупп индекса, равного степени 2. Так как $(q(q^2-1), r) = 2(q^2-1, r/2)$ делит 6, то длина H^∞-орбиты на F равна 6 и по [31] $q=e=4$, противоречие.

2.2.4. Пусть $e=6c$, $q=2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq H \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$. Как и в случае 2.1.4, получим $c>2$. По [27, таблица 4.1] группа $G_2(q)$ не содержит максимальных подгрупп четного индекса, не делящегося на 4 или равного степени 2. Значит, длина H^∞-орбиты на F нечетна. Теперь ввиду [20] (см. также [27, таблица 4.1]), $(q^6-1)/(q-1)$ делит r. Но $(2^e-1, r)$ делит 3, противоречие.

2.3. Наконец, пусть $1 < |K| < r$. Тогда $\bar{H} \simeq H^\Sigma$, группа $\bar{G}$ действует транзитивно на дугах графа Γ^K и, кроме того, индуцирует точное действие на множестве его антиподальных классов. По предложению 1 для H^Σ выполняется одна из следующих возможностей:

(i) (линейные) $e=cd$, $d\geq 3$ и $SL_d(2^c) \trianglelefteq H^\Sigma \leq \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) (симплектические) $e=cd$, d четно, $d \geq 1$, $q=2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) (G_2-типа) $e=6c$, $q=2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) (одномерные) $H^\Sigma \leq \Gamma L_1(2^e)$.

Если $r/|K| > 2$, то G_a фиксирует K-орбиту на F, содержащую точку a, и либо $\bar{H}$ индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на антиподальном классе графа Γ^K и реализуется ситуация из случая 1.1, либо $\bar{H}$ имеет как минимимум три подорбиты на антиподальном классе графа Γ^K и реализуется ситуация из случая 2.2. Поэтому Γ^K — граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, противоречие с тем, что $\mu|K| = 2$.

Значит, $r/|K| = 2$ и граф Γ^K является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, группа автоморфизмов которого содержит подгруппу NG_aK/K, действующую 2-транзитивно на любой из NK-орбит на Γ^K. Но тогда граф Γ^K является двудольным, что, в свою очередь, влечет двудольность графа Γ, противоречие. Предложение доказано. $\square$

Предложение 3 позволяет доказать справедливость следующей леммы, в которой определяется массив пересечений графа Γ и уточняется строение группы G в случае $K > 1$. При условии $p > 2$ она следует из [35, лемма 6]. Мы приведем подробное доказательство для любого p.

Лемма 6. *Если Γ не является графом с массивом пересечений* $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, *то $|K| = r$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *$m + n$ делит $(m, n)p^e$;*
(2) *если T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e, то $|N|$ делится на r;*
(3) *K/K' является p-группой, $(m; n) = (p^{e/2} + 1; p^{e/2} - 1)$ и $r\mu = p^e$.*

Доказательство. Покажем, что $|K| = r$. Действительно, если $|K| < r$, то граф $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^K$ является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, допускающим транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/K$, которая действует точно на антиподальных классах, и группа $\widetilde{G}$ содержит нормальную подгруппу порядка p^e, противоречие с предложением 3.

Теперь для неединичного элемента $g \in K$ имеем $\alpha_3(g) = v$ и по лемме 4 $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n) \in \mathbb{Z}$ и $\chi_3(g) = -n(k+1)/(m+n) \in \mathbb{Z}$ (см. также [9, лемма 12.1]). Утверждение (1) доказано.

Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e. Тогда N действует транзитивно на Σ и $|N/(K \cap N)| = p^e$. Если $|N|$ не делится на r, то $|K \cap N| < r$ и граф $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^{K \cap N}$ (т.е. частное графа Γ на множестве $K \cap N$-орбит) является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, допускающим транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/(K \cap N)$, и группа $\widetilde{G}$ содержит нормальную подгруппу порядка p^e. Но тогда по предложению 3 граф $\widetilde{\Gamma}$ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ и $\mu|K| = 2$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Докажем утверждение (3).

1. Из леммы 2 следует, что K/K' является p-группой.

2. Покажем, что $r\mu = p^e$. Доказательство проведем от противного, рассматривая действие силовской p-подгруппы группы T на силовских подгруппах в K.

Итак, допустим $r\mu \neq p^e$.

2.1. Предположим, что r не делится на p. Тогда $K = K'$ и T содержит элементарную абелеву силовскую подгруппу T_0 порядка p^e. Так как группа K неразрешима, то r четно, p нечетно и по лемме 5 p не делит $r\mu$ и p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2t}, где p^t — это p-часть числа $m+n$ и $e \geq 2t$, и, в частности, если $e = 2t$, то $r\mu = p^e - 4$ и $(m; n) = (p^{e/2} - 1; p^{e/2} + 1)$.

Имеем $T = K : T_0$. По лемме Фраттини $G = TN_G(T_0) = KN_G(T_0)$, то есть группа K действует транзитивно на множестве $Syl_p(T)$ силовских p-подгрупп в T.

Заметим, что если группа T_0 нормальна в T, то, более того, группа T_0 характеристична в T, что противоречит утверждению (2). Поэтому $T_0 \not\leq C_G(K)$.

Далее, группа $KC_G(K)$ нормальна в G, поэтому либо $T \leq C_G(K)K$, либо $C_G(K) \leq K$. Но в первом случае $T_0 \leq KC_G(K)$ и для любого неединичного элемента $g \in T_0$ имеем $g = zf$, где $z \in C_G(K)$ и $f \in K$, при этом $(|f|, p) = 1$ и, следовательно, $1 \neq g^{|f|} = z^{|f|}$ и $\langle g \rangle \leq C_G(K)$, то есть $T_0 \leq C_G(K)$, противоречие. Значит, $C_{T_0}(K) = 1$ и T_0 действует точно на K. По [1, утверждение 37.7] имеем $[T_0, N_T(T_0)] = T_0 \cap K = 1$, то есть $N_T(T_0) = C_T(T_0) = T_0 \times C_K(T_0)$.

Так как p не делит r, то для любого $s \in \pi(K)$ найдется T_0-инвариантная подгруппа $S \in Syl_s(K)$.

Зафиксируем произвольные $s \in \pi(K)$ и T_0-инвариантную группу $S \in Syl_s(K)$. Тогда $T_0 \leq N_G(S)$ и по лемме Фраттини $G = KN_G(S)$. Далее, $N_G(S)/N_K(S) \simeq G/K \simeq \bar{T}G_a$ и $N_G(S) = (N_K(S) : T_0).G_a$. Очевидно, $C_G(S)N_K(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

Имеем $Syl_p(N_T(S)) \subseteq Syl_p(T)$. Группа $N_T(S)$ транзитивна на множестве $\{{T_0}^g | g \in T, {T_0}^g \leq N_T(S)\} = Syl_p(N_T(S))$ и по лемме Фраттини $T = KN_T(S)$. По [1, утверждение 5.21] $N_T(T_0)$ транзитивна на множестве T_0-инвариантных силовских s-подгрупп группы K. Таким образом, по [1, утверждение 5.20] $C_K(T_0)$ действует транзитивно на множестве T_0-инвариантных силовских s-подгрупп группы K. Отсюда $|C_K(T_0) : N_T(S) \cap C_K(T_0)| \equiv |Syl_s(K)| \pmod{p}$.

2.1.1. Предположим, что K не содержит собственных подгрупп, нормальных в G. Тогда K — характеристически простая группа и по лемме 2 K — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, то есть $K = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_1 \simeq P_i$ для $1 \leq i \leq l$, $\langle {P_1}^G \rangle = K$ и G действует транзитивно на множестве ${P_1}^G$ всех минимальных нормальных подгрупп группы K. Значит, $|G : N_G(P_1)| = l$.

Утверждение: Если $C_G(S) \not\leq K$, то $T_0 \leq C_T(S)$.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \not\leq K$ и следовательно, $N_T(S) \leq C_G(S)N_K(S)$. В частности, $T_0 \leq (C_G(S)N_K(S)) \cap T = C_T(S)N_K(S)$ и $C_T(S)/C_K(S) \simeq C_T(S)N_K(S)/N_K(S)$. Поэтому $C_T(S)$ содержит силовскую p-подгруппу группы T. Так как $N_T(S)$ транзитивна на множестве своих силовских p-подгрупп и $C_T(S) \trianglelefteq N_T(S)$, то $T_0 \leq C_T(S)$. $\square$

Утверждение: Если $C_G(S) \leq K$, то $G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$, $(e, p^e - 1) > 1$, G_a не содержит элементов порядка $p^e - 1$ и $|S/\Phi(S)| > (p^e - 1)/(e, p^e - 1)$, в частности, $|S|^2 > r$.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \leq K$ и, в частности, T_0 действует точно на S. Тогда $N_G(S)/C_G(S) = (N_K(S) : T_0).G_a/C_K(S) \leq \mathrm{Aut}(S)$ и по [1, утверждение 24.1] T_0 действует точно на $S/\Phi(S)$. Положим $f = \log_s(|S/\Phi(S)|)$. Таким образом,

$$T_0 \leq \mathrm{Aut}(S/\Phi(S)) \simeq GL_f(s).$$

Обозначим через $\widetilde{L}$ ядро действия группы $N_G(S)/C_K(S)$ на $S/\Phi(S)$ и пусть L — его полный прообраз в $N_G(S)$. Если $\widetilde{L} \not\leq N_K(S)/C_K(S)$, то $T_0 \leq (LN_K(S)) \cap T = (L \cap T)N_K(S)$, $L \cap T$ содержит силовскую p-подгруппу группы $N_T(S)$ и так как $L \cap T \trianglelefteq N_T(S)$, то $T_0 \leq L$, что противоречит доказанному выше. Имеем

$$N_G(S)/L = (N_K(S) : T_0).G_a/L \leq \mathrm{Aut}(S/\Phi(S)) \simeq GL_f(s).$$

По предложению 1 для G_a допустима одна из следующих возможностей.

(i) Линейные: $e = cd$, $d \geq 2$ и $SL_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_d(p^c)$, при этом $(e;p) \neq (2;3)$ (иначе $r\mu = 5$, что невозможно).

(ii) Симплектические: $e = cd$, d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq Z_{p^c-1} \circ \Gamma Sp_d(p^c)$.

(iii) Одномерные: $G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$.

(iv) Исключительные: $p^e \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ и $SL_2(5) \trianglelefteq G_a$, либо $p^e = 3^6$ и $SL_2(13) \trianglelefteq G_a$. Так как K — произведение простых неабелевых групп и p не делит $|K|$, то $p^e \neq 9^2, 3^6$ (см., например, [7, с. 239]). По условию $120p^e$ делит $|GL_f(3)|$. Если $p = 11$, то $f \geq 5$ и $3^5 \leq 11^2$, противоречие. Значит, $f \geq 11$ и $3^{11} \leq 59^2$, снова противоречие.

(v) Экстраспециальные: $p^e \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ и $SL_2(3) \trianglelefteq G_a$ или $p^e = 3^4$, $D_8 \circ Q_8 \simeq R \trianglelefteq G_a$, $G_a/R \leq S_5$ и 5 делит $|G_a|$. Так как K — произведение простых неабелевых групп и p не делит $|K|$, то $p^e \in \{11^2, 23^2\}$, противоречие как и выше.

Осталось рассмотреть действие группы G_a на ${P_1}^G$ в случаях $(i - iii)$.

(а) Допустим, что для G_a выполняется случай (i). По [31] при нечетном $q \geq 3$ степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d = 2$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$.

Если $d = 2$ и $q \in \{5, 7, 9, 11\}$, то $K \simeq A_5$, противоречие.

Если ${G_a}^\infty \not\leq N_G(P_1)$, то $l \geq (q^d-1)/(q-1)$ и

$$|P_1|^{q^{d-1}} \cdot |P_1|^{(q^{d-2}+\ldots+1)} \leq |P_1|^l \leq q \cdot q^{d-1} - 1,$$

откуда $d = 2$. Но тогда $(|P_1|^{(q+1)/2})^2 \leq q^2-1$ и 4 делит $|P_1|$, снова противоречие.

Теперь предположим, что для G_a выполняется случай (ii). По [31] при нечетном $q \geq 3$ степень минимального подстановочного представления группы $PSp_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d = 2$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$ и случая $(d;q) = (4;3)$.

Если $(d;q) = (4;3)$, то $K \simeq A_5$, противоречие.

Если ${G_a}^\infty \not\leq N_G(P_1)$, то $l \geq (q^d-1)/(q-1)$ и

$$|P_1|^{q^{d-1}} \cdot |P_1|^{(q^{d-2}+\ldots+1)} \leq |P_1|^l \leq q \cdot q^{d-1} - 1,$$

противоречие.

В обоих случаях (i) и (ii) получим ${G_a}^\infty \leq N_G(P_i)$ для каждого $1 \leq i \leq l$. Ввиду гипотезы Шрейера группа $\mathrm{Out}(P_i)$ — разрешима, поэтому ${G_a}^\infty$ централизует P_i. Но тогда $[{G_a}^\infty, K] \leq C_K(P_i)$ (см., например, [1, упражнение 3.6]). Таким образом, $[{G_a}^\infty, K] = 1$, противоречие с тем, что $C_G(S) \leq K$.

(б) Пусть выполняется случай (iii) и $G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$. Тогда $|G_a|$ делит $(p^e-1)e$. По условию $N_G(S)$ содержит подгруппу T_0, которая действует регулярно на Σ. Значит, $N_G(S) = N_T(S) \cdot (N_G(S))_{\{F\}}$ и $G_a \simeq (N_G(S))_{\{F\}}/(N_T(S))_{\{F\}}$ содержит элемент порядка $(p^e-1)/(e, p^e-1)$. Так как наибольший из порядков элементов группы $GL_f(s)$ равен порядку ее цикла Зингера, то $(p^e-1)/(e, p^e-1) \leq s^f - 1$. Отсюда $(e, p^e-1) > 1$, G_a не содержит элементов порядка $p^e - 1$ и $s^f > p^{e/2} + 1$, то есть $s^f > \sqrt{r}$. $\square$

Таким образом, если для каждого $s_1 \in \pi(K)$ существует T_0-инвариантная группа $S_1 \in Syl_{s_1}(K)$ такая, что $C_G(S_1) \not\leq K$, то $[K, T_0] = 1$, противоречие.

Пусть, как и ранее, S — произвольная T_0-инвариантная силовская s-подгруппа группы K. По доказанному выше, можно считать, что $C_G(S) \leq K$ и

$C_G(S_1) \not\leq K$ для каждой T_0-инвариантной группы $S_1 \in Syl_{s_1}(K)$, где $s_1 \in \pi(K) - \{s\}$.

Тогда для каждой T_0-инвариантной группы $S_1 \in Syl_{s_1}(K)$, где $s_1 \in \pi(K) - \{s\}$, получим $S_1 \leq C_K(T_0)$. Поэтому $|K : C_K(T_0)|$ делит $|S|$. Следовательно, число силовских p-подгрупп группы T делит $|S|$.

Так как $(|K : S|, |K : C_K(T_0)|) = 1$, то $K = SC_K(T_0) = N_K(S)C_K(T_0)$, откуда по [1, утверждение 5.20] $C_K(T_0)$ действует транзитивно на множестве всех силовских s-подгрупп группы K. Поэтому T_0 нормализует каждую силовскую s-подгруппу группы K и $|C_K(T_0) : N_T(S) \cap C_K(T_0)| = |Syl_s(K)|$.

Таким образом, T_0 содержится в ядре R действия G на $Syl_s(K)$. По предположению, K не содержит собственных подгрупп, нормальных в G, поэтому $R \cap K = 1$. Но тогда группа $T \cap R = T_0$ нормальна в G, противоречие.

2.1.2. Пусть K содержит собственную подгруппу H_1, нормальную в G, $K_1 = K/H_1$ и Γ_1 — частное графа Γ на множестве K_1-орбит. Тогда $G_1 = G/H_1$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ_1, $T_1 = T/H_1$ — нормальная в G_1 подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_1, и $K_1 = \mathcal{CG}(\Gamma_1)$.

Если $\tilde{K}_1$ содержит собственную подгруппу H_2, нормальную в G_1, $K_2 = \tilde{K}_1/H_2$ и Γ_2 — частное графа Γ_1 на множестве H_2-орбит, то $G_2 = G_1/H_2$ действует транзитивно на дугах графа Γ_2 и $T_1 = T/H_1$ — нормальная в G_2 подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_2, и $K_2 = \mathcal{CG}(\Gamma_2)$. Повторив этот процесс достаточное число раз, получим, что K_i — характеристически простая группа, поэтому K_i — прямое произведение изоморфных (неабелевых, ввиду леммы 2 и того, что по условию p не делит r) простых групп, то есть $K_i = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_1 \simeq P_j$ для $1 \leq j \leq l$. При этом можно считать, что K_i не содержит собственных подгрупп, нормальных в $G_i = G_{i-1}/H_i$, то есть $\langle P_1^{G_i} \rangle = K$ и G_i действует транзитивно на множестве всех минимальных нормальных подгрупп в K_i. Группа G_i действует транзитивно на дугах графа Γ_i и $T_i = T_{i-1}/H_i$ — нормальная в G_i подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_i, $K_i = \mathcal{CG}(\Gamma_i)$ и T_i/K_i — элементарная абелева группа порядка p^e.

Переобозначим $\widetilde{G} = G_i, \widetilde{T} = T_i, \widetilde{K} = K_i, \widetilde{\Gamma} = \Gamma_i$ и пусть $\widetilde{T_0} \in Syl_p(\widetilde{T})$. Как и выше получим, что $\widetilde{T} = \widetilde{K} : \widetilde{T_0}$. Применив те же рассуждения, что и в случае 2.1.1 для графа $\widetilde{\Gamma}$, получим, что $[\widetilde{K}, \widetilde{T_0}] = 1$, откуда группа $\widetilde{T_0}$ нормальна в $\widetilde{G}$, противоречие с утверждением (2).

2.2. Теперь предположим, что r делится на p. Из предложения 2(6) и лемм4, 5 следует, что $p = 2$, $(r\mu, 8) = 4$ и число $r/2$ нечетно. Поэтому K содержит характеристическую подгруппу K_0 индекса 2 (см. например, [22, теорема 4.6]) и $T = K_0T_0$ для $T_0 \in Syl_2(T)$. Граф Γ^{K_0} является недвудольным дистанционно-транзитивным графом Тейлора с $\mu' = \mu|K_0| = 2^{e-1} - 2$ (см. например, [2, стр. 228]) и $\mathrm{Aut}(\Gamma^{K_0}) \simeq K/K_0 \times 2^e.Sp_e(2)$, то есть $G_a \leq Sp_e(2)$ и $T_0 \simeq T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 2^{e+1}.

По [2, утверждение 37.7] имеем $[T_0, N_T(T_0)] = T_0 \cap K_0 = 1$, то есть $N_T(T_0) = C_T(T_0) = T_0C_{K_0}(T_0)$.

Так как $r/2$ нечетно, то для любого $s \in \pi(K_0)$ найдется T_0-инвариантная подгруппа $S \in Syl_s(K_0)$. Таким образом, $T_0 \leq N_G(S)$ и по лемме Фраттини $G = K_0N_G(S) = KN_G(S)$. По следствию из леммы Фраттини $Syl_s(K_0) = Syl_s(K)$. Покажем, как и в случае 2.1, что $N_G(S) = (N_K(S)T_0).G_a$.

Имеем $G/K = KN_G(S)/K \simeq N_G(S)/N_K(S) \simeq \bar{T}G_a$ и группа $N_G(S)/N_K(S)$ действует 2-транзитивно на множестве элементов группы $\mathrm{Soc}(N_G(S)/N_K(S)) = N_T(S)/N_K(S) \simeq \bar{T}$.

Поэтому $N_G(S) = (N_K(S)T_0).G_a = (N_{K_0}(S) : T_0).G_a$.

Очевидно, $C_G(S)N_K(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

2.2.1. Предположим, что K_0 не содержит собственных подгрупп, нормальных в G. Тогда K_0 — характеристически простая группа и $K_0 = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_i \simeq Z_s$ для $1 \leq i \leq l$, то есть $\langle {P_1}^G \rangle = K_0$. Обозначим K_0 через S.

Заметим, что s^l делит $2^{e-2} - 1$ и если s делит $2^e - 1$, то $s = 3$.

Утверждение: Случай $C_G(S) \leq K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \leq K$. Тогда по лемме 2 $C_G(S) = S$, T_0 действует точно на S и

$$G/S = TG_a/S \leq \mathrm{Aut}(S) \simeq GL_l(s).$$

Запишем $K = S : \langle h \rangle$, где h — инволюция из $T_0 \cap K$. Так как $Z(K) = 1$, то, очевидно, $C_S(h) = 1 = C_S(T_0) = N_S(T_0)$ и поэтому $T_0 = N_T(T_0)$ и $|Syl_2(T)| = s^l$. Отсюда по [1, утверждение 40.5] $f^h = f^{-1}$ для всех $f \in S$, то есть h инвертирует S. Но тогда h фиксирует каждую минимальную подгруппу в S и поэтому K содержится в ядре действия G на ${P_1}^G$.

По предложению 1 для G_a допустима одна из следующих возможностей.

- (i) Линейные: $e = cd$, $d \geq 2$ и $SL_d(2^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_d(2^c)$: Так как максимальный из порядков элементов группы $Sp_e(2)$ не превосходит $2^{e/2+1}$ при $e > 2$ или 10 при $e = 4$, то $(2^e-1)/(2^c-1) < 2^{e/2+1}$ или $15/(2^c-1) \leq 10$, что влечет $c \geq e/2$, то есть $d = 2, c = e/2$ и ${G_a}^\infty \simeq L_2(2^c)$, при этом $(e; p) \neq (2; 2)$ (иначе $r = 2$, что противоречит условию).
- (ii) Симплектические: $e = 2ct$, $t \geq 2$ и $Sp_{2t}(2^c) \trianglelefteq G_a \leq Z_{2^c-1} \circ \Gamma Sp_{2t}(2^c)$.
- (iii) G_2-типа: $e = 6c$ и $G_2(2^c)' \trianglelefteq G_a \leq Z_{2^c-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(2^c))$.
- (iv) Одномерные: $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$.
- (v) Исключительные: $p^e = 2^4$ и A_6 или $A_7 \trianglelefteq G_a$. Но тогда $2s^l < 16$ и $s^l = 3, 5, 7$, противоречие с тем, что $G_a \not\leq Z_{s-1}$.

(а) Допустим, что ${G_a}^\infty \neq 1$ и s не делит $|{G_a}^\infty|$. Тогда ${G_a}^\infty$ фиксирует силовскую 2-подгруппу группы T. Можно считать, что это группа T_0, то есть ${G_a}^\infty \leq N_G(T_0)$. Отсюда ${G_a}^\infty$ централизует $\langle h \rangle$ и переставляет T_0-орбиты на $V(\Gamma)$, фиксируя при этом орбиту a^{T_0}. Тогда Γ содержит $2(k+1)$-коклику, индуцированную множеством a^{T_0}, и ввиду границы Хофмана для коклик (см. [2, предложение 3.7.2]) имеем $2 \leq r/(n+1)$, поэтому $2^{e/2} + 2 = n + 1 \leq r/2 = s^l$ и $m - 1 \geq 2\mu$. Но $r\mu = 2^e - 4 = 4(2^{e/2-1} - 1)(2^{e/2-1} + 1)$ и поэтому s делит $(2^{e/2-1} - 1, 2^{e/2-1} + 1)$, противоречие.

(б) Если ${G_a}^\infty = 1$ (то есть $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$) и s не делит $|G_a|$, противоречие получается как и в п. (а).

(в) Пусть ${G_a}^\infty \neq 1$ и s делит $|{G_a}^\infty|$.

В случае (i) $c = e/2$ и по [31] степень минимального подстановочного представления группы $L_2(2^c)$ равна $2^c + 1$, поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

В случае (ii) $e = 2ct$ и по [31] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_{2t}(2^c)'$ равна $(2^e - 1)/(2^c - 1)$ при $c > 1$, равна 6 при

$t = 2, c = 1$ ($Sp_4(2) \simeq S_6$), и равна $2^{t-1}(2^t - 1)$ при $c = 1$ и $t \geq 3$, поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

В случае (iii) $e = 6c$ и по [32] степень минимального подстановочного представления группы $G_2(2^c)'$ равна 28 в случае $c = 1$ (напомним, что $G_2(2)' \simeq U_3(3)$), 416 в случае $c = 2$, и равна $(2^e - 1)/(2^c - 1)$ в случае $c > 2$. Поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

(г) Пусть ${G_a}^{\infty} = 1$ и s делит $|G_a|$. Так как порядок максимальной неприводимой циклической подгруппы в $Sp_e(2)$ равен $2^{e/2}+1$ (см. например [26]), то G_a не содержит элементов из $GL_1(2^e)$ порядка кратного, но не равного $2^{e/2}+1$, и $e \geq 2^{e/2} - 1$. Поэтому $e = 4$, $s^l = 3$ и элемент порядка 5 из G_a централизует S, противоречие с условием. □

Утверждение: Случай $C_G(S) \not\leq K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \not\leq K$. Так как группа T разрешима, то по [1, утверждение 31.10] $C_T(F(T)) \leq F(T)$. Поэтому $F(T) \neq S$ и по [1, утверждение 31.8] $O_2(T) \neq 1$. Если $O_2(T) \cap K = 1$, то $T = K \times O_2(T)$ и $O_2(T)$ — нормальная в G подгруппа из T порядка 2^e, что ввиду предложения 3 влечет $r\mu = 2^e$, противоречие. Если $O_2(T) \cap K \neq 1$, то $K = S \times O_2(K)$ и по лемме 2 s делит $k+1$, противоречие. □

2.2.2. Если K_0 содержит собственную подгруппу H_1, нормальную в G, то рассмотрев, как и в случае 2.1.2, частные графа Γ, получим противоречие как и в случае 2.2.1.

3. Наконец, из лемм 4 и 5 следует, что $r\mu = p^e$, $(m; n) = (p^{e/2} + 1; p^{e/2} - 1)$ и поэтому $K' < K$.

Утверждение (3) и лемма доказаны. □

Замечание 2. 1) Заключение леммы 6 также справедливо в том случае, если вместо ограничения на массив пересечений графа предполагать, что $K > 1$. Таким образом, по предложению 3 граф Γ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ тогда и только тогда, когда $K = 1$.

2) С помощью компьютерных вычислений, проведенных в ходе доказательства предложения 3 было установлено, что в случае $K = 1$ существуют всего два неизоморфных графа (они могут быть получены путем удаления спреда из геометрического или псевдогеометрического графа для GQ$(5, 3)$, см. [4] и [3]).

3) Как отмечается в [2, с. 386], существуют ровно два неизоморфных дистанционно-регулярных графа с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$. Из них каждый может быть получен путем удаления одного из двух неизоморфных спредов из геометрического графа для (единственного) обобщенного четырехугольника GQ$(2, 4)$. Один из этих графов дистанционно транзитивен и его группа автоморфизмов является полупрямым произведением экстраспециальной группы порядка 27 и экспоненты 3 и группы $GL_2(3)$. Другой граф вершинно транзитивен, но не реберно симметричен, и его группа автоморфизмов является полупрямым произведением экстраспециальной группы порядка 27 и экспоненты 3 и группы D_{12}. В обоих случаях экстраспециальная группа регулярна на вершинах. Таким образом, далее можно считать, что $(e; p) \neq (2; 3)$.

3. Случай $p = 2$

До конца раздела 3 будем предполагать, что $p = 2$ и $K > 1$. Напомним, что ввиду леммы 6 $|K| = r$ и группа H является полупрямым произведением групп K и G_a.

Случай $p = 2$ рассматривался в [35, лемма 7], но поскольку данный результат основан на редукции к графам, удовлетворяющим условиям предложения 3, и содержит пробел для графов из п. (iv) предложения 1, то мы детально рассмотрим все допустимые возможности для G_a в леммах 8, 9 и 10.

Докажем сначала вспомогательный результат.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $r\mu = 2^e$, *e четно,* $m = 2^{e/2} + 1$, $n = 2^{e/2} - 1$, $\mu = 2^l$, Γ *имеет массив пересечений*

$$\{2^e - 1, (2^{e-l} - 1)2^l, 1; 1, 2^l, 2^e - 1\},$$

(2) *если H содержит элемент g порядка $2^e - 1$ и $\langle g\rangle$ действует регулярно на $\Sigma - \{F\}$, то $2^l + 1 \le |C_{\langle g\rangle}(K)|$, $\alpha_0(g) = 2^s \ge 1$, $\alpha_1(g) = (2^e - 1)w$ для некоторых $s, w2^{-s} \in \mathbb{Z}, w \le r$ и либо*

  (i) $s = 0$ *и* $w \equiv 1 \pmod{2^{e/2+1}}$, *либо*

  (ii) $s \ge 1$, $(2^s - w)_2 = 2^{e/2}$ *и* $e/2 \ge s$*; в частности, если* $\alpha_0(g) = r$, *то* $w = 0$ *и* $l = e/2$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 6.

Докажем утверждение (2). Допустим, что H содержит элемент g порядка $2^e - 1$ и положим $R = \langle g\rangle$. Тогда $[N_T(R), R] \le R \cap T = 1$, поэтому $N_T(R) = C_T(g)$.

Предположим к тому же, что R действует регулярно на $\Sigma - \{F\}$. По теореме Шура-Цассенхауза (см. например, [1, утверждение 18.1]) группа $X = TR$ транзитивна на множестве дополнений к T в X и, следовательно, по [1, утверждение 5.20] можно считать, что $R = X_a$. Поэтому $|C_K(g)| = |\mathrm{Fix}(g)| = \alpha_0(g) = 2^s$, где $0 \le s \le e - l$, и множество $\mathrm{Fix}(g)$ является блоком импримитивности группы X. Отсюда следует, что для всех $1 \le i \le 3$ числа $\alpha_i(g)$ делятся на $\alpha_0(g)$. Тогда $r = \alpha_0(g) + \alpha_3(g) = \alpha_0(g)(1 + \alpha_3(g)/\alpha_0(g))$ и поэтому $\alpha_3(g) = 2^s(2^{e-l-s} - 1)$.

Таким образом, $R/C_R(K) \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому

$$(r-1)\mu + 1 \le 2^e - 1 = |g| \le (r/|\Phi(K)| - 1) \cdot |C_R(K)| \le (r-1)|C_R(K)|.$$

Значит, $\mu + 1 \le |C_R(K)|$.

Далее, $|RC_K(g)|$ делит $\alpha_1(g)$ и $\alpha_2(g)$, то есть $\alpha_1(g) = (2^e - 1)w$ для некоторого $w \in \mathbb{Z}, w \le r$ и w кратно $\alpha_0(g)$. По лемме 1 $\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + 1 + \alpha_1(g))/(m + n) - 2^{e/2-1}$ и из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что

$$(m\alpha_0(g) - m + 1 + \alpha_1(g)) = 2^{e/2+s} + 2^s - 2^{e/2} + 2^e w - w \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Если $s \ge 1$, то

$$2^s - 2^{e/2} - w \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}},$$

что влечет $(2^s - w)_2 = 2^{e/2}$ и $e/2 \ge s$. В частности, если $\alpha_0(g) = r$, то $w = 0$ и $l = e/2$.

Если $s = 0$, то

$$w \equiv 1 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Лемма доказана. □

3.1. **Линейный, симплектический и G_2-типа случаи.**

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *в линейном случае с $d = 2$ число r делит 2^c и $L_2(2^c) \trianglelefteq G_a$, линейный случай с $d \geq 3$ не реализуется;*
(2) *в симплектическом случае при $Sp_4(2)' \ntrianglelefteq G_a$ имеем $e = 2dc$, $d \geq 1$, r делит 2^c и $Sp_{2d}(2^c) \trianglelefteq G_a$;*
(3) *в G_2-типа случае имеем $e = 6c$, r делит 2^c и $G_2(2^c)' \trianglelefteq G_a$.*

В любом из этих случаев группа T — элементарная абелева.

Доказательство. 1. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (i) предложения 1, $q = 2^c$ и $Y = (G_a)^\infty = SL_d(q)$.

Пусть далее g — элемент порядка $(2^e-1)/(2^c-1)$ из Y (g — цикл Зингера из Y) и $R = \langle g\rangle$. Тогда R действует полурегулярно на $\Sigma - \{F\}$ и $[N_K(R), R] \leq R \cap K = 1$, то есть $N_K(R) = C_K(g)$. Поэтому $|C_K(g)| = |\mathrm{Fix}(g)| = \alpha_0(g) = 2^s$ и множество $\mathrm{Fix}(g)$ является блоком импримитивности группы TR, откуда следует, что числа $\alpha_i(g)$ делятся на $\alpha_0(g)$. Тогда $r = \alpha_0(g) + \alpha_3(g) = \alpha_0(g)(1 + \alpha_3(g)/\alpha_0(g))$ и поэтому $\alpha_3(g) = 2^s(2^{e-l-s} - 1)$. По лемме 1 $\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m + n)$. В частности, если $\alpha_1(g) = 0$, то из целочисленности $\chi_1(g)$ следует $\alpha_0(g) = 2^{e/2}$.

Далее, $|g|$ делит $\alpha_1(g)$ и $\alpha_2(g)$, то есть $\alpha_1(g) = (2^e-1)w/(2^c-1)$ для некоторого $w \in \mathbb{Z}$, кратного $\alpha_0(g)$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что

$$(m\alpha_0(g) - m + 1 + \alpha_1(g)) = \alpha_0(g)(2^{e/2} + 1 + \alpha_1(g)/\alpha_0(g)) - 2^{e/2} \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Если $s \geq 1$, то $(1 + \alpha_1(g)/\alpha_0(g))_2 = 2^{e/2-s}$ и либо $s = e/2$ и $w2^{-s}$ четно, либо $s < e/2$ и $(w)_2 = 2^s$.

Если $s = 0$, то

$$(2^e-1)w/(2^c-1) \equiv -1 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Допустим, что $C_Y(K) \leq Z(Y)$, то есть $Y/Z(Y)$ действует точно на K.

По [31] степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случая $(d;q) = (4;2)$, в котором соответствующая степень равна 8. При $(d;q) = (4;2)$ имеем $k = 15 > r = 2^{4-l} \geq 8+1$, противоречие. Поэтому $2^e - 2 = k - 1 \geq (r-1)\mu \geq (2^e-1)\mu/(2^c-1)$ и $\mu < 2^c$.

Имеем $C_R(K) \leq Z(Y)$ и по [1, утверждение 24.1] $R/C_R(K) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e-1)/(2^c-1) = |g|$ делит $|GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|(d, 2^c-1)$. Отсюда по теореме Жигмонди получим $e = 6$ и $d \leq 3$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F - \mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$.

Предположим, что $\mathrm{Fix}(Y) \neq \{a\}$ и возьмем некоторую вершину $a^* \in F - \mathrm{Fix}(Y)$. Тогда либо Y имеет орбиту четной длины на F, либо число всех Y-орбит на F четно и каждая из них — нечетной длины. В первом случае ввиду [7] получим $d = 2, c = 3, r = 32, \mu = 2$, $|(a^*)^Y| = 28$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \geq |\mathrm{Fix}(Y)| = 4$, при этом силовская 3-подгруппа в Y является циклической, имеет порядок 9 и фиксирует ровно одну точку из $(a^*)^Y$. В последнем случае снова получим $d = 2, c = 3, r = 32$, $\mu = 2$, $|Y(a^*)| = 9$, при этом силовская 3-подгруппа в Y действует регулярно на $(a^*)^Y$, что влечет $|\mathrm{Fix}(g)| = 14$. Тогда $\alpha_0(g) = 5, 14$, противоречие в обоих случаях.

Поэтому $\mathrm{Fix}(Y)=\{a\}$ и число всех Y-орбит нечетной длины на F нечетно. Тогда ввиду [7] получим $r-1=21z_1$ при $d=3$ или $r-1=9z_1+28z_2$ при $d=2$, где $z_1,z_2\in\mathbb{N}$, снова противоречие.

Значит, $Y\le C_G(K)$ и поэтому $G_1=C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $\bar{T}\simeq \mathrm{Soc}(C_G(K)/Z(K))$.

Допустим $Z(K)<K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{Z(K)}$. Ясно, что $C_G(K)/Z(K)\trianglelefteq G/Z(K)\le \mathrm{Aut}(\Gamma^{Z(K)})$ и группа $G/Z(K)$ транзитивна на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Поэтому $G/Z(K)$ содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, транзитивную на антиподальных классах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Так как $Y\not\le \Gamma L_1(2^e)$, то из предложения 3 следует, что либо $\Gamma^{Z(K)}$ является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, либо $\Gamma^{Z(K)}$ имеет массив пересечений $\{15,10,1;1,2,15\}$. В первом случае $|K:Z(K)|=2$, что невозможно. Во втором случае $r/|Z(K)|=6$, снова противоречие.

Отсюда группа K — абелева и группа $C_G(K)$ транзитивна на дугах графа Γ. Для подгруппы K_0 индекса 2 из K получим, что $C_G(K)/K_0$ — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа Тейлора Γ^{K_0}. Поэтому $Y\le Sp_e(2)$. Так как максимальный из порядков элементов группы $Sp_e(2)$ не превосходит $2^{e/2+1}$ при $e>2$ или 10 при $e=4$, то $(2^e-1)/(2^c-1)<2^{e/2+1}$ или $15/(2^c-1)\le 10$, что влечет $c\ge e/2$, то есть $d=2$, $c=e/2$ и $Y\simeq Sp_2(2^c)$.

Далее, $\alpha_0(g)=r=2^s\le 2^{e/2}$ и по доказанному выше, r делит 2^c, в частности, $\alpha_1(g)=0$ если $r=2^c=2^{e/2}$.

2. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (ii) предложения 1, $Y={G_a}^\infty$, $q=2^c$ и $e=2dc$, где $d\ge 1$.

Допустим, что $d\ge 2$ и Y действует точно на K. Ввиду [31] степень минимального подстановочного представления группы $Y\simeq Sp_{2d}(2^c)'$ равна $2^{d-1}(2^d-1)$ в случае $c=1$ и $d\ge 3$, равна 6 в случае $c=1$ и $d=2$ ($Y\simeq A_6$), и равна $(q^6-1)/(q-1)$ в случае $c>1$ и $d\ge 2$. В любом случае получим $Y\le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K))\simeq GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и число $|GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$ делится на 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди получим $e=6$ и $c=1$, то есть $Y\simeq Sp_6(2)$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F-\mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y)=\{a\}$. По [7] длина неединичной Y-орбиты на F делится на 28, 36 или 63, что исключает случай $\mathrm{Fix}(Y)=\{a\}$. То есть $|\mathrm{Fix}(Y)|=4$ и группа Y 2-транзитивна на 28 точках множества $F-\mathrm{Fix}(Y)$. Отсюда $\Phi(K)=1$ и $Y\le GL_5(2)$, противоречие.

Поэтому Y централизует K и $G_1=C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $T/K=\mathrm{Soc}(KC_G(K)/K)$ и $KC_G(K)/K\simeq C_G(K)/Z(K)\trianglelefteq G/Z(K)$.

Если $Z(K)<K$, то группа $G/Z(K)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$ и содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 3.

Значит, $TY\le C_G(K)$ и для любой подгруппы K_0 индекса 2 из K граф Γ^{K_0} является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, при этом $Y\le Sp_e(2)$ и полная группа автоморфизмов этого графа содержит нормальную элементарную абелеву 2-группу T_1 (см. [2, с. 228]). Обозначим $\widetilde{G}=G/K_0,\widetilde{T}=T/K_0$ и отождествим группу $\widetilde{G}$ с изоморфной ей подгруппой из $\mathrm{Aut}(\Gamma^{K_0})$. Покажем, что $T_1=\widetilde{T}$. Положим $X=T_1\widetilde{T}$ и $A=T_1\widetilde{G}$. Тогда $A=T_1\widetilde{G}=X(G_aK/K)$ и $X\trianglelefteq A$. Так как стабилизатор $A_{\widetilde{a}}$ вершины $\widetilde{a}$ графа Γ^{K_0} в A транзитивен на ее окрестности (порядка 2^e-1) и $X_{\widetilde{a}} \trianglelefteq A_{\widetilde{a}}$, то $X_{\widetilde{a}}=1$. Значит, $X=T_1=\widetilde{T}$ и $\Phi(T/K_0)=1$.

Пусть далее $d\geq 1$. Покажем, что $K>T'$. Предположим обратное. Тогда $K=\Phi(T)\geq \mho^1(T)$ и T — специальная группа. Так как группа экспоненты 2 является элементарной абелевой, то T содержит элемент h порядка 4, что влечет $h\notin K$ и $h^2\in K$, в частности, $K=K_0\times\langle h^2\rangle$. Но $\Phi(T/K_0)=1$, противоречие с тем, что $hK_0\in T/K_0$.

2.1. Допустим, что $\Phi(T)<K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{TY}=TY/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K}=K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T}=T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Положим $s=\log_2|K/\Phi(T)|$. Если пространство $\widetilde{T}$ разложимо как $\mathbb{GF}(2)Y$-модуль, то нетривиальная подгруппа из $\widetilde{K}$ имеет Y-инвариантное дополнение T_0 в $\widetilde{T}$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка, кратного 2^e, в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $\widetilde{TY}$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$, противоречие с предложением 3.

Значит, $\widetilde{T}$ является неразложимым $\mathbb{GF}(2)Y$-модулем. Ввиду [18, теорема 3.3](см. также [14, с. 324]) при $d\geq 2$, а также при $d\geq 1, q>2$ первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y,T/K)$ группы Y в T/K одномерна как $\mathbb{GF}(2^c)$-пространство, а при $(d;q)=(1;2)$ она тривиальна. Поэтому ввиду [1, утверждение 17.12] получим, что порядок наибольшего расширения W $\mathbb{GF}(2)Y$-модуля $K/\Phi(T)$ с помощью $\bar{T}$, которое бы удовлетворяло условиям $W=[W,Y]$ и $K/\Phi(T)\leq C_W(Y)$, не превосходит числа 2^{e+c}, и $s\leq c$. То есть, $|K/\Phi(T)|$ делит 2^c. Если $s=c$, то расширение $W=T/\Phi(T)$ с указанным свойством определено однозначно (с точностью до изоморфизма).

2.2. Покажем теперь, что $\Phi(T)=1$.

Для этого заметим сначала, что $(TY)'=TY$. Действительно, $\langle Y',T'\rangle = T'Y\leq (TY)'$ и поэтому $YK/K\leq (TY)'K/K\trianglelefteq G/K$. Тогда $\mathrm{Soc}(G/K)=T/K\leq (TY)'K/K$. Если при этом $K\not\leq (TY)'$, то $N=T\cap (TY)'$ — нормальная в TY подгруппа порядка, кратного 2^e, транзитивная на Σ. Но тогда граф $\Gamma^{K\cap N}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/(K\cap N)$, содержащую нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 3. То есть $K\leq (TY)'$ и полный прообраз группы $(TY)'/K$ в G содержит TY.

Далее, $Z(TY)=K$, то есть TY — центральное расширение 2-транзитивной группы $(TY)^\Sigma$. По [1, утверждение 33.8] $K\simeq \mathrm{M}((TY)^\Sigma)/\mathrm{M}(TY)$. Но при $e>6$ группа $\mathrm{M}((TY)^\Sigma)$ — элементарная абелева порядка 2^c, $\mathrm{M}((TY)^\Sigma)\simeq Z_2\times Z_2$ при $e=6$ и $\mathrm{M}((TY)^\Sigma)\simeq Z_2\times Z_4$ при $e=2c=4$.

Таким образом, во всех случаях, кроме последнего, получим, что K — элементарная абелева группа. Допустим, что T содержит элемент h порядка 4. Тогда $h\notin K$ и $h^2\in\Phi(T)\leq K$, в частности, $K=K_0\times\langle h^2\rangle$. Но $\Phi(T/K_0)=1$, противоречие с тем, что $hK_0\in T/K_0$. (Случай $e=2c=4$ будет исключен в лемме 10.)

Значит, $\Phi(T)=1$.

Таким образом, r делит 2^c.

3. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iii) предложения 1, $q=2^c$ и $Y=(G_a)^\infty$.

Допустим, что Y действует точно на K. Ввиду [32] степень минимального подстановочного представления группы $Y\simeq G_2(2^c)'$ равна 28 в случае $c=1$

(напомним, что $G_2(2)' \simeq U_3(3)$), 416 в случае $c = 2$ и $(q^6 - 1)/(q - 1)$ в случае $c > 2$.

В любом случае $Y \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{e-l-\log_2(|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e - 1)/(2^c - 1)$ делит $|GL_{e-l-\log_2(|\Phi(K)|)}(2)|$. Отсюда по теореме Жигмонди получим $e = 6$ и $c = 1$, то есть $Y \simeq U_3(3)$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F - \mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. По [7] длина неединичной Y-орбиты на F делится на 28, 36 или 63, что исключает случай $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. То есть $|\mathrm{Fix}(Y)| = 4$ и Y — 2-транзитивна на 28 точках множества $F - \mathrm{Fix}(Y)$. Кроме того, Y нормализует $\Phi(K)$. Если $|\Phi(K)| = 4$ и $Y \le C_G(\Phi(K))$, то $Y \le GL_3(2)$, противоречие. Значит, $Y \le GL_5(2)$, снова противоречие.

Поэтому Y централизует K и $G_1 = C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $T/K = \mathrm{Soc}(KC_G(K)/K)$ и $KC_G(K)/K \simeq C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K)$. Пусть $Z(K) < K$. Тогда группа $G/Z(K)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$ и содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 3. Значит, $TY \le C_G(K)$ и для подгруппы K_0 индекса 2 из K граф Γ^{K_0} является дистанционно транзитивным графом Тейлора, при этом, как и выше, устанавливается, что $Y \le Sp_e(2)$.

3.1. Допустим, что $\Phi(T) < K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{TY} = TY/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T} = T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Как и в случае 2.1, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна и по [14, с. 324] одномерна как $\mathbb{GF}(2^c)$-пространство. Поэтому $|K/\Phi(T)|$ делит 2^c. Если $|K/\Phi(T)| = 2^c$, то такое расширение $T/\Phi(T)$ определено однозначно (с точностью до изоморфизма).

3.2. Имеем $(TY)' = TY$ и $Z(TY) = K$, таким образом, TY — центральное расширение 2-транзитивной группы $(TY)^\Sigma$. По [1, утверждение 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TY)^\Sigma)/\mathrm{M}(TY)$. Но группа $\mathrm{M}((TY)^\Sigma)$ — элементарная абелева, поэтому как и в случае 2.2 получим $\Phi(T) = 1$.

Таким образом, r делит 2^c.

Лемма доказана. □

3.2. **Одномерный случай.**

Лемма 9 (Одномерный случай). *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1 и $R = G_a \cap GL_1(2^e)$. Тогда G_a содержит подгруппу B нечетного порядка, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$, и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $C_R(K) = 1$, то $\Phi(K) = 1, e = 6$ и $r = 32$.*
2. *Если $C_R(K) > 1$, то $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$, $r \le 2^{e/2} \le \mu$ и $C_T(R) \le K \le Z(T)$, а если к тому же $\Phi(T) < K$ и $B \le C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, группа T содержит нормальную в TB подгруппу порядка 2^e и Γ — граф из предложения 3(2).*

Доказательство. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1. Тогда $G_a \simeq A \le \Gamma L_1(2^e)$, $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap GL_1(2^e)$ и $G_a/R \le Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e - 1)/(e, 2^e - 1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно

$\alpha = (2^e-1)/|R|$ R-орбит и α делит $(e, 2^e-1)$. Так как группа G_a разрешима и ее силовская 2-подгруппа фиксирует вершину в $[a]$, то по [1, утверждения 18.5, 5.20] G_a содержит холлову $2'$-подгруппу B, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$.

Пусть $R = \langle g\rangle$, $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g)+\alpha_3(g) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \le R\cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R)\times R$, а поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, то $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Пусть $x \in C_T(R)$. Тогда $a^x \in \Omega$, то есть 2-элемент x содержится в $X_{\{F\}} = KR$, но K — нормальная силовская 2-подгруппа в KR, следовательно $x \in K$. Значит, $C_T(R) \le K$.

По [1, утверждение 24.1]

$$R^* = R/C_R(K) \le B^* = B/C_B(K) \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$$

и поэтому $|R/C_R(K)| \le r/|\Phi(K)|-1$, то есть

$$|C_R(K)| \ge |R|/(r/|\Phi(K)|-1) \ge (2^e-1)/((e,2^e-1)(r/|\Phi(K)|-1)) \ge \mu/(e,2^e-1).$$

Положим $C_R(K) = \langle\tilde{g}\rangle$.

1. Допустим $C_R(K) = 1$. Тогда $R_0 \le GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e-1)/(e,2^e-1)$ делит $|GL_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e,2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди $e = 6$. Поскольку группа $GL_t(2)$ не содержит элементов порядка 21 при $t \le 4$, получим $r/|\Phi(K)| = 2^5 = r$.

2. Теперь пусть $C_R(K) > 1$. Тогда $T = KC_T(K)$, $|KC_R(K)|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(\tilde{g}) = (m(r-1)+\alpha_1(g)-k)/2^{e/2+1} = (2^{e/2}r + r - 2^{e/2} + \alpha_1(\tilde{g}) - 2^e)/2^{e/2+1} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $r \le 2^{e/2} \le \mu$. При этом число $\alpha_1(\tilde{g})/r$ четно если $r = 2^{e/2}$, и нечетно в противном случае. Отсюда $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e,2^e-1)$.

Так как $C_T(R) \le K$, то по [1, утверждение 24.4] $T = [T,R]C_T(R) = [T,R]K$. С другой стороны, $T = KC_T(K)$ и

$$Y = C_G(K)\cap [T,G_a] = C_T(K)\cap[T,G_a] \trianglelefteq G.$$

При этом если $Y \le K$, то $|C_T(K)[T,G_a]| = |C_T(K)||[T,G_a]:Y| \ge 2^{2e}$, противоречие. Отсюда следует, что Y действует транзитивно на Σ.

Если $K \not\le Y$, то граф $\Gamma^{Y\cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, которая содержит нормальную подгруппу порядка 2^e. Но тогда граф $\Gamma^{Y\cap K}$ не может быть графом Тейлора и поэтому удовлетворяет условиям предложения 3 и $r/|Y\cap K| = 2^{e/2} \ge r$, что влечет $K\cap Y = 1$ и Γ — граф из предложения 3.

Пусть далее $K \le Y$. Тогда $Y = T$, K — абелева группа и $C_T(R) \le K \le Z(T)$.

Утверждение: Если $\Phi(T) < K$ и $B \le C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, T является разложимым $\mathbb{GF}(2)B$-модулем и Γ — граф из предложения 3(2).

Доказательство утверждения. Пусть $\Phi(T) < K$. Рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{G} = G/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T} = T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Положим $s = \log_2 |K/\Phi(T)|$. Покажем сначала, что $\widetilde{T}$ является разложимым $\mathbb{GF}(2)B$-модулем. Предположим обратное. Тогда существуют $\mathbb{GF}(2)$-базис в $\widetilde{T}$ и гомоморфизм φ из B в $GL_e(2)$, относительно которых элементы группы B, рассматриваемой в качестве подгруппы в $GL_{e+s}(2) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{T})$, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

где $y \in B$ и через I_s обозначается единичная матрица порядка $s \times s$. Запишем $\widetilde{T} = \widetilde{K} \oplus U$ и зафиксируем ненулевой вектор $w \in \widetilde{K}$. Определим отображение $d : B \to \widetilde{T}/\widetilde{K} (\simeq T/K)$ по правилу $d(y) = \psi(y)(w)$ для всех $y \in B - \{1\}$ и $d(1) = 0_{\widetilde{T}}$. Тогда для всех $x, y \in B$ имеем $\psi(xy) = \varphi(x)\psi(y) + \psi(x)$ и

$$d(xy) = xd(y) + d(x),$$

то есть d является дифференциалом (скрещенным гомоморфизмом) (см., например, [29]). Более того, d является неглавным дифференциалом, так как иначе нашелся бы базис в $\widetilde{T}$, в котором матрица образа каждого элемента $y \in B$ в $GL_{e+s}(2)$ имела бы блочно-диагональный вид, что невозможно ввиду неразложимости $\widetilde{T}$ как $\mathbb{GF}(2)B$-модуля.

Следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(B, T/K)$ группы B в T/K нетривиальна, противоречие с [1, утверждение 17.10].

Таким образом, при $\Phi(T) < K$ нетривиальная подгруппа в $\widetilde{K}$ имеет B-инвариантное дополнение T_0 в $\mathbb{GF}(2)B$-модуле $\widetilde{T}$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка, кратного 2^e, в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $\widetilde{TB}$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$. Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma^{\Phi(T)}$ и $\Gamma_2 = \Gamma_1^{T_0 \cap \widetilde{K}}$. Так как граф Γ_2 допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, содержащую нормальную подгруппу порядка 2^e, и удовлетворяет условиям предложения 3, то $r/(|\Phi(T)||T_0 \cap \widetilde{K}|) = 2^{e/2} \geq r$, что влечет $\Phi(T) = 1 = T_0 \cap \widetilde{K}$. $\square$

Лемма доказана. $\square$

3.3. **Исключительный случай.**

Лемма 10 (Исключительный случай)**.** *Если H^Σ удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1, то граф Γ не существует, в частности, симплектический случай из п. (ii) с $Sp_4(2)' \trianglelefteq G_a$ не реализуется.*

Доказательство. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1 и $Y = {G_a}^\infty$. Допустим $C_Y(K) = 1$, то есть Y действует точно на K. Тогда $r = 8, \mu = 2$. Но $K \simeq Z_8, Z_4 \times Z_2, D_8, Q_8$ или E_8 и $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_2 \times Z_2, D_8, D_8, S_4$ или $L_3(2)$ соответственно, противоречие.

Значит, $Y \leq C_G(K)$. Далее, $C_G(K)/Z(K)$ действует 2-транзитивно на Σ и $\bar{T} \simeq \mathrm{Soc}(C_G(K)/Z(K))$.

Предположим, что $Z(K) < K$. Так как $r \leq 8$, то $|K : Z(K)| = 4 = r/2$. Ясно, что $C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma^{Z(K)})$ и группа $G/Z(K)$ транзитивна на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Поэтому $G/Z(K)$ содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, транзитивную на антиподальных классах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Так как

$Y \not\leq \Gamma L_1(2^e)$, то из предложения 3 следует, что либо $\Gamma^{Z(K)}$ является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, либо $\Gamma^{Z(K)}$ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, противоречие в обоих случаях.

Значит, $K \leq Z(TY)$.

Предположим, что $K = T'$. Тогда $T' = \Phi(T) = Z(T)$, то есть T — специальная группа и K — элементарная абелева группа. Так как группа экспоненты 2 является элементарной абелевой, то T содержит элемент h порядка 4, что влечет $h \notin K$ и $h^2 \in K$, в частности, $K = K_0 \times \langle h^2 \rangle$. Отсюда $1 < \Phi(T/K_0) = K/K_0$ и группа T/K_0 является экстраспециальной, следовательно, Y вкладывается в группу изометрий квадратичной формы на $\bar{T}$, отвечающей коммутаторному отображению из T в K/K_0. Противоречие с тем, что $A_6 \not\leq O_4^{\pm}(2)$.

Таким образом, для подгруппы K_0 индекса 2 в K граф Γ^{K_0} является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, полная группа автоморфизмов которого изоморфна группе $Z_2 \times E_{2^e}.Sp_4(2)$ (см. [2, с. 228]). Поэтому группа G_a изоморфна A_6 или S_6.

Предположим, что $r = 4$. Допустимы следующие три случая.

1. $T' = 1, |K : \Phi(T)| = 2$ и $T = E_{2^4} \cdot Z_4$ — группа экспоненты 4. При этом $\mathrm{Aut}(T) \simeq E_{2^5}.E_{2^4}.A_8$.

2. $T' = \Phi(T), K = Z(T), |K : \Phi(T)| = 2$ и $T = D_4.E_{2^3}$ — группа экспоненты 4. При этом $\mathrm{Aut}(T) \simeq E_{2^5}.A_6.Z_2$.

Компьютерные вычисления в Magma [21] показывают, что случаи 1 и 2 не реализуются.

3. $\Phi(T) = 1$, то есть T — элементарная абелева группа. Как и в лемме 8, T является неразложимым $\mathbb{GF}(2)Y$-модулем. По [14, с. 324] группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, \bar{T})$ одномерна как $\mathbb{GF}(2)$-пространство и ввиду [1, утверждение 17.12] получим, что порядок наибольшего расширения W $\mathbb{GF}(2)Y$-модуля K с помощью $\bar{T}$, которое бы удовлетворяло условиям $W = [W, Y]$ и $K \leq C_W(Y)$, не превосходит числа 2^{e+1}. То есть, $|K| \leq 2$, противоречие.

Наконец, если $r = 8$, то по доказанному выше для подгруппы K_0 индекса 4 из K граф Γ^{K_0} не существует, противоречие. Лемма доказана. □

4. Случай $p > 2$

Здесь и всюду далее предполагается, что p нечетно. Напомним, что ввиду леммы 6 $m = p^{e/2} + 1 = n + 2$ и $r\mu = p^e$.

В доказательствах ряда локальных утверждений для случая нечетного p в [35] были допущены некоторые неточности при определении строения допустимых стабилизаторов вершины в одномерном, экстраспециальном и исключительном случаях. Мы исправляем их в леммах 11,12 и 13. Для полноты изложения мы также воспроизводим подробные доказательства для симплектического и линейного случаев.

4.1. **Экстраспециальный и исключительный случаи.**

Лемма 11 (Экстраспециальный случай)**.** *Пусть H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (vi) предложения 1 и $R = C_{G_a}(K)$. Тогда T — группа экспоненты p, $G_a \trianglerighteq R_0 \simeq Q_8 \circ D_8$ при $k = 80$ и $G_a \trianglerighteq R_0 \simeq Q_8$ при $k \neq 80$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p^e = 3^4$, $R_0 \trianglelefteq R$, $G_a/R_0 \leq S_5$ и 5 делит $|G_a|$, $n = 8, m = 10$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^5, Γ имеет массив пересечений $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$;*

(2) *$p^e = 5^2$, $SL_2(3) \leq R, G_a \leq SL_2(3).Z_4$, $r = \mu = 5$, $n = 4, m = 6$, T — экстраспециальная группа порядка 5^3 и Γ имеет массив пересечений $\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$;*

(3) *$p^e = 7^2$, $SL_2(3) \leq R, SL_2(3).Z_2 \leq G_a \leq SL_2(3).Z_6$, $n = 6, m = 8$, $r = \mu = 7$, T — экстраспециальная группа порядка 7^3 и Γ имеет массив пересечений $\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$;*

(4) *$p^e = 11^2$, $G_a \simeq Z_5 \times SL_2(3)$ или $Z_5 \times GL_2(3)$, $SL_2(3) \simeq R$, $n = 10, m = 12$, $r = \mu = 11$, T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$;*

(5) *$p^e = 23^2$, $G_a \simeq Z_{11} \times (SL_2(3).Z_2)$, $R \simeq SL_2(3)$ или $SL_2(3).Z_2$, $n = 22, m = 24$, $r = \mu = 23$, T — экстраспециальная группа порядка 23^3 и Γ имеет массив пересечений $\{528, 506, 1; 1, 23, 528\}$.*

Доказательство. Пусть группа H^Σ удовлетворяет условиям из п. (vi) предложения 1.

1. Пусть $p^e = 3^4$. Тогда $k = 80$, $R_0 = D_8 \circ Q_8 \trianglelefteq G_a$, $G_a/R_0 \leq S_5$, 5 делит $|G_a|$, $r\mu = 81$, $n = 8, m = 10$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{80, (3^{4-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$$

и спектр

$$80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)},$$

где $l \in \{1, 2, 3\}$.

Покажем, что $R_0 \leq C_H(K)$. Так как $r \in \{3, 9, 27\}$, то $\mathrm{Aut}(K)$ — $5'$-группа. Поэтому $|H/C_H(K)|$ не делится на 5 и все элементы порядка 5 из H содержатся в $C_H(K)$ и имеют r неподвижных точек на F. В частности, все элементы порядка 5 из G_a содержатся в R. Но $H^\Sigma \simeq G_a$ и поэтому подгруппа $X \leq G_a$, порожденная всеми элементами порядка 5 из G_a, содержится в R. При этом $G_a{}' \leq X$ и $G_a/X \simeq Z_2, Z_4$ или $G_a = R$. В любом случае X транзитивна на $[a]$ и $R_0 \leq X \leq R$ (H^Σ содержит единственную экстраспециальную нормальную подгруппу порядка 32). В частности, каждый элемент порядка 5 переставляет 5 R_0-орбит на $[a]$ (длины 16).

Таким образом, подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R_0$ с помощью G_a/R_0.

Утверждение: T — неабелева группа.

Доказательство утверждения. От противного, предположим, что $T = Z(T)$. Тогда K — абелева группа и поскольку $G = TG_a$ и $R_0 \trianglelefteq G_a$, то $[T, R_0] \trianglelefteq R_0T \trianglelefteq G$ и $[R_0, T] \cap R_0 = 1$. По доказанному выше $K \leq C_T(R_0)$. Если $C_{R_0}(T) \neq 1$, то R_0 действует неточно на $\bar{T}$, противоречие с условием.

Значит, $C_{R_0}(T) = 1$ и $R_0 \leq \mathrm{Aut}(T)$. По [1, утверждение 24.1] R_0 действует точно на $T/\Phi(T)$ и по [1, утверждение 24.4] $T = [T, R_0]C_T(R_0)$. Так как $K \leq C_T(R_0)$, то $C_T(R_0)/K$ — элементарная абелева группа порядка, не превосходящего p^{e-1} (иначе $C_T(R_0) = T$ и $C_{R_0}(T) \neq 1$, что невозможно). Более того, по [1, утверждение 24.6] $T = [T, R_0] \times C_T(R_0)$ и $[T, R_0] \neq 1$.

Далее, R_0T — транзитивная подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $(R_0T)_a = R_0T_a = R_0$, поэтому $|\mathrm{Fix}(R_0)| = |N_{R_0T}(R_0) : R_0| = r$. Значит, $K \leq C_T(R_0) \leq N_{R_0T}(R_0) =$

KR_0 и $C_T(R_0) = K$. Поэтому $|[T, R_0]| = 81$. Положим $Y = [T, R_0]$. Заметим, что $Y \trianglelefteq G$. Действительно, $Y \trianglelefteq TR_0 \trianglelefteq G$ и для всех $g \in G$, $x \in T$ и $y \in R_0$ имеем ${R_0}^g \le TR_0$ и

$$[x, y]^g = [x^g, y^g] = [x^g, zf] = [x^g, f][x^g, z]^f = [x^g, f] \in Y,$$

где $y^g = zf, z \in T, f \in R_0$, то есть $Y^g = \langle [x, y]^g | x \in T, y \in R_0 \rangle \le Y$.

Поэтому Y — подгруппа из T порядка 81, нормальная в G, противоречие с предложением 3.$\square$

Таким образом, $Z(T) \le K$ и R_0 действует точно на T. По [1, утверждение 24.4] $T = [T, R_0]C_T(R_0)$. Заметим, что либо K — абелева группа, либо K — экстраспециальная группа порядка 27, либо $K \simeq Z_9 : Z_3$.

Утверждение: Если группа K абелева, то $r = 3$ и T — экстраспециальная группа экспоненты 3.

Доказательство утверждения. Пусть группа K абелева. Так как $R_0 \le C_G(K)$, то $1 \ne C_G(K)/K \trianglelefteq G/K$ и поэтому $T \le C_G(K)$, то есть $K = Z(T)$.

Если $T' < K$, то граф $\Gamma_1 = \Gamma^{T'}$ удовлетворяет условию теоремы, группа $G/T' \le \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1 и содержит нормальную абелеву подгруппу, регулярную на вершинах графа Γ_1, противоречие с доказанным выше.

Таким образом, по предложению 3 $T' = K$ и следовательно, $\Phi(T) = T' = Z(T)$, то есть группа T специальна и группа K элементарна.

Компьютерными вычислениями в Magma [21] проверено, что существует единственная специальная группа порядка 3^6, которая имеет автоморфизм порядка 5, и ее группа автоморфизмов не содержит подгрупп S таких, что $\mathrm{Inn}(T) \le S$, $|S/\mathrm{Inn}(T)|$ делит $32 \cdot 120$, $Q_8 \circ D_8 \simeq Q \trianglelefteq S/\mathrm{Inn}(T)$ и 5 делит $|S|$.

Теперь если $r > 3$, K_1 — подгруппа индекса 9 из K и $\Gamma_1 = \Gamma^{K_1}$, то $\widetilde{T} = T/K_1$ — специальная группа порядка 3^6 и $\widetilde{TX}$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1, противоречие.

Следовательно, $r = 3$ и T — экстраспециальная группа экспоненты 3. Коммутаторное отображение группы T задает знакопеременную билинейную форму φ из $\bar{T} \times \bar{T}$ на K/K_1, где K/K_1 отождествляется с полем $\mathbb{GF}(3)$ и $\bar{T}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{GF}(3)$ размерности e. При этом R вкладывается в группу изометрий симплектического пространства $(\bar{T}, \varphi)$, то есть $R \le Sp_4(3)$. Стабилизатор Y точки в 2-транзитивной аффинной группе подстановок $ASp_4(3)$ содержит экстраспециальную подгруппу $U \simeq D_8 \circ Q_8$ и $N_Y(U)/U \simeq A_5$, поэтому $R/R_0 \le A_5$. Кроме того, если $N_Y(U) \ge W \ge U$ и W содержит элемент порядка 5, то $W/U \simeq Z_5, D_{10}$ или A_5. $\square$

Пусть группа K — экстраспециальная порядка 27. Пусть $\widetilde{K} = K/Z(K)$ и $\Gamma_1 = \Gamma^{Z(K)}$. Тогда группа $\widetilde{G} = G/Z(K) \le \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1 и содержит нормальную подгруппу $\widetilde{T} = T/Z(K)$, регулярную на вершинах графа Γ_1. В этом случае $G_a/R \le \mathrm{Aut}(\widetilde{K}) \simeq AGL_2(3)$, противоречие с доказанным выше.

Наконец, пусть $K \simeq Z_9 : Z_3$. Рассмотрев граф $\Gamma_1 = \Gamma^{K'}$, получим противоречие как и выше.

2. Пусть $p^e = 5^2$. Тогда $SL_2(3) \simeq S \trianglelefteq G_a$, $k = 24$, $r = \mu = 5$, $n = 4, m = 6$, Γ имеет массив пересечений

$$\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$$

и спектр

$$24^1, 4^{60}, -1^{24}, -6^{40}.$$

Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_4$ и $SL_2(3)$ порождается своими элементами порядка 3, то $S \leq R$. При этом $G_a/S \leq Z_4$, $S' \simeq Q_8$ и $K \leq C_T(S)$.

В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R$ с помощью G_a/R.

Если T — абелева группа, то по [1, утверждение 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 25, нормальная в G, противоречие с предложением 3.

Таким образом, по [28, теорема 1 и следствие 2] T — экстраспециальная группа экспоненты 5 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : GL_2(5)$.

3. Пусть $p^e = 7^2$ и $Q_8 \simeq R_1 \trianglelefteq G_a$. Тогда $k = 48$, $r = \mu = 7$, $n = 6, m = 8$, Γ имеет массив пересечений

$$\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$$

и спектр

$$48^1, 6^{168}, -1^{48}, -8^{126}.$$

При этом $G_a \simeq SL_2(3).Z_2$ или $Z_3 \times (SL_2(3).Z_2)$. Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_6$ и $(G_a)' = S \simeq SL_2(3)$, то $S \leq R$.

В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R$ с помощью G_a/R и $G_a/R \leq Z_6$.

Если T — абелева группа, то по [1, утверждение 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 49, нормальная в G, противоречие с предложением 3.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 7 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : GL_2(7)$.

Таким образом, $SL_2(3).Z_2 \leq G_a \leq SL_2(3).Z_6$.

4. Пусть $p^e = 11^2$. Тогда $k = 120$, $r = \mu = 11$, $n = 10, m = 12$, Γ имеет массив пересечений

$$\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$$

и спектр

$$120^1, 10^{660}, -1^{120}, -12^{550}.$$

Имеем $G_a \simeq Z_5 \times SL_2(3)$ или $Z_5 \times GL_2(3)$.

Если T — абелева группа, то по [1, утверждение 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 121, нормальная в G, противоречие с предложением 3.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 11 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : GL_2(11)$. Таким образом, $R \leq SL_2(11)$ и так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{10}$, то $SL_2(3) \simeq R$.

5. Пусть $p^e = 23^2$. Тогда $k = 528$, $r\mu = 529$, $n = 22, m = 24, r = \mu = 23$, Γ имеет массив пересечений

$$\{528, 506, 1; 1, 23, 528\}$$

и спектр

$$528^1, 22^{6072}, -1^{528}, -24^{5566}.$$

Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{22}$, то $SL_2(3) \simeq S \leq R$ и $G_a = Z_{11} \times (SL_2(3).Z_2)$.

Если T — абелева группа, то по [1, утверждение 24.6] $T = [T, R_0] \times C_T(R_0)$ и поэтому $[T, R_0]$ — подгруппа порядка 23^2, нормальная в G, противоречие с предложением 3.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 23, $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : GL_2(23)$ и $SL_2(3) \simeq S \leq R \leq SL_2(23)$. Отсюда $R \simeq SL_2(3)$ или $R \simeq SL_2(3).Z_2$.

Лемма доказана. □

Замечание 3. Для каждой фиксированной тройки параметров (k, r, μ) граф Γ из пп. 1–5 леммы 11 существует и является известным единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с такими параметрами.

Доказательство. Полный перебор орбитальных графов допустимой группы G с помощью вычислений в Magma [21]. □

Лемма 12 (Исключительный случай)**.** *Пусть H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1 и $R = C_{G_a}(K)$. Тогда T — группа экспоненты p, $G_a \trianglerighteq S \simeq SL_2(5)$ при $k \neq 728$ и $G_a \simeq SL_2(13)$ при $k = 728$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p^e = 3^6$, $R = G_a \simeq SL_2(13)$, $k = 728$, $n = 26, m = 28$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^7 и Γ имеет массив пересечений $\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}$;*

(2) *$p^e = 9^2$, $k = 80$, $G_a/S \leq D_8$, $S \leq R$, $n = 8, m = 10$, $r = 3, 9$, T — экстраспециальная группа порядка 3^5 или специальная группа порядка 3^6, и Γ имеет массив пересечений $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$ или $\{80, 72, 1; 1, 9, 80\}$ соответственно;*

(3) *$p^e = 11^2$, $k = 120$, $G_a \simeq SL_2(5)$ или $SL_2(5) \circ Z_{10}$, $n = 10, m = 12$, $r = \mu = 11$, T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$ и $S = R$;*

(4) *$p^e = 19^2$, $k = 360$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{18}$, $n = 18, m = 20$, $r = \mu = 19$, Γ имеет массив пересечений $\{360, 342, 1; 1, 19, 360\}$ и $S \leq R$;*

(5) *$p^e = 29^2$, $k = 840$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{14}$ или $SL_2(5) \circ Z_{28}$, $n = 28, m = 30$, $r = \mu = 29$, Γ имеет массив пересечений $\{840, 812, 1; 1, 29, 840\}$ и $S \leq R$;*

(6) *$p^m = 59^2$, $k = 3480$, $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{58}$, $n = 58, m = 60$, $r = \mu = 59$, Γ имеет массив пересечений $\{3480, 3422, 1; 1, 59, 3480\}$ и $S = R$.*

Доказательство. Пусть группа H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1. По лемме 6 $G_a \simeq H^{\Sigma}$.

I. Рассмотрим сначала случай $e \geq 4$.

1. Пусть $p^e = 3^6$. Тогда $SL_2(13) \simeq G_a$ и либо $R = Z(G_a) \simeq Z_2$ и $L_2(13) \leq \mathrm{Aut}(K)$, либо G_a действует точно на K, либо $G_a = R = C$.

Имеем $k = 728$, $r\mu = 729$, $n = 26, m = 28$, Γ имеет массив пересечений

$$\{728, (3^{6-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 728\},$$

где $1 \leq l \leq 5$, и спектр

$$728^1, 26^{378(3^{6-l}-1)}, -1^{728}, -28^{351(3^{6-l}-1)}.$$

Так как $r \leq 3^5$, то $\mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_3(|K/\Phi(K)|)}(3)$ является $7'$-группой. Имеем $|SL_2(13)| = 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ и поэтому G_a индуцирует тривиальную группу автоморфизмов группы $K/\Phi(K)$.

Отсюда по [1, утверждение 24.1] R содержит элемент порядка 7, то есть $R = G_a$ и $H = K \times G_a$. Поэтому $[R,T] \trianglelefteq G$. Если $[R,T] \leq K$, то G_a централизует T/K, противоречие. Значит, $T = [R,T]K$ и ввиду предложения 3 $[R,T] \cap K \neq 1$.

Более того, $K \leq [R,T]$. В противном случае граф $\Gamma^{[R,T]\cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, содержащую нормальную подгруппу порядка 3^6, что по предложению 3 невозможно.

Утверждение: $\Phi(T) = K$.

Доказательство утверждения. От противного, предположим, что $\Phi(T) < K$. Тогда для подгруппы K_0 индекса 3 в K, содержащей $\Phi(T)$, получим что $\widetilde{T} = T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 3^7 и R действует точно на $\widetilde{T}$. Поэтому $R \leq GL_7(3)$ и R централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$.

Положим $s = \log_p |K/\Phi(T)|$. Если пространство $T/\Phi(T)$ разложимо как $\mathbb{GF}(p)R$-модуль, то $K/\Phi(T)$ имеет R-инвариантное дополнение T_0 в $T/\Phi(T)$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка p^e в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $TR/\Phi(T)$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$, противоречие с предложением 3.

Значит, $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)R$-модулем. Кроме того, существуют $\mathbb{GF}(p)$-базис в $T/\Phi(T)$ и гомоморфизм φ из R в $GL_e(p)$, относительно которых элементы группы R, рассматриваемой в качестве подгруппы в $GL_{e+s}(p) \simeq \mathrm{Aut}(T/\Phi(T))$, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

где $y \in R$ и через I_s обозначается единичная матрица порядка $s \times s$. Отсюда, как и в лемме 9, получим, что первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(R, T/K)$ группы R в T/K нетривиальна, противоречие (см. [5, с. 194–195]). $\square$

Утверждение: Если $T' = K = Z(T)$, то $r = 3$, G — универсальная накрывающая группа для G^Σ, T — экстраспециальная группа порядка 3^7 и $R \leq Sp_6(3)$.

Доказательство утверждения. Предположим, что $T' = K = Z(T)$. Тогда T — специальная группа и K — элементарная абелева группа. В этом случае $G = TR$ является центральным расширением группы G^Σ, $G' = G$ и по [1, утверждение 33.8] $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$. Так как силовские 7 и 13-подгруппы в G — циклические, то $\pi(\mathrm{M}(G^\Sigma)) \subseteq \{2,3\}$. Как показывают компьютерные вычисления в Magma [21] $|\mathrm{M}(G^\Sigma)| = 3$ и поэтому группа G — универсальная накрывающая для G^Σ. Таким образом, T — экстраспециальная группа порядка 3^7, группа R действует точно на T и централизует K, поэтому $R \leq Sp_6(3)$ (см. [28, теорема 1 и следствие 2]). $\square$

Наконец, рассмотрим случай, когда $T' < K$ или $Z(T) \neq K$. Из предложения 3 следует, что $[T,R] = T$ и тем самым, что $G' = G$.

Если $r = 3$, то $T' = 1$, $T \simeq E_{3^5} \times Z_9$ и $\mathrm{Aut}(T)$ не содержит элементов порядка 7, противоречие.

Пусть $r = 9$. Тогда группа K — абелева, $T/C_T(K) \leq \mathrm{Aut}(K)$ и поэтому $K \leq Z(T)$ и по доказанному выше $|T'| \leq 3$. В этом случае G является центральным расширением группы G^Σ, $G' = G$ и по [1, утверждение 33.8] $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$, противоречие с тем, что $|\mathrm{M}(G^\Sigma)| = 3 < r$.

Пусть $r = 27$. Тогда $|\mathrm{Aut}(K)|_3 \le 27$. Если группа K абелева, то $K \le Z(T)$. Если K — экстраспециальная группа, то $C_T(K') = C_G(K') \cap T \trianglelefteq G$ и $C_T(K') = T$, так как иначе группа $\mathrm{Aut}(K')$ содержала бы подгруппу порядка 3^6, что невозможно. В любом случае в K найдется подгруппа K_0 индекса 9, нормальная в G, и, рассмотрев граф Γ^{K_0}, получим противоречие как и выше.

Если $r = 3^{6-l} \ge 81$, то в K найдется подгруппа K_0 индекса $r' = 3^j$, где $2 \le j \le 5 - l$, нормальная в TR, и, рассмотрев граф Γ^{K_0}, снова получим противоречие как и выше.

2. Пусть $p^e = 9^2$. Тогда $SL_2(5) \simeq S = (G_a)''$, $G_a/S \simeq Z_2, Z_2 \times Z_2, Z_4$ или D_8, $k = 80$, $r = 3^{4-l}$, $l = 1,2,3$, $n = 8, m = 10$, Γ имеет массив пересечений

$$\{80, (3^{4-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$$

и спектр

$$80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)}.$$

Так как $r \le 3^4$, то $\mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_3(|K/\Phi(K)|)}(3)$ является $5'$-группой. Имеем $|SL_2(5)| = 8 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому S индуцирует тривиальную группу автоморфизмов группы $K/\Phi(K)$.

Отсюда по [1, утверждение 24.1] R содержит элемент порядка 5, то есть $S \le R$.

Утверждение: $\Phi(T) = K$.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда для подгруппы K_0 индекса 3 в K, содержащей $\Phi(T)$, получим что $\widetilde{T} = T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 3^5 и R действует точно на $\widetilde{T}$. Поэтому $R \le GL_5(3)$ и R централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. Вычисления в Magma [21] показывают, что группа $GL_5(3)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе $SL_2(5)$, но каждый орбитальный граф степени 80 допустимой группы G не является антиподальным д.р.г. диаметра 3, противоречие. □

Утверждение: Если $T' = K = Z(T)$, то TS — накрывающая группа для $(TS)^{\Sigma}$, $r = 9$ и T — единственная специальная группа порядка 3^6, допускающая автоморфизм порядка 5, или $r = 3$ и T — экстраспециальная группа порядка 3^5.

Доказательство утверждения. Допустим, что $K = T' = Z(T)$. Тогда T — специальная группа и $\Phi(T) = K = Z(TS)$ — элементарная абелева группа. В этом случае группа TS является центральным расширением группы $(TS)^{\Sigma}$. Ввиду предложения 3 получим $(TS)' = TS$ и по [1, утверждение 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TS)^{\Sigma})/\mathrm{M}(TS)$. Заметим, что $|\mathrm{M}((TS)^{\Sigma})|_3 = 9$ $(Z_3 \times Z_3 \le \mathrm{M}((TS)^{\Sigma}))$.

Поэтому r делит 9.

Пусть $r = 9$. Тогда T — единственная специальная группа порядка 3^6, допускающая автоморфизм порядка 5. Ее группа автоморфизмов содержит подгруппу A такую, что $\mathrm{Inn}(T) \le A$ и $A/\mathrm{Inn}(T) \simeq SL_2(5)$.

Пусть $r = 3$. Тогда T — экстраспециальная группа порядка 3^5, группа R действует точно на T и централизует K и $R \le Sp_4(3)$ (см. [28, теорема 1 и следствие 2]). □

Наконец, рассмотрим случай, когда $T' < K$ или $Z(T) \ne K$.

Если $r = 3$, то $S \not\le \mathrm{Aut}(T)$, противоречие.

Пусть $r = 9$. Тогда группа K — абелева, $S \leq \mathrm{Aut}(T)$ и $|T/\Phi(T)| = 3^4$, поэтому T является специальной группой, противоречие.

Пусть $r = 27$. Тогда T снова является специальной группой, противоречие.

II. Пусть далее $e = 2$, $R = C_{G_a}(K)$ и $SL_2(5) \simeq S \trianglelefteq G_a$. Так как $G_a/R \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{p-1}$, то $S \trianglelefteq {G_a}' \leq R$ и $G_a = C_{G_a}(R)R$.

Покажем сначала, что T — экстраспециальная группа порядка p^3.

Предположим обратное. Тогда T — абелева группа порядка p^3 и поскольку R является p'-группой, по [1, предложение 24.6] $T = [T, R] \times C_T(R)$ и кроме того, $[T, R] \trianglelefteq G$. С другой стороны, $K \leq C_T(R)$ и ввиду предложения 3 T не содержит нормальных в G подгрупп порядка p^2, то есть $[T, R] = 1$, противоречие.

Таким образом, далее в случаях 3 – 6 получим, что T — экстраспециальная группа порядка p^3. Отсюда по [28, теорема 1 и следствие 2] экспонента группы T равна p и $R \leq C_{\mathrm{Aut}(T)}(K)/\mathrm{Inn}(T) \simeq Sp_e(p)$. Очевидно, $C_K(G_a) = 1$ или $G_a \leq R = C$.

3. Если $p^e = 11^2$, то $k = 120$, $r = \mu = 11$, $n = 10, m = 12$, Γ имеет массив пересечений

$$\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$$

и спектр

$$120^1, 10^{110}, -1^{120}, -12^{132}.$$

Тогда $G_a \simeq SL_2(5)$ или $SL_2(5) \circ Z_{10}$. Так как T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и $G_a/R \leq Z_{10}$, то $R \leq Sp_2(11)$ и $S = {G_a}' = R$ (иначе $Sp_2(11)$ содержит $SL_2(5) \circ Z_{10}$, что невозможно). Таким образом, группа R транзитивна на $[a]$.

В частности, если $R < G_a$, то $G_a/R \simeq Z_5$ имеет две орбиты на $F - \{a\}$ длины 5 и подгруппа G_a имеет 6 орбит на T (их длины равны $1, 120, 600, 600, 5, 5$).

4. Если $p^e = 19^2$, то $k = 360$, $r\mu = 361$, $n = 18, m = 20$, $\mu = r = 19$, Γ имеет массив пересечений

$$\{360, 342, 1; 1, 19, 360\}$$

и спектр

$$360^1, 18^{3420}, -1^{360}, -20^{3078}.$$

Тогда $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{18}$. Так как T — экстраспециальная группа порядка 19^3 и $G_a/R \leq Z_{18}$, то $R \leq Sp_2(19)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(19)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $R \simeq SL_2(5)$ или $SL_2(5) \times Z_3$.

5. Если $p^e = 29^2$, то $k = 840$, и либо $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{14}$, либо $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{28}$. Далее, $r\mu = 841$, $r = \mu = 29$, $n = 28, m = 30$, Γ имеет массив пересечений

$$\{840, 812, 1; 1, 29, 840\}$$

и спектр

$$840^1, 28^{12180}, -1^{840}, -30^{11368}.$$

Так как T — экстраспециальная группа порядка 29^3 и $G_a/R \leq Z_{28}$, то $R \leq Sp_2(29)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(29)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $R \simeq SL_2(5)$ или $SL_2(5) \circ Z_4$.

6. Если $p^e = 59^2$, то $k = 3480$ и $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{58}$. Далее, $r\mu = 3481$, $r = \mu = 59, n = 58, m = 60$, Γ имеет массив пересечений

$$\{3480, 3422, 1; 1, 59, 3480\}$$

и спектр

$$3480^1, 58^{102660}, -1^{3480}, -60^{99238}.$$

Так как T — экстраспециальная группа порядка 59^3 и $G_a/R \le Z_{58}$, то $R \le Sp_2(59)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(59)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $S = R \simeq SL_2(5)$ и G_a имеет две орбиты на F длины 29.

Лемма доказана. $\square$

Замечание 4. Для каждой фиксированной тройки параметров (k, r, μ) граф Γ из пп. 1–5 леммы 12 существует и является известным единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с такими параметрами. В частности, для $r = 3$ граф Γ степени 80 изоморфен графу из п. 1 леммы 11. В предположении $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ случаи из пп. 1–5 леммы 12 не реализуются. В п. 6 леммы 12 группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе G_a.

Доказательство. Полный перебор орбитальных графов допустимой группы TR с помощью компьютерных вычислений в Magma [21]. $\square$

4.2. **Одномерный случай.**

Лемма 13. *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1. Тогда $G_a \le \Gamma L_1(p^e)$, $R = G_a \cap GL_1(p^e) \trianglelefteq G_a, G_a/R \le Z_e$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$e > 4$, $r \ge p^{e/2}$, T — специальная группа порядка rp^e и R не нормализует подгрупп индекса p в K;*
(2) *$e = 4$, $r = p^2 = \mu$, T — специальная группа порядка p^6, группа R действует полурегулярно на $[a]$ и группа $R/C_R(K)$ действует полурегулярно на $F - \{a\}$;*
(3) *$e = 4, p = 3$, T — специальная группа порядка rp^4 и $R \le N_G(K_1)$, где K_1 — подгруппа индекса p в K, $|R| = 20$, $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$ и $|R/C_R(K)| \le 2$;*
(4) *$e = 2$, $r = p$, T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \le GL_2(p)$;*
(5) *$e = 2$, $3 < r = p$ — простое число Мерсенна, T — абелева группа и $C_T(G_a) = 1$.*

Доказательство. Ввиду леммы 6 $G_a \simeq A \le \Gamma L_1(p^e)$, $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap GL_1(p^e)$ и $G_a/R \le Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(p^e-1)/(e, p^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (p^e-1)/|R|$ R-орбит и α делит (e, p^e-1).

Пусть $X = TR$, $R = \langle g \rangle$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(g) = \frac{m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k}{m+n}.$$

Имеем $[N_T(R), R] \le R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$. Ясно, что $C_T(R) \le K$.

По [1, утверждение 24.1]

$$R^* = R/C_R(K) \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)$$

и поэтому $|R/C_R(K)| \le r/|\Phi(K)| - 1$, то есть

$$|C_R(K)| \ge \frac{p^e - 1}{(e, p^e - 1)(r/|\Phi(K)| - 1)} \ge \mu/(e, p^e - 1) = p^l/(e, p^e - 1).$$

Допустим, что $C_R(K) = 1$. Тогда $(p^e-1)/(e,p^e-1)$ делит $|GL_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)|$. По малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e, p^e - 1)$ делит и число $p^{p_0-1} - 1$, меньшее чем $p^e - 1$. Отсюда по теореме Жигмонди $e = 2$ и $r = p$. Но тогда $p^2 - 1$ делит $2(p - 1)$, противоречие с тем, что $p > 2$.

Отсюда $C_R(K) > 1$ и следовательно, $T = KC_T(K)$. Положим $C_R(K) = \langle\tilde{g}\rangle$. Поскольку $KR \le C_G(\tilde{g})$ и $\mathrm{Fix}(R) \subseteq F$, то $|KR|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(\tilde{g}) = \frac{p^{e/2}r + r - p^{e/2} + \alpha_1(\tilde{g}) - p^e}{2p^{e/2}} \in \mathbb{Z},$$

поэтому $\alpha_1(\tilde{g})/r \equiv -1 \pmod p$ или $r \ge p^{e/2} \ge \mu$ и число $\alpha_1(\tilde{g})$ четно.

Далее, по [1, утверждение 24.4] $T = [T, R]C_T(R) = [T, R]K$.

Кроме того,

$$Y = C_G(K) \cap [T, G_a] = C_T(K) \cap [T, G_a] \trianglelefteq G.$$

Если $Y \le K$, то $\bar{T} \simeq C_T(K)/Z(K) \simeq [T, G_a]K/K$ и $|T| \ge p^{2e}$, противоречие с тем, что $r < p^e$.

Следовательно, Y действует транзитивно на Σ.

Если $K \not\le Y$, то граф $\Gamma^{Y\cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, которая содержит нормальную подгруппу порядка p^e, противоречие с предложением 3.

Таким образом, $Y = T$ и $K \le Z(T)$.

1. Допустим, что существует примитивный простой делитель s числа p^e-1. Пусть S — силовская s-подгруппа в R и обозначим через f ее порождающий элемент. Тогда S нормальна в G_a и поскольку $(|S|, |GL_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)|) = 1$, то S централизует $K/\Phi(K)$ и по [1, утверждение 24.1] S централизует K.

Далее, $\mathrm{Fix}(f) = F$, $\alpha_0(f) = r$ и по лемме 3 $\chi_1(f) = (m\alpha_0(f) - m + \alpha_1(f) - k)/(m+n)$. Так как $KR \le C_T(f)$ и $\mathrm{Fix}(R) \subseteq F$, то $\alpha_1(f) = r(p^e-1)w/(e, p^e-1)$, где $0 \le w \le (e, p^e - 1)$.

Если $w = 0$, то ввиду целочисленности $\chi_1(f)$ получим

$$mr - m - k = (p^{e/2} + 1)r - p^{e/2} - p^e \equiv 0 \pmod{2p^{e/2}},$$

в частности, $r \ge p^{e/2}$.

Утверждение: $K = T'$.

Доказательство утверждения. Предположим, что $K \ne T'$. Тогда $T' < K$ и $\widetilde{T} = T/T'$ — абелева p-группа, а граф $\Gamma_1 = \Gamma^{T'}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/T'$. Так как $[S, K] = 1$, то $C_{\widetilde{T}}(S) \ge \widetilde{K}$ и ввиду [1, утверждение 24.6] $\widetilde{T} = C_{\widetilde{T}}(S) \times [\widetilde{T}, S]$ и $[\widetilde{T}, S] \trianglelefteq \widetilde{G}$. Поэтому $\widetilde{T}$ содержит подгруппу порядка p^e, нормальную в $\widetilde{G}$, противоречие с предложением 3. □

Таким образом, $T = [T, S]K$, группа T специальна и группа K элементарна. Далее, группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит элемент порядка $(p^e - 1)/(e, p^e - 1)$.

Утверждение: Для любой подгруппы K_1 индекса p из K факторгруппа T/K_1 является экстраспециальной группой экспоненты p.

Доказательство утверждения. Обозначим через Z полный прообраз группы $Z(T/K_1)$ в T. Очевидно $K \le Z$. Так как $Z' \le K_1$, то $Z < T$. Если $Z > K$, то поскольку $Z/K_1 \trianglelefteq TC_{G_a}(K)/K_1$, то группа Z/K является $C_{G_a}(K)$-инвариантной и, следовательно, множество $Z/K - \{1\}$ является объединением некоторого числа S-орбит, откуда число $|Z/K| - 1$ делится на s, противоречие. Значит, $Z(T/K_1) = K/K_1 = (T/K_1)'$.

Обозначим через Q полный прообраз группы $\Omega_1(T/K_1)$ в T. Очевидно $K \le Q$. По [1, утверждение 23.12] $|T/K_1 : \Omega_1(T/K_1)| \le p$ и поскольку $Q/K_1 \trianglelefteq TC_{G_a}(K)/K_1$, то группа Q/K является $C_{G_a}(K)$-инвариантной. Отсюда множество $Q/K - \{1\}$ является объединением некоторого числа S-орбит и тем самым число $|Q/K| - 1$ делится на s, что влечет $Q = T$. $\square$

Значит, $\mho^1(T) = 1$ и поэтому T — специальная группа экспоненты p. Таким образом, по [28, теорема 1] $S \le C_R(K) \le C_{\mathrm{Aut}(T/K_1)}(K/K_1)/\mathrm{Inn}(T/K_1) \simeq Sp_e(p)$ и $\mathrm{Out}(T/K_1) \simeq GSp_e(p)$. При этом группа $C_R(K)$ изоморфно вкладывается в подгруппу Зингера группы $Sp_e(p)$, следовательно, ее порядок делит число $p^{e/2} + 1$ (см., например, [26, таблица 1]).

Значит, число $|R^*|$ делится на $(p^{e/2} - 1)/(e, p^e - 1)$ и делит $|GL_{e-l}(p)|$.

1.1. Допустим, что $e > 2$. Заметим, что по теореме Жигмонди если $r < p^{e/2}$, то $e = 4$ и $p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна. Действительно, если существует примитивный простой делитель t числа $p^{e/2} - 1$, то по малой теореме Ферма t делит и $|GL_{e-l}(p)|$, что влечет $e - l \ge e/2$, то есть $r \ge p^{e/2}$.

Если $R \le N_G(K_1)$ для подгруппы K_1 индекса p из K, то, поскольку группа T/K_1 экстраспециальна, получим, что $R \le \mathrm{Out}(T/K_1), C_R(K/K_1) \le Sp_e(p)$ и $|R/C_R(K/K_1)|$ делит $p - 1$, откуда $p = 3, e = 4$. Учитывая, что $GSp_4(3)$ не содержит элементов порядка 40, заключаем $|R| = 20$ и $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$.

Поэтому при $(e;p) \ne (4;3)$ группа R не нормализует ни одной подгруппы индекса p в K и, в частности, $r > p$.

Предположим, что $e = 4$ и $p > 3$. Найдем допустимые значения r в этом случае.

Если $r = p^3$, то $|K : [K, R^*]| \ne p$ и $|K : C_K(R^*)| \ne p$, поэтому ввиду [1, утверждение 24.6] $C_K(R^*) = 1$, циклическая группа R^* действует неприводимо на K и содержится в подгруппе, порожденной циклом Зингера группы $GL_3(p)$. Но в этом случае $(p^2 - 1)/4$ делит $(p^3 - 1, p^2 - 1) = p - 1$, откуда $p = 3$, противоречие.

Значит, $r = p^2 = \mu$. Отсюда $C_K(R^*) = 1$ и циклическая группа R^* действует неприводимо на K, поэтому она содержится в подгруппе, порожденной циклом Зингера группы $GL_2(p)$. Имеем $\alpha_0(g) = 1, \alpha_3(g) = r - 1$ и $|R|$ делит $\alpha_1(g)$. Тогда $\alpha_1(g) = \gamma(p^2 - 1)/4$, где $\gamma \le 4p^2$, и

$$\chi_1(g) = \frac{m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k}{m + n} = \frac{\gamma(p^2 - 1)/4 - p^4 + 1}{2p^2} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $\gamma = 4 + zp^2, 0 \le z \le 3$.

1.2. Пусть $e = 2$. Тогда $r = p$ и по теореме Жигмонди p не является числом Мерсенна. Тогда T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \le \mathrm{Out}(T) \simeq GL_2(p)$.

2. Теперь пусть $e = 2, p = 2^q - 1$ является простым числом Мерсенна, число q — простое и $r = p$. Тогда либо T — экстраспециальная группа экспоненты p

и $G_a \leq \mathrm{Out}(T) \simeq GL_2(p)$, либо T — абелева группа и ввиду предложения 3 и замечания 2 $C_T(G_a) = 1$ и $p > 3$.

Лемма доказана. □

4.3. **Симплектический случай.**

Лемма 14 ([35, лемма 11])**.** *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (ii) предложения 1. Тогда T — специальная p-группа порядка rp^e, $Sp_{2d}(p^c) \leq C$, $k = p^{2dc} - 1$, $m = p^{dc} + 1$, $n = p^{dc} - 1$, r делит p^c, $r\mu = p^{2dc}$, $\mu = p^l$ и Γ имеет массив пересечений*

$$\{p^{2dc} - 1, (p^{2dc-l} - 1)p^l, 1; 1, p^l, p^{2dc} - 1\}.$$

Доказательство. Пусть $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$ и $Y = {G_a}^\infty$. Ввиду замечания 2 можно полагать, что $(e;p) \neq (2;3)$. Тогда $Y \neq 1$ и G_a содержит циклическую подгруппу R порядка $p^{e/2} + 1$, порожденную циклом Зингера g группы Y. Обозначим $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m + n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Значит, $C_T(R) \leq K$.

Допустим, что $Y \not\leq C_G(K)$. Тогда

$$Y/C_Y(K/\Phi(K)) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p).$$

Следовательно, либо $e = 2$ и группа $K/\Phi(K)$ — циклическая, либо $e \geq 3$ и по теореме Жигмонди существует примитивный простой делитель s числа $p^e - 1$, поэтому в любом случае получим, что Y централизует $K/\Phi(K)$. По [1, утверждение 24.1] R не может действовать точно на K и поэтому $C_R(K) \leq Z(Y)$. Если $e \geq 3$, то подгруппа из R порядка s содержится в $Z(Y)$, противоречие. Значит, $e = 2$ и $r = p$, снова противоречие.

Таким образом, $T = KC_T(K)$ и $Y \leq C_G(K)$. Значит, $C_T(R) = K$. Ввиду [1, упражнение 3.6] $[T, R] \leq C_T(K)$ и по [1, утверждение 24.4] $T = [T, R]K$.

Если $Z(K) < K$, то граф $\Gamma^{Z(K)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/Z(K)$, которая содержит нормальную подгруппу $C_T(K)/Z(K)$ порядка p^e, противоречие с предложением 3.

Поэтому $K \leq Z(T)$.

Утверждение: Случай $\Phi(T) < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда граф $\Gamma^{\Phi(T)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/\Phi(T)$, которая содержит нормальную регулярную элементарную абелеву p-подгруппу $T/\Phi(T)$. По [1, утверждение 24.6] $T/\Phi(T) = [T/\Phi(T), R] \times C_{T/\Phi(T)}(R)$.

По предложению 3 $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)Y$-модулем и следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна, что противоречит [18, теорема 2.3] (см. также [14]). □

Утверждение: Случай $T' < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $T' < K$. Положим $\widetilde{T} = T/T'$ и $\widetilde{K} = K/T'$. Если $\Phi(\widetilde{T}) < \widetilde{K}$, то получим противоречие как и в случае $\Phi(T) < K$.

Поэтому $\widetilde{K} = \Phi(\widetilde{T}) = (\widetilde{T})' \cdot \mho^1(\widetilde{T}) = \mho^1(\widetilde{T})$. Тогда $\widetilde{T}$ — группа экспоненты p^j для некоторого $j > 1$. Поскольку группа $\Omega_{j-1}(\widetilde{T})$ характеристична в $\widetilde{T}$, то по предложению 3 она содержится в $\widetilde{K}$, то есть $\mho^1(\widetilde{T}) = \Omega_{j-1}(\widetilde{T})$ и экспонента группы $\widetilde{K}$ равна p^{j-1}. Поэтому $\widetilde{T} = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_l \times A_s$, где $C_i \simeq Z_{p^j}$ для некоторых $l \geq i \geq 1$ и A_s — некоторая подгруппа из $\widetilde{K}$ порядка $p^s \geq 1$, поэтому $|\widetilde{T}| = p^e|\widetilde{K}| = p^{jl} \cdot p^s$ и $p^{(j-1)l+s}$ делит $|\widetilde{K}|$, противоречие с тем, что $p^e > |K|$. $\square$

Утверждение: T — специальная группа экспоненты p и r делит p^c.

Доказательство утверждения. Так как $K = T' = Z(T) = \Phi(T)$, то K — элементарная абелева p-группа и T — специальная группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Γ. При этом группа TY является центральным расширением группы $(TY)^\Sigma$, и по предложению 3 обе эти группы совпадают со своими коммутантами. Отсюда по [1, утверждение 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TY)^\Sigma)/\mathrm{M}(TY)$.

Заметим, что мультипликатор Шура группы $X = ASp_{2d}(p^c) = P : X_0$, где $d \geq 1, X_0 = Sp_{2d}(p^c)$ и P — естественный X_0-модуль, является элементарной абелевой группой порядка $q = p^c$ и универсальная накрывающая группа для X имеет вид $\widehat{P} : X_0$, где $\widehat{P}$ — это специальная группа порядка q^{2d+1} и экспоненты p. При этом коммутаторное отображение в $\widehat{P}$ индуцирует невырожденную знакопеременную форму на P, инвариантную относительно X_0.

Поэтому $|K|$ делит p^c. $\square$

Из приведенных выше рассуждений следует, что при $r = p^c$ группа TY определена однозначно (с точностью до изоморфизма), а при $r < p^c$ универсальная накрывающая группа $\widehat{TY}$ для $(TY)^\Sigma$ в то же время является универсальной накрывающей и для группы TY. Таким образом, группа TY изоморфна факторгруппе своей универсальной накрывающей группы $\widehat{TY}$ по некоторой подгруппе из $Z(\widehat{TY})$ порядка p^c/r (см., например, [1, утверждение 33.1]).

Лемма доказана. $\square$

4.4. **Линейный случай.**

Лемма 15 ([35, лемма 12])**.** *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (i) предложения 1. Тогда $d = 2$ и выполнено заключение леммы 14 (для случая $Sp_2(p^c) \trianglelefteq G_a$).*

Доказательство. Пусть $e = cd$, $d \geq 3$, $SL_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_d(p^c)$ и $Y = {G_a}^\infty$. Тогда G_a содержит циклическую подгруппу R порядка $(p^e-1)/(p^c-1)$, порожденную циклом Зингера g группы Y. Обозначим $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 3

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Значит, $C_T(R) \leq K$.

Допустим, что $Y \not\leq C_G(K)$. Тогда

$$Y/C_Y(K/\Phi(K)) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq GL_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p).$$

Но $e \geq 4$ и по теореме Жигмонди существует примитивный простой делитель s числа $p^e - 1$, поэтому подгруппа R_0 из R порядка s централизует $K/\Phi(K)$.

Отсюда по [1, утверждение 24.1] R_0 не может действовать точно на K и поэтому $R_0 \leq C_R(K) \leq Z(Y)$, противоречие.

Таким образом, $T = KC_T(K)$ и $Y \leq C_G(K)$. Значит, $C_T(R) = K$. Ввиду [1, упражнение 3.6] $[T, R] \leq C_T(K)$ и по [1, утверждение 24.4] $T = [T, R]K$.

Если $Z(K) < K$, то граф $\Gamma^{Z(K)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/Z(K)$, которая содержит нормальную подгруппу $C_T(K)/Z(K)$ порядка p^e, противоречие с предложением 3.

Поэтому $K \leq Z(T)$.

Утверждение: Случай $\Phi(T) < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда граф $\Gamma^{\Phi(T)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/\Phi(T)$, которая содержит нормальную регулярную элементарную абелеву p-подгруппу $T/\Phi(T)$. По [1, утверждение 24.6] $T/\Phi(T) = [T/\Phi(T), R] \times C_{T/\Phi(T)}(R)$.

По предложению 3 $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)Y$-модулем.

Следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна, но $e \geq 4$, что противоречит [17, лемма 4] (см. также [14]). □

Утверждение: Случай $T' = K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Пусть $T' = K$. Тогда $\Phi(T) = K = Z(T)$ — элементарная абелева p-группа и T — специальная группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Γ. Пусть K_1 — подгруппа индекса p из K. Тогда TY/K_1 действует транзитивно на дугах графа Γ^{K_1} и по доказанному выше можно считать, что $\Phi(T/K_1) = K/K_1$.

Допустим, что $(T/K_1)' = K/K_1$. Тогда T/K_1 — экстраспециальная группа и коммутаторное отображение группы T задает знакопеременную билинейную форму φ из $\bar{T} \times \bar{T}$ на K/K_1, где K/K_1 отождествляется с полем $\mathbb{GF}(p)$ и $\bar{T}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{GF}(p)$ размерности e (см., например, [1, утверждение 23.10]). При этом Y вкладывается в группу изометрий симплектического пространства $(\bar{T}, \varphi)$, то есть $Y \leq Sp_e(p)$. Но тогда $(p^e - 1)/(p^c - 1) < p^{e/2+1}/(p-1)$ и $d = 2$, противоречие с условием.

Значит, T/K_1 — абелева группа экспоненты p^2, $K/K_1 = \mho^1(T/K_1) = \Omega_1(T/K_1)$ и $T/K_1 = C_1 \times \ldots C_l \times A_s$, где $C_i \simeq Z_{p^2}$ для $l \leq i \leq 1$ и A_s — подгруппа из K/K_1 порядка $p^s \leq p$. Отсюда $|T/K_1| = p^e|K/K_1| = p^{2l}p^s$ и p^{l+s} делит p, противоречие с тем, что $|K| < p^e$.

Утверждение: Случай $T' < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Пусть $T' < K$ и K_1 — подгруппа индекса p в K, содержащая T'. По доказанному выше можно считать, что $\Phi(T/K_1) = K/K_1$. Но тогда T/K_1 — абелева группа экспоненты p^2 и $K/K_1 = \mho^1(T/K_1) = \Omega_1(T/K_1)$, противоречие как и выше. □

Лемма доказана. □

5. Случай $p > 2$: дальнейшая редукция

В этом разделе мы докажем, что в каждом допустимом случае, кроме одномерного, граф из заключения теоремы 2 известен и может быть построен с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля (см. теорему 3).

Для того чтобы установить упомянутый выше изоморфизм, сначала мы приведем предварительный базовый результат. Напомним, что $G_{\{F\}} = H$, $H = KG_a$, T действует регулярно на $V(\Gamma)$ и $G = TG_a$. Группа подстановок X на Ω называется *точно* 2-*транзитивной*, если X действует 2-транзитивно на Ω и стабилизатор любых двух различных точек из Ω в X тривиален.

Лемма 16 ([36, лемма 1])**.** *Предположим, что G — транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа Γ. Пусть g — это 2-элемент группы G, переставляющий две смежные вершины a и $b = a^g$ графа Γ. Если стабилизатор дуги в G имеет нечетный порядок, то g — это инволюция и, в частности, если G индуцирует точно 2-транзитивную группу подстановок на Σ, то каждый элемент из $G - H$ единственным образом представим в виде fh_1gh_2, где $f \in K$ и $h_1, h_2 \in G_a$.*

Рассмотрим теперь совокупность случаев, выделенных в леммах 11, 12 и 13.

Лемма 17. *Пусть T — экстраспециальная группа порядка p^3, Γ имеет массив пересечений*
$$\{p^2-1, p(p-1), 1; 1, p, p^2-1\}$$
и G_a — циклическая группа порядка p^2-1, или $p \in \{5, 7, 11, 23\}$ и $SL_2(3) \trianglelefteq G_a$, или $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ и $SL_2(5) \trianglelefteq G_a$. Тогда Γ — дистанционно-транзитивный граф.

Доказательство. Напомним, что T — группа экспоненты p и $C = C_{G_a}(K)$. Пусть $T = \langle x_1, x_2\rangle$, $f = [x_1, x_2]$ и $V = \{x_1^{i_1}x_2^{i_2} | i_1, i_2 \in \{1, ..., p\}\}$ — трансверсаль группы K в T.

Так как T — регулярная группа автоморфизмов графа Γ, то $\Gamma \simeq \mathrm{Cay}(T, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ — это некоторый класс (размера p^2-1) элементов группы T, сопряженных в G_a.

Имеем $K = Z(TC)$. Отождествим K с полем порядка p и рассмотрим $\bar{T} = T/K$ как векторное пространство над K. Коммутаторное отображение $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto [x, y]$ из $\bar{T} \times \bar{T}$ в K, где $\bar{x} = xK$ и $\bar{y} = yK$, задает невырожденную знакопеременную форму на $\bar{T}$. Таким образом, $C \leq Sp_2(p)$.

Покажем, что граф Γ изоморфен дистанционно регулярному графу с массивом пересечений
$$\{p^2-1, p(p-1), 1; 1, p, p^2-1\},$$
получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы (см., например, [2, с. 385]). Для удобства мы будем использовать эквивалентную ей конструкцию, приведенную в [2, предложение 12.5.1].

Пусть Γ_T — граф, множеством вершин которого являются элементы множества $K \times \bar{T}$, в котором две вершины $(f^m, \bar{r}_i)$ и $(f^n, \bar{r}_j)$, где $r_i, r_j \in V$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, смежны тогда и только тогда, когда $[r_i, r_j] = f^{m-n}$ и $r_i \neq r_j$. Известно, что Γ_T — дистанционно-транзитивный граф и стабилизатор его вершины в полной группе автоморфизмов содержит подгруппу, изоморфную группе $Sp_2(p)$, которая фиксирует поточечно антиподальный класс, содержащий данную вершину, и действует транзитивно на остальных антиподальных классах (см. [8, пример 3.6]).

Как и в [36] доказывается, что отображение φ из T в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу
$$((f^m, \bar{r}_i))\varphi(f^l r_s) = (f^{-2l} f^{m+\delta(r_i, r_s)}, \bar{r}_i\bar{r}_s),$$

где через r_z обозначается элемент $x_1^{z_1}x_2^{z_2}$ для $z_1, z_2 \in \{1, ..., p\}$ (символ z заменяет i или s) и

$$\delta(r_i, r_s) = s_2 i_1 - s_1 i_2 - s_1 s_2,$$

для всех $l \in \{1, ..., p\}$ и $r_s \in V$, задает регулярную группу $\varphi(T)$ автоморфизмов графа Γ_T и $T \simeq \varphi(T)$.

Рассмотрим теперь отображение ψ из G_a в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу $\psi(h) : (u, \bar{x}) \mapsto (u^h, \overline{x^h})$ для всех $h \in G_a$, $x \in V$ и $u \in K$. Ясно, что $G_a \simeq \psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть $sc : T \to K$ и $tr : T \to V$ — две функции, определяемые соотношением $g = sc(g)tr(g)$ для каждого $g \in T$.

Возьмем произвольно $h \in G_a$ и $g \in T$. Тогда $g = (f^l r_s)^h$ для некоторых $f^l \in K$ и $r_s \in V$. Ввиду тождества $f^{\delta(r_i, r_s)} = [r_i, r_s]f^{-s_1 s_2}$ имеем

$$\begin{gathered}
((f^m, \bar{r}_i))\psi(h)\varphi(g) = \\
(((f^m)^h, \overline{r_i{}^h}))\varphi((f^l r_s)^h) = (((f^m)^h, \overline{r_i{}^h}))\varphi((f^l)^h sc(r_s{}^h)tr(r_s{}^h)) = \\
((((f^l)^h)^{-2} sc(r_s{}^h)^{(-2)} (f^m)^h f^{\delta(tr(r_i{}^h), tr(r_s{}^h))}, \overline{(r_i r_s)^h}) = \\
((f^{-2l} f^m (sc(r_s{}^h)^{(-2)} f^{\delta(tr(r_i{}^h), tr(r_s{}^h))})^{h^{-1}}, \overline{r_i r_s})\psi(h) = \\
((f^{-2l} f^m (sc(r_s{}^h)^{(-2)} f^{\delta(tr(r_i{}^h), tr(r_s{}^h))})^{h^{-1}} f^{-\delta(r_i, r_s)}, \overline{r_i})\varphi(r_s)\psi(h) = \\
((f^{-2l} f^m (sc(r_s{}^h)^{(-2)} f^{-j_1 j_2})^{h^{-1}} f^{s_1 s_2}, \overline{r_i})\varphi(r_s)\psi(h) = ((f^m, \bar{r}_i))\varphi(f^t r_s)\psi(h),
\end{gathered}$$

где $tr(r_s{}^h) = r_j = x_1{}^{j_1} x_2{}^{j_2}$ и $f^{2t} = (f^{-2l}(sc(r_s{}^h)^{(-2)} f^{-j_1 j_2})^{h^{-1}} f^{s_1 s_2}$. Такое число t существует (поскольку $\langle f^2 \rangle = K$) и не зависит от выбора вершины $(f^m, \bar{r}_i) \in V(\Gamma_T)$. Отсюда $\psi(G_a)$ нормализует $\varphi(T)$ и $\psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\varphi(T))$. Пусть $\tilde{\psi}(G_a)$ — это подгруппа из $\mathrm{Aut}(\varphi(T))$, индуцируемая действием группы $\psi(G_a)$ на $\varphi(T)$.

Нетрудно видеть, что для каждой вершины $\tilde{c} = (f^m, \bar{r}_i)$ графа Γ_T центральная инволюция подгруппы из $(\mathrm{Aut}(\Gamma_T))_{\tilde{c}}$, изоморфной $Sp_2(p)$, инвертирует $(p^2-1)/2$ ребер из окрестности вершины $\tilde{c}$.

Если группа ${G_{\{F\}}}^F (\simeq G_{\{F\}}/C)$ неразрешима, то по теореме Бернсайда (см. [22, теорема 11.7]) группа ${G_{\{F\}}}^F$ действует 2-транзитивно на F. Но в этом случае по предложению 1 $G_a/C \simeq GL_1(p)$, противоречие.

Таким образом, группа $G_{\{F\}}/C$ разрешима и G_a/C действует точно на K, то есть $G_a/C \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{p-1}$.

1. Экстраспециальный случай для G_a был рассмотрен в замечании 3.

2. Пусть для G_a выполняется исключительный случай. Тогда $SL_2(5) \leq G_a$ и $p \in \{11, 19, 29, 59\}$.

Возможность $p < 59$ была рассмотрена в замечании 4.

Пусть $p = 59$. В этом случае (см. замечание 4) группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе G_a. Если η — гомоморфизм из $\mathrm{Aut}(T)$ в $\mathrm{Aut}(\varphi(T))$, определенный посредством тождества $\varphi(g)^{\eta(\sigma)} = \varphi(g^\sigma)$ для всех $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$ и $g \in T$, то $\eta(G_a)^\pi = \tilde{\psi}(G_a)$ для некоторого $\pi \in \mathrm{Aut}(\varphi(T))$ и в частности, $TG_a \simeq (\varphi(T)\eta(G_a))^\pi = \varphi(T)\tilde{\psi}(G_a) \simeq \varphi(T)\psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть $\epsilon : TG_a \to \varphi(T)\psi(G_a)$ — указанный выше изоморфизм.

Таким образом, $\epsilon(TG_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$ и $TG_a \leq \mathrm{Hol}(T)$, то есть граф Γ_T допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов TG_a, которая вкладывается в подгруппу из $\mathrm{Hol}(T)$. При этом $TC \leq T : Sp_2(p)$.

Имеем $G_a \simeq SL_2(5) \times Z_{29}$ и G_a регулярна на $[a]$. Из леммы 16 следует, что вершина a смежна с вершиной a^g, где g — это некоторая инволюция из $G - G_a$. По [1, утверждение 40.5] G_a содержит всего одну (центральную) инволюцию и эта инволюция инвертирует каждый элемент из $\bar{T}$. Поэтому $g \in Z(G_b)$ для некоторой вершины b графа Γ и каждая $\langle g \rangle$-орбита на множестве $V(\Gamma) - F(b)$, где $F(b)$ — антиподальный класс, содержащий вершину b, индуцирует ребро в Γ. Таким образом, G содержит ровно один класс сопряженных инволюций (размера $k+1$) и две вершины x и y графа Γ смежны тогда и только тогда, когда $x^h = y$ для некоторой инволюции $h \in G - G_x$.

С другой стороны, так как G_a транзитивна на $\bar{T}^{\#}$, то для инволюции h из G_a любые две вершины вида $(1, \overline{r_i})$ и $(1, \overline{r_i}^h)$ смежны в графе Γ_T. Поэтому инволюция g переставляет между собой две смежных вершины $(1, \overline{1})$ и $((1, \overline{1}))\epsilon(g)$ графа Γ_T.

Таким образом, $\Gamma \simeq \Gamma(G, G_a, G_a g G_a) \simeq \Gamma_T$ (см. например, [8, лемма 2.7]).

3. Одномерный случай с $GL_1(p^2) \leq G_a$ был рассмотрен в [36].

Лемма доказана. $\square$

Теорема 3 следует из леммы 17, замечаний 3 и 4, а также работы [36], в которой были рассмотрены остальные случаи. Наконец, из теоремы 3 и [8, теорема] вытекает следствие 1.

References

[1] M. Aschbacher, *Finite Group Theory, second ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Zbl 0997.20001

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc, 1989. Zbl 0747.05073

[3] A.E. Brouwer, J.H. Koolen, M.H. Klin, *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph*, Discrete Math., **264**:1-3 (2003), 13–24. Zbl 1023.05135

[4] S.E. Payne, *The generalized quadrangle with* $(s;t) = (3;5)$, Congr. Numerantium, **77** (1990), 5–29. Zbl 0880.51002

[5] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. Zbl 0922.20003

[6] P.J. Cameron, J.H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, London Math. Soc.Student Texts, **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991. Zbl 0743.05004

[7] J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985. Zbl 0568.20001

[8] C.D. Godsil, R.A. Liebler, C.E. Praeger, *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Eur. J. Comb., **19**:4 (1998), 455–478. Zbl 0914.05035

[9] C.D. Godsil, A.D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Comb. Theory, Ser. B., **56**:2 (1992), 205–238. Zbl 0771.05031

[10] B. Huppert, *Zweifach transitive, auflosbare Permutationsgruppen*, Math. Z., **68** (1957), 126–150. Zbl 0079.25502

[11] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967. Zbl 0217.07201

[12] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups. III*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1982. Zbl 0514.20002

[13] W.M. Kantor, A. Seress, *Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups*, J. Algebra, **322**:3 (2009), 802–832. Zbl 1180.20009

[14] W. Jones, B. Parshall, *On the 1-cohomology of finite groups of Lie type*, Proc. Conf. finite Groups, Park City 1975, (1976), 313–328. Zbl 0345.20046

[15] Ch. Hering, *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order*, Geom. Dedicata, **2** (1974), 425–460. Zbl 0292.20045

[16] J.D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **163**, Springer, New York, 1996. Zbl 0951.20001

[17] D.G. Higman, *Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces*, Ill. J. Math., **6** (1962), 434–446. Zbl 0105.13101

[18] H. Pollatsek, *First cohomology groups of some linear groups over fields of characteristic two*, Ill. J. Math., **15** (1971), 393–417. Zbl 0218.20039

[19] M. Klin, Ch. Pech, *A new construction of antipodal distance-regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices*, Ars Math. Contemp., **4**:2 (2011), 205–243. Zbl 1245.05136

[20] M.W. Liebeck, J. Saxl, *The primitive permutation groups of odd degree*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., **31**:2 (1985), 250–264. Zbl 0573.20004

[21] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symb. Comput., **24**:3-4 (1997), 235–265. Zbl 0898.68039

[22] H. Wielandt *Finite permutation groups*, Academic Press, New York. 1964. Zbl 0138.02501

[23] J. Bray, D. Holt, C. Roney-Dougal, *The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **407**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Zbl 1303.20053

[24] S.H. Alavi, T.C. Burness, *Large subgroups of simple groups*, J. Algebra, **421** (2015), 187–233. Zbl 1308.20012

[25] M.W. Liebeck, *On the orders of maximal subgroups of the finite classical groups*, Proc. London Math. Soc., III. Ser., **50** (1985), 426–446. Zbl 0591.20021

[26] A. Bereczky, *Maximal overgroups of Singer elements in classical groups*, J. Algebra, **234**:1 (2000), 187–206. Zbl 0971.20024

[27] R.A. Wilson, *The finite simple groups*, Grad. Texts in Math., **251**, Springer-Verlag, London, 2009. Zbl 1203.20012

[28] D.L. Winter, *The automorphism group of an extraspecial p-group*, Rocky Mt. J. Math., **2**:2 (1972), 159–168. Zbl 0242.20023

[29] K.S. Braun, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, etc., 1982. Zbl 0584.20036

[30] V.A. Belonogov, *Representations and Characters of Finite Groups*, Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel., Sverdlovsk, 1990. Zbl 0788.20003 (in Russian).

[31] V.D. Mazurov, *Minimal permutation representations of finite simple classical groups. Special linear, symplectic, and unitary groups*, Algebra Logic, **32**:3 (1993), 142–153. Zbl 0854.20017

[32] A.V. Vasil'ev, *Minimal permutation representations of finite simple exceptional groups of types G_2 и F_4*, Algebra Logika **35**:6 (1996), 663–684. Zbl 0880.20006

[33] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *Geodesic Graphs with Homogeneity Conditions*, Dokl. Math., **78**:2 (2008), 743–745. Zbl 1250.05038

[34] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive distance-regular coverings of cliques with $\lambda = \mu$*, Proc. Steklov Inst. Math., **284**, suppl. 1 (2014), S124–S134. Zbl 1304.05038

[35] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of cliques: The affine case*, Sib. Math. J., **54**:6 (2013), 1076–1087. Zbl 1282.05065

[36] L. Yu. Tsiovkina, *On affine distance-regular covers of complete graphs*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **12** (2015), 998–1005. Zbl 1341.05125

Ludmila Yur'evna Tsiovkina
Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskoi str.,
Yekaterinburg, 620219, Russia
E-mail address: tsiovkina@imm.uran.ru