

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ПЕРЕНОСА-ДИФФУЗИИ С НЕПОСТОЯННЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ

А. НЕМДИЛИ , Х. ФУДЖИТА ЯШИМА 

Представлено ???

Abstract: The transport-diffusion equation with a non-constant diffusion coefficient in the whole space \mathbb{R}^d is considered and a family of approximate solutions is defined by using the fundamental solution of the heat equation (heat kernel) and the translation corresponding to transport on each step of time discretization. Under appropriate conditions on the regularity of the data, the uniform convergence of approximate solutions to a function which satisfies the transport-diffusion equation is proved. To estimate and to prove the convergence of approximate solutions, we first estimate and prove the convergence of the “positions” with respect to which we apply the integral operator with the heat kernel. We also improve the convergence of the time derivative of approximate solutions.

Keywords: transport-diffusion equation, non-constant diffusion coefficient, approximation by time discretization, heat kernel.

1 Введение

Уравнение переноса-диффузии

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = \kappa \Delta u + f \quad (1)$$

изучалось во многих работах как типичное параболическое уравнение. Хорошо известно, что наличие слагаемого $\kappa \Delta u$ позволяет получить оценки как в пространстве Соболева, так и в пространстве Гёльдера, и с помощью этих оценок доказывается разрешимость уравнения (1) с рядом условий (см., например, [9, 10, 8]). Существует также метод стохастического представления решения (см., например, [7], гл. VIII). Использование этого метода позволило охарактеризовать на языке теории вероятностей поведение решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю (см. [3]).

Недавно было предложено также приближение решения уравнения переноса-диффузии, основанное на использовании ядра теплопроводности (фундаментального решения уравнения теплопроводности) и перемещения, соответствующего переносу, на каждом шаге дискретизованного времени, сначала во всем пространстве \mathbb{R}^d (см. [12, 11]), а затем в полупространстве с однородным граничным условием Дирихле (см. [2, 5]) и с однородным граничным условием Неймана (см. [6]). Гладкость решения, полученная в результате этого приближения, ниже, чем полученная другими методами (как в [9]), но оно позволяет охарактеризовать явно поведение решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю (см. [1, 4]).

В работах [1, 4, 5, 6, 11, 12] рассматривался только коэффициент диффузии κ , не зависящий от $x \in \mathbb{R}^d$, что позволяло избежать дополнительных сложностей. В настоящей работе мы рассматриваем уравнение переноса-диффузии с коэффициентом диффузии $\kappa = \kappa(x)$, зависящим от $x \in \mathbb{R}^d$, и показываем, что приближенные решения, построенные с использованием ядра теплопроводности и перемещения, соответствующего переносу, на каждом шаге дискретизованного времени, сходятся к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии и начальному условию в \mathbb{R}^d . Чтобы преодолеть сложности, связанные с зависимостью коэффициента κ от x , рассматриваем последовательность положений $X_{k,y}^{n,h}(x)$, по которым вычисляется интеграл с ядром теплопроводности в каждом шаге дискретизованного времени. Как будет показано, оценки приближенных решений опираются на оценки $X_{k,y}^{n,h}(x)$, а получение таких оценок очень нетривиально. Построение последовательности $X_{k,y}^{n,h}(x)$ и ее связь со значениями приближенных решений имеет схожие аспекты со стохастическим представлением решения. Однако, в данной работе все рассуждения делаются без использования теории вероятностей.

В данной работе докажем также равномерную сходимость производной справа по t приближенных решений к производной по t решения

уравнения. Напомним, что в предыдущих работах доказывалась только сходимость в интегральном смысле производной по t (определенной на \mathbb{R}_+ , за исключением счетного множества t) приближенных решений к обобщенной производной по t решения уравнения.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение (1) со слагаемым f , не зависящим от искомой функции u . Однако, видимо можно обобщить наш результат на случай, когда f зависит от u некоторым естественным образом. Однако для этого потребовалась бы оценка другого типа. Поэтому в данной работе мы ограничимся случаем, когда f не зависит от u .

2 Определение приближенных решений и основной результат

Определим семейство приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, для уравнения

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa(x) \Delta u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3)$$

где $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})^T$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$, а $v(t, x)$, $f(t, x)$, $\kappa(x)$ ($\kappa(x) > 0$), $u_0(x)$ — заданные функции. Для этого, введем, прежде всего, дискретизацию по времени

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \quad t_k^{[n]} = k\delta_n, \quad \delta_n = \frac{1}{2^n}, \quad (4)$$

для $n = 1, 2, \dots$, и обозначим через $\Theta_n(\cdot)$ ядро теплопроводности для $t = \delta_n$, т. е.

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\delta_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (5)$$

Обозначив

$$a(x) = \sqrt{\kappa(x)}, \quad (6)$$

определим приближенные решения $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad (7)$$

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - a(x)y) dy + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) \quad \text{при } t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Заметим, что (8) эквивалентно формуле

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa(x))^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\delta_n\kappa(x)}\right) \times \\ \times u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) dy + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Эта эквивалентность вытекает непосредственно из замены переменных $y' = a(x)y = \sqrt{\kappa(x)}y$.

Далее будем использовать следующие обозначения

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_j \geq 0.$$

Через $C_b(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать класс непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^d функций, а через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d))$ — класс непрерывных на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ и ограниченных на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при любого $\tau > 0$ функций.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$. Предположим, что

$$D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \quad \text{при } |\alpha| \leq q, \quad (11)$$

$$D_x^\alpha \kappa(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \quad \text{при } |\alpha| \leq q, \quad (12)$$

$$D_x^\alpha f(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \quad \text{при } |\alpha| \leq q, \quad (13)$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \quad \text{при } |\alpha| \leq q, \quad (14)$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \quad \text{при } |\alpha| \leq q - 1, \quad (15)$$

$$\partial_t D_x^\alpha f(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \quad \text{при } |\alpha| \leq q - 1. \quad (16)$$

Тогда функции $u^{[n]}(t, x)$, определенные соотношениями (7)–(9) и их производные $D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)$, $|\alpha| \leq q - 1$, сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ к одной функции $u(t, x)$ и к ее производным $D_x^\alpha u(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\tau > 0$ соответственно.

Если, кроме того, $q \geq 3$, то производная справа $(\partial_t u^{[n]})_+(t, x)$ функции $u^{[n]}(t, x)$ по t сходятся к $\partial_t u(t, x)$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\tau > 0$, причем предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет поточечно уравнению (2) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ и начальному условию (3) на \mathbb{R}^d .

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, заметим, что можно переписать (8) в более удобном для наших рассуждений виде. Действительно, если мы обозначим y^1 вместо y и введем обозначение

$$X_{k,y}^{n,1}(x) = x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - a(x)y^1,$$

то можно записать $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ в виде

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^1) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,1}(x)) dy^1 + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x).$$

Функция $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)$, в свою очередь, может быть выражена через функцию $X_{k,y}^{n,2}(x)$ и так далее. Поэтому, если определим

$$X_{k,y}^{n,0}(x) = x, \quad (17)$$

$$X_{k,y}^{n,h}(x) = X_{k,y}^{n,h-1}(x) - \delta_n v(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x)) - a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))y^h, \\ h = 1, \dots, k \quad (18)$$

(здесь h в обозначении y^h является простым индексом и не обозначает степень), то можно записать $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ в виде

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \left(\prod_{h=1}^k \Theta_n(y^h) \right) u_0(X_{k,y}^{n,k}(x)) dy^1 \dots dy^k + \\ + \delta_n \sum_{h=1}^{k-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) f(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \dots dy^h + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x), \quad (19)$$

где $\int_{(\mathbb{R}^d)^k} \dots dy^1 \dots dy^k$ — это аббревиатура от $\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \dots dy^1 \dots dy^k$ и аналогично для $\int_{(\mathbb{R}^d)^h} \dots dy^1 \dots dy^h$. В дальнейшем используем выражение (19) для (8).

3 Оценки производных функций $X_{k,y}^{n,h}(x)$

В этом разделе проведем оценки производных функций $X_{k,y}^{n,h}(x)$, определенных соотношениями (17)–(18).

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18). Предположим, что условия (11)–(12) с $q = 1$ выполнены. Тогда для каждого $(\bar{\tau}, m)$, $\bar{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, существует такая независимая от n и k постоянная $K_1 = K_1(\bar{\tau}, m)$, что, если $t_k^{[n]} \leq \bar{\tau}$, то для любого $i \in \{1, \dots, d\}$ имеем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m dy^1 \dots dy^h \leq e^{K_1 h \delta_n}. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $t_k^{[n]} \leq \bar{\tau}$. Дифференцируя j -ю компоненту двух частей равенства (18) по x_i , получим

$$\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j =$$

$$= \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j - \delta_n \sum_{l=1}^d v'_{j,l} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l - y_j^h \sum_{l=1}^d a'_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l, \quad (21)$$

где

$$v'_{j,l} = \partial_{\xi_l} v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)}, \quad a'_l = \partial_{\xi_l} a(\xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)}. \quad (22)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 = \\ & = \Xi^{(0)} - 2\delta_n \Xi^{(1)} - 2 \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)} + 2\delta_n \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(3)} + \delta_n^2 \Xi^{(4)} + \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)}, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi^{(0)} &= \sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j)^2, \\ \Xi^{(1)} &= \sum_{j,l=1}^d v'_{j,l} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l, \\ \Xi_j^{(2)} &= \sum_{l=1}^d a'_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l, \\ \Xi_j^{(3)} &= \sum_{l,l'=1}^d v'_{j,l} a'_{l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'}, \\ \Xi^{(4)} &= \sum_{j,l,l'=1}^d v'_{j,l} v'_{j,l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'}, \\ \Xi^{(5)} &= \sum_{l,l'=1}^d a'_l a'_{l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'}. \end{aligned}$$

Если возвести обе части (23) в степень m ($m = 1, 2, \dots$), то имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m = (\Xi^{(0)})^m - 2m\delta_n \Xi^{(1)} (\Xi^{(0)})^{m-1} - \\ & - 2m \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)} (\Xi^{(0)})^{m-1} + m \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)} (\Xi^{(0)})^{m-1} + \\ & + 2m(m-1) \sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(2)} \Xi_{j'}^{(2)} (\Xi^{(0)})^{m-2} + R_m, \quad (24) \end{aligned}$$

где R_m — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta_n^{p_0} (y_1^h)^{p_1} \dots (y_d^h)^{p_d}$ с $p_0 + \sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$.

Напомним, что $v'_{j,l}$, a'_l и $\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j$ не зависят от y^h . Поэтому $\Xi^{(0)}$, $\Xi^{(1)}$, $\Xi_j^{(2)}$, $\Xi_j^{(3)}$, $\Xi^{(4)}$ и $\Xi^{(5)}$ также не зависят от y^h . Напомним также, что для функции $\Theta_n(\cdot)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) (y_1^h)^{p_1} \dots (y_d^h)^{p_d} dy^h = 0, \quad \text{если } (p_1, \dots, p_d) \in \Pi_d, \quad (25)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) |y_1^h|^{p_1} \dots |y_d^h|^{p_d} dy^h = C_{(p_1, \dots, p_d)} \delta_n^{\frac{\bar{p}}{2}}, \quad \bar{p} = \sum_{j=1}^d p_j, \quad (26)$$

где Π_d — совокупность таких (p_1, \dots, p_d) , что по крайней мере есть один нечетный p_j , а $C_{(p_1, \dots, p_d)}$ — положительное число, определенное числами p_1, \dots, p_d . В частности имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) dy^h = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) (y_j^h)^2 dy^h = 2\delta_n, \quad j = 1, \dots, d. \quad (27)$$

Таким образом, получим

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) (\Xi^{(0)})^m dy^h = (\Xi^{(0)})^m, \quad (28)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \Xi^{(1)} (\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = \Xi^{(1)} (\Xi^{(0)})^{m-1}, \quad (29)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)} (\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = 0, \quad (30)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)} (\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = 2d\delta_n \Xi^{(5)} (\Xi^{(0)})^{m-1}, \quad (31)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(2)} \Xi_{j'}^{(2)} (\Xi^{(0)})^{m-2} dy^h = 2\delta_n \sum_{j=1}^d (\Xi_j^{(2)})^2 (\Xi^{(0)})^{m-2}. \quad (32)$$

Заметим, что из определения $\Xi^{(r)}$, $r = 1, \dots, 5$, и условий (11)–(12) вытекает существование такой независимой от n , k и h постоянной $C = C(\bar{\tau}, m)$, что

$$|\Xi^{(r)}| \leq C \Xi^{(0)}, \quad r = 1, \dots, 5. \quad (33)$$

Что касается слагаемого R_m , так как $\delta_n \leq \frac{1}{2}$, из (33) и наличия множителя $\delta_n^{p_0} (y_1^h)^{p_1} \dots (y_d^h)^{p_d}$ с $p_0 + \sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$ в каждом слагаемом из R_m следует, что существует независимая от n , k и h постоянная $C' = C'(\bar{\tau}, m)$ такая, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) R_m dy^h \right| \leq C' \delta_n (\Xi^{(0)})^m. \quad (34)$$

Из (24) и (28)–(34) следует, что существует независимая от n , k и h постоянная $K_1 = K_1(\bar{\tau}, m)$ такая, что

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m dy^1 \cdots dy^h \leq \\ & \leq (1 + K_1 \delta_n) \int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \left(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \right) (\Xi^{(0)})^m dy^1 \cdots dy^{h-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Положим

$$A_h^{(1,m)}(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m dy^1 \cdots dy^h. \quad (36)$$

Так как

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \left(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \right) (\Xi^{(0)})^m dy^1 \cdots dy^{h-1} = A_{h-1}^{(1,m)}(x),$$

неравенства (35) можно написать в виде

$$A_h^{(1,m)}(x) \leq (1 + K_1 \delta_n) A_{h-1}^{(1,m)}(x). \quad (37)$$

С другой стороны, из (17) следует, что

$$A_0^{(1,m)}(x) = 1. \quad (38)$$

Таким образом, из (37) и (38) вытекает, что

$$A_h^{(1,m)}(x) \leq (1 + K_1 \delta_n)^h. \quad (39)$$

Поскольку (39) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, с учетом неравенства

$$(1 + K_1 \delta_n)^h \leq e^{K_1 h \delta_n},$$

получим (20). Лемма доказана. \square

Лемма 2. Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, а $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18). Предположим, что условия (11)–(12) выполнены. Тогда для каждого $(\bar{\tau}, m)$, $\bar{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, существует непрерывная и возрастающая функция $\Phi^{(q,m)}(s) = \Phi^{(\bar{\tau};q,m)}(s)$, не зависящая от n , k и h , и такая, что, если $t_k^{[n]} \leq \bar{\tau}$, то для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = q$, имеем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m dy^1 \cdots dy^h \leq \Phi^{(q,m)}(h \delta_n). \quad (40)$$

Доказательство. Пусть $t_k^{[n]} \leq \bar{\tau}$. Так как утверждение леммы уже доказано в случае $q = 1$, то достаточно доказать его, предполагая, что оно верно для $q' = 1, \dots, q-1$. Итак, зафиксируем $q \geq 2$ и предположим, что справедливо неравенство (40) с q' вместо q , $q' = 1, \dots, q-1$.

Если применим дифференциальный оператор D_x^α ($|\alpha| = q$) к j -й компоненте (18), и возведем полученные выражения в квадрат, то, складывая $(D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x)))_j^2$ для $j = 1, \dots, d$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x)))_j^2 = \\ & = \Xi^{(q,0)} - 2\delta_n \Xi^{(q,1)} - 2 \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,2)} + 2\delta_n \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,3)} + \delta_n^2 \Xi^{(q,4)} + \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi^{(q,0)} &= \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))_j^2, \\ \Xi^{(q,1)} &= \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))_j D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x)), \\ \Xi_j^{(q,2)} &= (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))_j D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)), \\ \Xi_j^{(q,3)} &= (D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x))) D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)), \\ \Xi^{(q,4)} &= \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x)))^2, \\ \Xi^{(q,5)} &= (D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для $m = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x)))_j^2 \right)^m = (\Xi^{(q,0)})^m - 2m\delta_n \Xi^{(q,1)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} - \\ & - 2m \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} + m \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} + \\ & + 2m(m-1) \sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(q,2)} \Xi_{j'}^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-2} + R_m^{(q)}, \quad (41) \end{aligned}$$

где $R_m^{(q)}$ — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta_n^{p_0} (y_1^h)^{p_1} \dots (y_d^h)^{p_d}$ с $p_0 + \sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$. Учитывая независимость $\Xi^{(q,r)}$, $r = 0, 1, \dots, 5$, от y^h , аналогично интегралу относительно $\Xi^{(r)}$, показанному выше, получим

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) (\Xi^{(q,0)})^m dy^h = (\Xi^{(q,0)})^m, \quad (42)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \Xi^{(q,1)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} dy^h = \Xi^{(q,1)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1}, \quad (43)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} dy^h = 0, \quad (44)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} dy^h = 2d\delta_n \Xi^{(q,5)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) \sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(q,2)} \Xi_{j'}^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-2} dy^h = \\ = 2\delta_n \sum_{j=1}^d (\Xi_j^{(q,2)})^2 (\Xi^{(q,0)})^{m-2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Согласно определению $R_m^{(q)}$ имеем также

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) R_m^{(q)} dy^h \right| \leq \delta_n \Sigma_{\Xi}, \quad (47)$$

где Σ_{Ξ} — сумма произведений $|\Xi^{(q,r)}|$, $r = 0, 1, \dots, 5$.

Напомним, что производная $D_x^\alpha \varphi(X(x))$ сложной функции $\varphi(X(x))$ имеет выражение

$$\begin{aligned} D_x^\alpha \varphi(X(x)) = \sum_{q'=1}^{|\alpha|} \sum_{j_1, \dots, j_{q'}=1}^d \left(\frac{\partial^{q'}}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_{q'}}} \varphi(\xi) \Big|_{\xi=X(x)} \right) \times \\ \times \sum_{\sigma \in \Sigma_{\alpha, q'}} D_x^{\sigma^1} X_{j_1}(x) \dots D_x^{\sigma^{q'}} X_{j_{q'}}(x), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\Sigma_{\alpha, q'}$ — множество таких элементов $\sigma = \{\sigma^1, \dots, \sigma^{q'}\}$, что

$$\sigma^r = (\sigma_1^r, \dots, \sigma_d^r), \quad r = 1, \dots, q', \quad \sigma_i^r \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i^r \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^d \sigma_i^r \equiv |\sigma| \geq 1, \quad \sum_{r=1}^{q'} \sigma_i^r = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Итак, с учетом условий (11)–(12), имеем

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x))| + |D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))| \leq \\ \leq C \sup_{j' \in \{1, \dots, d\}} |D_x^\alpha (X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}| + P_{q-1}. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь C — независимая от n , k и h постоянная (постоянная C , которую используем здесь, а также постоянные C' , C'' и C''' , которые будем использовать в дальнейшем в этом доказательстве, зависят от $(\bar{\tau}, m, q)$, но, поскольку в этом доказательстве мы зафиксировали $(\bar{\tau}, m, q)$, просто говорим, что они независимы от n , k и h), а P_{q-1} — сумма произведений

$|D_x^\sigma(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q-1$), умноженных на абсолютное значение производных q' -го порядка, $1 \leq q' \leq q$, по x от $v(t, x)$ или $a(x)$.

Из соотношения (49) и определения $\Xi^{(q,r)}$, $r = 0, 1, \dots, 5$, следует, что

$$|\Xi^{(q,r)}| \leq C' \Xi^{(q,0)} + P'_{q-1}, \quad r = 1, \dots, 5, \quad (50)$$

где C' — независимая от n, k и h постоянная, а P'_{q-1} — сумма произведений множителей $\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'})^2$ ($1 \leq |\sigma| \leq q-1$), умноженных на независимые от n, k и h постоянные.

Положим теперь

$$A_h^{(q,m)}(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m dy^1 \dots dy^h. \quad (51)$$

Если интегрируем на $(\mathbb{R}^d)^h$ левую часть (41), умноженную на $\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'})$, то получим $A_h^{(q,m)}(x)$. Что касается первого слагаемого правой части (41), с учетом (42) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) (\Xi^{(q,0)})^m dy^1 \dots dy^h = \\ & = \int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \left(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \right) (\Xi^{(q,0)})^m dy^1 \dots dy^{h-1} = A_{h-1}^{(q,m)}(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (43)–(47) и (50) следует, что интеграл на $(\mathbb{R}^d)^h$ других слагаемых правой части (41), умноженных на $\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'})$, ограничен величиной

$$C'' \delta_n \int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \left(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \right) ((\Xi^{(q,0)})^m + (P'_{q-1})^m) dy^1 \dots dy^{h-1},$$

где C'' — независимая от n, k и h постоянная.

Таким образом, принимая во внимание предположение о справедливости (40) для $q' \leq q-1$, получим неравенство

$$A_h^{(q,m)}(x) \leq (1 + C''' \delta_n) A_{h-1}^{(q,m)}(x) + C''' \delta_n \tilde{C}(h\delta_n), \quad (52)$$

где C''' — независимая от n, k и h постоянная, а $\tilde{C}(s)$ — функция, возрастающая по $s \geq 0$ и не зависящая от n и k . Так как $A_0^{(q,m)}(x) = 0$, из (52) следует, что

$$A_h^{(q,m)}(x) \leq C''' \delta_n \sum_{j=1}^h (1 + C''' \delta_n)^{h-j} \tilde{C}(h\delta_n). \quad (53)$$

Поскольку (53) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, учитывая неравенство

$$\delta_n \sum_{j=1}^h (1 + C''' \delta_n)^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_n} e^{(h\delta_n-s)C'''} ds = \frac{1}{C'''} (e^{C''' h\delta_n} - 1),$$

получим (40) с $\Phi^{(q,m)}(s) = (e^{C''' s} - 1)\tilde{C}(s)$. Лемма доказана. \square

4 Оценки приближенных решений и их производных

В этом разделе устанавливаем оценки приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ и их производных. Так как при $t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}$ определяется $u^{[n]}(t, x)$ значениями $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ и $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ (см. (9)), для оценки $u^{[n]}(t, x)$ в отрезке $[0, \tau]$ используем часто отрезок $[0, \tau_+]$, где

$$\tau_+ = \tau + \delta_1. \quad (54)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, а $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены. Тогда существует непрерывная и возрастающая функция $\tilde{\Phi}_q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, не зависящая от n и удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)| \leq \tilde{\Phi}_q(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (55)$$

для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = q$ и любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Так как согласно (19) имеем

$$\begin{aligned} |u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| &\leq \left| \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \left(\prod_{h=1}^k \Theta_n(y^h) \right) u_0(X_{k,y}^{n,k}(x)) dy^1 \cdots dy^k \right| + \\ &+ \delta_n \sum_{h=1}^{k-1} \left| \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \cdots dy^h \right| + \delta_n |f(t_{k-1}^{[n]}, x)|, \end{aligned}$$

учитывая первое соотношение (27), получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq M_{u_0} + k\delta_n M_f = M_{u_0} + t_k^{[n]} M_f, \quad t_k^{[n]} \leq \tau_+, \quad (56)$$

где $M_{u_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u_0(x)|$ и $M_f = \sup_{(t,x) \in [0, \tau_+] \times \mathbb{R}^d} |f(t, x)|$. Поскольку неравенство (56) справедливо для любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, принимая во внимание определение (9), выводим существование функции $\tilde{\Phi}_0(t)$, удовлетворяющей (55) с $q = 0$.

Рассмотрим случай $q \geq 1$. Применяя дифференциальный оператор D_x^α , $|\alpha| = q$, к обеим частям (19), получаем

$$D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = I_1 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-1} I_{2,h} + \delta_n I_3, \quad (57)$$

где

$$I_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \left(\prod_{h=1}^k \Theta_n(y^h) \right) D_x^\alpha u_0(X_{k,y}^{n,k}(x)) dy^1 \cdots dy^k,$$

$$I_{2,h} = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) D_x^\alpha f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \cdots dy^h,$$

$$I_3 = D_x^\alpha f(t_{k-1}^{[n]}, x).$$

Рассмотрим (57) при $t_k^{[n]} \leq \tau_+$. Согласно (48) имеем

$$I_1 = \sum_{q'=1}^q \sum_{\sigma \in \Sigma_{\alpha,q'}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \left(\prod_{h=1}^k \Theta_n(y^h) \right) \sum_{j_1, \dots, j_{q'}=1}^d \left(\frac{\partial^{q'}}{\partial \xi_{j_1} \cdots \partial \xi_{j_{q'}}} u_0(\xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k}(x)} \right) \times$$

$$\times \left(D_x^{\sigma^1} (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j_1} \cdots D_x^{\sigma^{q'}} (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j_{q'}} \right) dy^1 \cdots dy^k,$$

где $\sigma = \{\sigma^1, \dots, \sigma^{q'}\}$ и $\Sigma_{\alpha,q'}$ являются обозначениями, записанными в (48). Поэтому, учитывая условие (14), рассуждая аналогично выводу соотношения (49), в котором рассматриваем $u_0(\cdot)$ вместо $v_j(\cdot, \cdot)$ и $a(\cdot)$, и интегрируя соответственное выражение на $(\mathbb{R}^d)^k$, получим

$$|I_1| \leq C P_q^{(1)}, \quad (58)$$

где $C = C(\tau, q)$ — независимая от n постоянная, а $P_q^{(1)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^k$ произведений множителей $|D_x^\sigma (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q$), умноженных на $\prod_{h=1}^k \Theta_n(y^h)$.

Аналогично, учитывая условие (13), получим

$$|I_{2,h}| \leq C' P_q^{(2,h)}, \quad (59)$$

где $C' = C'(\tau, q)$ — независимая от n и h постоянная, а $P_q^{(2,h)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^h$ произведений множителей $|D_x^\sigma (X_{k,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q$), умноженных на $\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'})$.

Так как в силу (13) I_3 ограничено постоянной, которую обозначим $C'' = C''(\tau, q)$, из (57)–(59) следует, что

$$|D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C P_q^{(1)} + \delta_n C' \sum_{h=1}^{k-1} P_q^{(2,h)} + \delta_n C''. \quad (60)$$

Итак, оценивая $P_q^{(1)}$ и $P_q^{(2,h)}$ с помощью (20) и (40), получим

$$|D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C''' \left[\Phi^{(q,1)}(k\delta_n) + \sum_{q'=1}^{q-1} \sum_{m'=2}^{q-q'+1} \Phi^{(q',m')}(k\delta_n) \right] + C'',$$

где $C''' = C'''(\tau, q)$ — независимая от n постоянная. Поскольку это неравенство справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$ и можно выбрать τ как функцию t , то, учитывая также определение (9), можно найти непрерывную и возрастающую функцию $\tilde{\Phi}_q(t)$, не зависящую от n и удовлетворяющую неравенству (55). Лемма доказана. \square

5 Сходимость функций $X_{k,y}^{n,h}(x)$ их производных

Чтобы доказать сходимость приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ и их производных, будем пользоваться соотношением $t_{2k}^{[n+1]} = t_k^{[n]}$ (см. (4)) и свойством свертки функций $\Theta_n(x)$:

$$\Theta_n(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(z-y)\Theta_{n+1}(y)dy. \quad (61)$$

Если обозначаем $\tilde{X}_{k+1,y}^{n,1}(x) = x - \delta_n v(t_{k+1}^{[n]}, x) - a(x)(y^1 + y^2)$, согласно (61) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z)u^{[n]}(t_k^{[n]}, x - \delta_n v(t_{k+1}^{[n]}, x) - a(x)z)dz &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^1)\Theta_{n+1}(y^2)u^{[n]}(t_k^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,1}(x))dy^1 dy^2. \end{aligned}$$

Итак, повторяя это рассуждение и определяя $\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$, $h = 1, 2, \dots, k+1$ ($k = 0, 1, \dots$), соотношениями

$$\tilde{X}_{k+1,y}^{n,0}(x) = x, \quad (62)$$

$$\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x) = \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h-1}(x) - \delta_n v(t_{k-h+2}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h-1}(x)) - a(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h-1}(x))(y^{2h-1} + y^{2h}), \quad (63)$$

можно записать $u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)$ в виде

$$\begin{aligned} u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} \left(\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h) \right) u_0(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x)) dy^1 \dots dy^{2k+2} + \\ &+ \delta_n \sum_{h=1}^k \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)) dy^1 \dots dy^{2h} + \delta_n f(t_k^{[n]}, x). \end{aligned} \quad (64)$$

Чтобы оценить разность $u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)$, будем использовать выражение (64). Но, для этого нам понадобятся оценки разности $X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. Пусть $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18), а $\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (62)–(63). Предположим, что условия (11), (12) и (15) с $q = 1$ выполнены.

Тогда для каждого $(\bar{\tau}, m)$, $\bar{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, существует независимая от n , k и h постоянная $K_2 = K_2(\bar{\tau}, m)$ такая, что, если $t_{k+1}^{[n]} \leq \bar{\tau}$, то имеем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) |X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)|^{2m} dy^1 \dots dy^{2h} \leq \delta_{n+1} e^{K_2 h \delta_{n+1}}. \quad (65)$$

Доказательство. Пусть $t_{k+1}^{[n]} \leq \bar{\tau}$. Для упрощения записи обозначим

$$\begin{aligned} X^{2h} &= X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x), & \tilde{X}^h &= \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x), \\ \bar{t} &= t_{2k-2h+4}^{[n+1]} = t_{k-h+2}^{[n]}, & t' &= t_{2k-2h+3}^{[n+1]}, \end{aligned} \quad (66)$$

для $h = 0, \dots, k+1$. Тогда, в силу (18), (63) и (66), имеем

$$X^{2h} - \tilde{X}^h = \Lambda^{(0)} - \delta_{n+1} \Lambda^{(1)} - y^{2h-1} \Lambda^{(2)} - y^{2h} \Lambda^{(3)}, \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^{(0)} &= X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}, \\ \Lambda^{(1)} &= 2(v(\bar{t}, X^{2h-2}) - v(\bar{t}, \tilde{X}^{h-1})) - (v(\bar{t}, X^{2h-2}) - v(t', X^{2h-1})), \\ \Lambda^{(2)} &= a(X^{2h-2}) - a(\tilde{X}^{h-1}), \\ \Lambda^{(3)} &= \Lambda^{(2)} - (a(X^{2h-2}) - a(X^{2h-1})). \end{aligned}$$

Из (67) вытекает, что

$$\begin{aligned} |X^{2h} - \tilde{X}^h|^{2m} &= |\Lambda^{(0)}|^{2m} - 2m \Lambda^{(2)} y^{2h-1} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} - \\ &\quad - 2m \Lambda^{(3)} y^{2h} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} + \bar{R}_m, \end{aligned} \quad (68)$$

где \bar{R}_m — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta_{n+1}^{p_0} (y^{2h-1})^{p_1} (y^{2h})^{p_2}$ с $p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} \geq 1$.

Напомним, что X^{2h-2} и \tilde{X}^{h-1} не зависят ни от y^{2h-1} , ни от y^{2h} , а X^{2h-1} не зависит от y^{2h} . Поэтому $\Lambda^{(0)}$ и $\Lambda^{(2)}$ не зависят ни от y^{2h-1} , ни от y^{2h} , а $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(3)}$ не зависят от y^{2h} . Таким образом,

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) |\Lambda^{(0)}|^{2m} dy^{2h-1} dy^{2h} = |\Lambda^{(0)}|^{2m}, \quad (69)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \Lambda^{(2)} y^{2h-1} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} dy^{2h-1} = 0, \quad (70)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Lambda^{(3)} y^{2h} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-1} dy^{2h} = 0. \quad (71)$$

Что касается \bar{R}_m , заметим сначала, что, в силу условий (11), (12) и (15) с $q = 1$, существует такая постоянная $C = C(\bar{\tau})$, что

$$\begin{aligned} |v(t, x) - v(s, x')| + |a(x) - a(x')| &\leq C(|x - x'| + |t - s|), \\ \forall t, s \in [0, \bar{\tau}], \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Следовательно, из определений $\Lambda^{(0)}$, $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$ следует, что

$$|\Lambda^{(r)}| \leq C'(|\Lambda^{(0)}| + |y^{2h-1}| + \delta_{n+1}), \quad r = 1, 2, 3, \quad (72)$$

где $C' = C'(\bar{\tau})$ — независимая от n , k и h постоянная. Напомним также соотношение

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) |y^{2h}|^{p'_1} |y^{2h-1}|^{p'_2} dy^{2h-1} dy^{2h} = C_{p'_1, p'_2} \delta_{n+1}^{(p'_1 + p'_2)/2}, \quad (73)$$

где $C_{p'_1, p'_2}$ — постоянная, зависящая от p'_1 и p'_2 . Так как слагаемые, входящие в состав \bar{R}_m , содержат множитель $\delta_{n+1}^{p_0} (y^{2h-1})^{p_1} (y^{2h})^{p_2}$ с $p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} \geq 1$, а также $2m$ множителей $\Lambda^{(r)}$ ($r = 0, 1, 2, 3$), то соотношения (72) и (73) позволяют получить неравенство

$$\left| \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \bar{R}_m dy^{2h-1} dy^{2h} \right| \leq K_2 \delta_{n+1} |\Lambda^{(0)}|^{2m} + K_2 \delta_{n+1}^2, \quad (74)$$

где $K_2 = K_2(\bar{\tau}, m)$ — независимая от n , k и h постоянная.

Теперь, положим

$$B_h^{(m)}(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) |X^{2h} - \tilde{X}^h|^{2m} dy^1 \dots dy^{2h}. \quad (75)$$

Тогда, учитывая соотношение

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \left(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) |\Lambda^{(0)}|^{2m} dy^1 \dots dy^{2h-2} = B_{h-1}^{(m)}(x),$$

из (68)–(71) и (74) можно вывести

$$B_h^{(m)}(x) \leq (1 + \delta_{n+1} K_2) B_{h-1}^{(m)}(x) + (\delta_{n+1})^2 K_2. \quad (76)$$

С другой стороны, в силу (17) и (62) имеем

$$B_0^{(m)}(x) = 0. \quad (77)$$

Из (76) и (77) вытекает, что

$$B_h^{(m)}(x) \leq K_2 (\delta_{n+1})^2 \sum_{j=1}^h (1 + K_2 \delta_{n+1})^{h-j}. \quad (78)$$

Поскольку (78) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, принимая во внимание определение (75) и неравенство

$$\delta_{n+1} \sum_{j=1}^h (1 + K_2 \delta_{n+1})^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)K_2} ds = \frac{1}{K_2} (e^{K_2 h \delta_{n+1}} - 1),$$

получим неравенство (65). Лемма доказана. \square

Теперь рассмотрим производные $X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$ по $x \in \mathbb{R}^d$.

Лемма 5. Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$. Пусть $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18), а $\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (62)–(63). Предположим, что условия (11), (12) и (15) выполнены. Тогда для каждого $(\bar{\tau}, m)$, $\bar{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, существует непрерывная и возрастающая функция $\Psi^{(q-1,m)}(s) = \Psi(\bar{\tau}, q-1, m)(s)$, не зависящая от n , k и h , и такая, что, если $t_{k+1}^{[n]} \leq \bar{\tau}$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_n(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_j - D_x^\alpha (\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))_j)^2 \right)^m \times \\ \times dy^1 \cdots dy^{2h} \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2(q-1)}} \Psi^{(q-1,m)}(h\delta_{n+1}) \quad (79)$$

для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = q - 1$, и любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Лемма будет доказана рекуррентным образом для $q = 2, 3, \dots$. Однако нам удобно начать с того, что вспомним общее выражение $D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\tilde{X}^h)_j$, $|\alpha| = q' \equiv q - 1$, для неопределенного q при $t_{k+1}^{[n]} \leq \bar{\tau}$ (в этом доказательстве используем обозначения (66)).

Применяя дифференциальный оператор D_x^α ($|\alpha| = q'$) к j -й компоненте обеих частей равенства (67), получим

$$D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\tilde{X}^h)_j = \\ = D_x^\alpha (\Lambda^{(0)})_j - \delta_{n+1} D_x^\alpha (\Lambda^{(1)})_j - y_j^{2h-1} D_x^\alpha (\Lambda^{(2)}) - y_j^{2h} D_x^\alpha (\Lambda^{(3)}),$$

где $\Lambda^{(r)}$, $r = 0, \dots, 3$, — функции, определенные вслед за (67). Итак,

$$\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\tilde{X}^h)_j)^2 = \Lambda^{(q',0)} - 2\delta_{n+1} \Lambda^{(q',1)} - \\ - 2 \sum_{j=1}^d y_j^{2h-1} (\Lambda_j^{(q',2)} - \delta_{n+1} \Lambda_j^{(q',4)}) - 2 \sum_{j=1}^d y_j^{2h} (\Lambda_j^{(q',3)} - \delta_{n+1} \Lambda_j^{(q',5)}) + \\ + 2 \sum_{j=1}^d y_j^{2h-1} y_j^{2h} \Lambda^{(q',6)} + \delta_{n+1}^2 \Lambda^{(q',7)} + \sum_{j=1}^d (y_j^{2h-1})^2 \Lambda^{(q',8)} + \sum_{j=1}^d (y_j^{2h})^2 \Lambda^{(q',9)},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^{(q',0)} &= \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (\Lambda^{(0)})_j)^2, & \Lambda^{(q',1)} &= \sum_{j=1}^d D_x^\alpha (\Lambda^{(0)})_j D_x^\alpha (\Lambda^{(1)})_j, \\ \Lambda_j^{(q',2)} &= D_x^\alpha (\Lambda^{(0)})_j D_x^\alpha (\Lambda^{(2)}), & \Lambda_j^{(q',3)} &= D_x^\alpha (\Lambda^{(0)})_j D_x^\alpha (\Lambda^{(3)}), \\ \Lambda_j^{(q',4)} &= D_x^\alpha (\Lambda^{(1)})_j D_x^\alpha (\Lambda^{(2)}), & \Lambda_j^{(q',5)} &= D_x^\alpha (\Lambda^{(1)})_j D_x^\alpha (\Lambda^{(3)}), \\ \Lambda^{(q',6)} &= D_x^\alpha (\Lambda^{(2)}) D_x^\alpha (\Lambda^{(3)}), & \Lambda^{(q',7)} &= \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (\Lambda^{(1)})_j)^2, \\ \Lambda^{(q',8)} &= (D_x^\alpha (\Lambda^{(2)}))^2, & \Lambda^{(q',9)} &= (D_x^\alpha (\Lambda^{(3)}))^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что, для $m = 1, 2, \dots$,

$$\left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\tilde{X}^h(x))_j)^2 \right)^m = (\Lambda^{(q',0)})^m -$$

$$- 2m \sum_{j=1}^d y_j^{2h-1} \Lambda_j^{(q',2)} (\Lambda^{(q',0)})^{m-1} - 2m \sum_{j=1}^d y_j^{2h} \Lambda_j^{(q',3)} (\Lambda^{(q',0)})^{m-1} + \bar{R}_m^{(q')}, \quad (80)$$

где $\bar{R}_m^{(q')}$ — сумма слагаемых, содержащих множитель

$$\delta_{n+1}^{p_0} (y_1^{2h-1})^{p_1} \dots (y_d^{2h-1})^{p_d} (y_1^{2h})^{p_{d+1}} \dots (y_d^{2h})^{p_{2d}}$$

с $p_0 + \sum_{j=1}^{2d} \frac{p_j}{2} \geq 1$. Так как $D_x^\alpha \Lambda^{(0)}$ и $D_x^\alpha \Lambda^{(2)}$ не зависят ни от y^{2h-1} , ни от y^{2h} , а $D_x^\alpha \Lambda^{(3)}$ не зависит от y^{2h} , аналогично (69)–(71) из определения $\Lambda^{(q',0)}$, $\Lambda^{(q',2)}$ и $\Lambda^{(q',3)}$ следуют соотношения

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(\Lambda^{(q',0)})^m dy^{2h-1} dy^{2h} = (\Lambda^{(q',0)})^m, \quad (81)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) y_j^{2h-1} \Lambda_j^{(q',2)} (\Lambda^{(q',0)})^{m-1} dy^{2h-1} = 0, \quad (82)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h}) y_j^{2h} \Lambda_j^{(q',3)} (\Lambda^{(q',0)})^{m-1} dy^{2h} = 0. \quad (83)$$

Заметим, что в силу условий (11), (12) и (15) (с $q = 2, 3, \dots$) существует постоянная $C_{q'} = C_{q'}(\bar{\tau})$, $q' = q - 1$, такая, что для $\varphi, \psi \in C^{q'}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ и $s, t \in [0, \bar{\tau}]$ имеется

$$|D_x^\alpha v_j(t, \varphi(x)) - D_x^\alpha v_j(s, \psi(x))| + |D_x^\alpha a(\varphi(x)) - D_x^\alpha a(\psi(x))| \leq$$

$$\leq C_{q'} \left(\sup_{j' \in \{1, \dots, d\}} |D_x^\alpha (\varphi(x))_{j'} - D_x^\alpha (\psi(x))_{j'}| + Q_{q'-1} \right), \quad |\alpha| = q', \quad (84)$$

где $Q_{q'-1}$ является суммой произведений множителей $|D_x^\sigma (\varphi(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma (\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$), умноженных на $|D_x^\sigma (\varphi(x))_{j'} - D_x^\sigma (\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$) и на абсолютное значение производных по x порядка $\leq q'$ функции $v(t, x)$ или $a(x)$, а также произведений множителей $|D_x^\sigma (\varphi(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma (\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q'$), умноженных на $|\varphi(x) - \psi(x)|$ или $|t - s|$ и на абсолютное значение производных по x порядка $\leq q' + 1$ функции $v(t, x)$ или $a(x)$, или на абсолютное значение производных по t производных по x порядка $\leq q'$ функции $v(t, x)$.

Теперь докажем лемму с $q = 2$, т.е. $q' = 1$. В этом случае, так как нет σ , удовлетворяющего условию $1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$, то $Q_{q'-1}$, появляющееся в (84), содержит только слагаемые

$$|\partial_{x_i} (\varphi(x))_{j'}| (|\varphi(x) - \psi(x)| + |t - s|), \quad i, j' = 1, \dots, d.$$

Таким образом, из определения $\Lambda^{(1,r)}$ и $\Lambda^{(r')}$ ($r' = 0, 1, 2, 3$) следует, что

$$|\Lambda^{(1,r)}| \leq C'_1 \left[\Lambda^{(1,0)} + |X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}|^2 + |y^{2h-1}|^2 + \delta_{n+1} \right] \sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2$$

для $r = 1, \dots, 9$, где $C'_1 = C'_1(\bar{\tau})$ — независимая от n, k и h постоянная.

Следовательно, принимая во внимание определение $\bar{R}_m^{(1)}$, получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \bar{R}_m^{(1)} dy^{2h-1} dy^{2h} \right| \leq \\ & \leq C''_1 \delta_{n+1} \left[(\Lambda^{(1,0)})^m + |X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}|^{2m} + \delta_{n+1} \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2 \right)^m \right], \end{aligned} \quad (85)$$

где $C''_1 = C''_1(\bar{\tau}, m)$ — независимая от n, k и h постоянная.

Положим

$$\begin{aligned} B_h^{(1,m)}(x) &= \\ &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X^{2h})_j - \partial_{x_i}(\tilde{X}^h)_j)^2 \right)^m dy^1 \dots dy^{2h}. \end{aligned} \quad (86)$$

Тогда, аналогично получению (76), ввиду (81)–(83) и (85), из (80) получим

$$B_h^{(1,m)}(x) \leq (1 + \delta_{n+1} C'') B_{h-1}^{(1,m)}(x) + \delta_{n+1} C'' E_{h-1}^{(1,m)}, \quad (87)$$

где

$$\begin{aligned} E_{h-1}^{(1,m)} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \left(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \times \\ & \quad \times |X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}|^{2m} \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X^{h-1})_j)^2 \right)^m dy^1 \dots dy^{2h-2} + \\ & \quad + \delta_{n+1} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \left(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2 \right)^m dy^1 \dots dy^{2h-2}. \end{aligned} \quad (88)$$

С другой стороны, из (17) и (62) непосредственно вытекает, что

$$B_0^{(1,m)}(x) = 0. \quad (89)$$

Таким образом, из (87) и (89) получим

$$B_h^{(1,m)}(x) \leq \delta_{n+1} C'' \sum_{j=1}^h (1 + \delta_{n+1} C'')^{h-j} E_{j-1}^{(1,m)}. \quad (90)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к первому слагаемому правой части (88), из (20) и (65) получаем, что существует непрерывная и возрастающая функция $\tilde{E}(s)$, не зависящая от n и k , и такая, что

$$E_{h-1}^{(1,m)} \leq \sqrt{\delta_{n+1}} \tilde{E}(h\delta_{n+1}), \quad \forall h \in \{1, \dots, k+1\}. \quad (91)$$

Так как (90) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, из (90)–(91) и соотношения

$$\delta_{n+1} \sum_{j=1}^h (1 + C_1'' \delta_{n+1})^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)C_1''} ds = \frac{1}{C_1''} (e^{C_1'' h\delta_{n+1}} - 1)$$

вытекает неравенство (79) для $q = 2$ с $\Psi^{(1,m)}(s) = \tilde{E}(s)e^{C_1'' s}$. Утверждение леммы с $q = 2$ доказано.

Теперь, предполагая, что утверждение лемм для $2 \leq q < \bar{q}$ верно, докажем лемму с $q = \bar{q} > 2$. Обозначим $q' = \bar{q} - 1$.

Из соотношения (84) и определения $\Lambda^{(q',r)}$ нетрудно получить

$$|\Lambda^{(q',r)}| \leq C_{q'}' (\Lambda^{(q',0)} + Q_{q'-1}') \quad r = 1, \dots, 9,$$

где $C_{q'}' = C_{q'}'(\bar{\tau})$ — независимая от n, k и h постоянная, а $Q_{q'-1}'$ — сумма

произведений множителей $\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2$ или $\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (\tilde{X}^{h-1})_{j'})^2$ ($1 \leq$

$|\sigma| \leq q' - 1$), умноженных на $\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma (\tilde{X}^{h-1})_{j'})^2$ ($1 \leq |\sigma| \leq$

$q' - 1$), и также произведений множителей $\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2$ ($1 \leq |\sigma| \leq$

q'), умноженных на $|X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}|^2$ или $|y^{2h-1}|^{2p}$ ($1 \leq p \leq q' + 1$) или δ_{n+1} . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \bar{R}_m^{(\bar{q})} dy^{2h-1} dy^{2h} \right| &\leq \\ &\leq C_{q'}'' \delta_{n+1} ((\Lambda^{(q',0)})^m + Q_{q'-1}''), \end{aligned} \quad (92)$$

где $C_{q'}'' = C_{q'}''(\bar{\tau}, m)$ — независимая от n, k и h постоянная, а $Q_{q'-1}''$ — сумма произведений множителей

$$\left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2 \right)^m \text{ или } \left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (\tilde{X}^{h-1})_{j'})^2 \right)^m \quad (1 \leq |\sigma| \leq q' - 1),$$

умноженных на $\left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma (\tilde{X}^{h-1})_{j'})^2 \right)^m$ ($1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$),

и также произведений множителей $\left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2 \right)^m$ ($1 \leq |\sigma| \leq q'$),

умноженных на $|X^{2h-2} - \tilde{X}^{h-1}|^{2m}$ или δ_{n+1} .

Положим

$$B_h^{(q',m)}(x) =$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\tilde{X}^h)_j)^2 \right)^m dy^1 \cdots dy^{2h}. \quad (93)$$

Тогда из (80)–(83) и (92) вытекает, что

$$B_h^{(q',m)}(x) \leq (1 + \delta_{n+1} C_{q'}'') B_{h-1}^{(q',m)}(x) + \delta_{n+1} C_{q'}'' E_{h-1}^{(q',m)}, \quad (94)$$

где

$$E_{h-1}^{(q',m)} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \left(\prod_{h'=1}^{2h-1} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) Q_{q'-1}'' dy^1 \cdots dy^{2h-2}.$$

Напомним, что в силу (17) и (62) имеем

$$B_0^{(q',m)}(x) = 0.$$

Поэтому, из (94) получится неравенство

$$B_h^{(q',m)}(x) \leq \delta_{n+1} C_{q'}'' \sum_{j=1}^h (1 + \delta_{n+1} C_{q'}'')^{h-j} E_{j-1}^{(q',m)}. \quad (95)$$

Так как, согласно определению $Q_{q'-1}''$, $E_{h-1}^{(q',m)}$ является суммой слагаемых

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \left(\prod_{h'=1}^{2h-1} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2 \right)^m \times \\ & \quad \times \left(\sum_{j'=1}^d (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma (\tilde{X}^{h-1})_{j'})^2 \right)^m dy^1 \cdots dy^{2h-2} \end{aligned}$$

и аналогичных, то, применяя к ним неравенство Коши-Буняковского и используя неравенства (40) и (79) для $q \leq q' - 1$ и также (65), можно убедиться в том, что существует непрерывная и возрастающая функция $\tilde{E}'(s)$, не зависящая от n и k , и такая, что

$$E_{h-1}^{(q',m)} \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q'}} \tilde{E}'(h\delta_{n+1}), \quad \forall h \in \{1, \dots, k+1\}. \quad (96)$$

Поскольку (95) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, принимая во внимание соотношение

$$\delta_{n+1} \sum_{j=1}^h (1 + C_{q'}'' \delta_{n+1})^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)C_{q'}''} ds = \frac{1}{C_{q'}''} (e^{C_{q'}'' h\delta_{n+1}} - 1),$$

из (95) и (96) выводим неравенство (79) с $\Psi^{(q',m)}(s) = \tilde{E}'(s)e^{C_{q'}'' s}$, что завершает доказательство леммы. \square

6 Сходимость приближенных решений и их производных

Теперь докажем сходимость приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$.

Предложение 1. Пусть $\tau > 0$. Предположим, что предположения теоремы 1 с $q = 1$ выполнены. Тогда функции $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определенные соотношениями (7)–(9), сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу (19) и (64), для $0 \leq t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$\begin{aligned} u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) &= \\ &= J_1 + \delta_{n+1} \sum_{h=1}^k (J_{2,h} + J_{3,h}) + \delta_{n+1} (J_4 + J_5), \end{aligned} \quad (97)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} \left(\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h) \right) \times \\ &\quad \times (u_0(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x)) - u_0(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x))) dy^1 \dots dy^{2k+2}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} J_{2,h} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \left(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \times \\ &\quad \times (f(t_{2k-2h+1}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x)) - f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))) dy^1 \dots dy^{2h}, \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} J_{3,h} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h+1}} \left(\prod_{h'=1}^{2h+1} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \right) \times \\ &\quad \times (f(t_{2k-2h}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h+1}(x)) - f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))) dy^1 \dots dy^{2h+1}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$J_4 = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^1) (f(t_{2k}^{[n+1]}, x - \delta_{n+1} v(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - a(x)y^1) - f(t_k^{[n]}, x)) dy^1, \quad (101)$$

$$J_5 = f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x) - f(t_k^{[n]}, x). \quad (102)$$

Что касается J_1 , принимая во внимание условие (14), имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla u_0(x)| \times \\ &\quad \times \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} \left(\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h) \right) |X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x)| dy^1 \dots dy^{2k+2}. \end{aligned}$$

Итак, с помощью (65), получим

$$|J_1| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla u_0(x)| \sqrt{\delta_{n+1}} e^{K'_2(k+1)\delta_{n+1}}, \quad (103)$$

где $K'_2 = \frac{K_2(\tau, 1)}{2}$ с постоянной $K_2 = K_2(\tau, 1)$, введенной в (65).

Аналогично, принимая во внимание условия теоремы с $q = 1$, получим

$$|J_{2,h}| + |J_{3,h}| \leq C \left(\sqrt{\delta_{n+1}} e^{K'_2 h \delta_{n+1}} + \sqrt{\delta_{n+1}} \right), \quad (104)$$

где $C = C(\tau)$ — независимая от n , k и h постоянная. Кроме того, нетрудно видеть, что существует независимая от n и k постоянная $C' = C'(\tau)$ такая, что

$$|J_4| + |J_5| \leq C' \sqrt{\delta_{n+1}}. \quad (105)$$

Из (97) и (103)–(105) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная $C'' = C''(\tau)$ такая, что

$$|u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \sqrt{\delta_{n+1}} C'' (e^{K'_2 (k+1) \delta_{n+1}} + 1) \quad (106)$$

при условии, что $0 \leq t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$. Так как неравенство (106) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, то, учитывая также определение (9), получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t, x) - u^{[n]}(t, x)| \leq \sqrt{\delta_{n+1}} C'' (e^{K'_2 \tau_+} + 1) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau. \quad (107)$$

Из (107) и соотношения $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} < \infty$ следует, что функции $u^{[n]}(t, x)$ сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$. Предложение доказано. \square

Теперь проверим сходимостъ производных приближенных решений.

Предложение 2. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, и $\tau > 0$. Предположим, что предположения теоремы 1 выполнены. Тогда производные $(q-1)$ -го порядка по x функций $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определенных соотношениями (7)–(9), сходятся при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ к соответствующим производным предельной функции $u(t, x)$ последовательности $\{u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$, $|\alpha| = q - 1$. Тогда, применяя дифференциальный оператор D_x^α к обеим частям равенства (97), имеем

$$\begin{aligned} & D_x^\alpha u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) = \\ & = D_x^\alpha J_1 + \delta_{n+1} \sum_{h=1}^k (D_x^\alpha J_{2,h} + D_x^\alpha J_{3,h}) + \delta_{n+1} (D_x^\alpha J_4 + D_x^\alpha J_5), \quad 0 \leq t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+, \end{aligned} \quad (108)$$

где $J_1, J_{2,h}, J_{3,h}, J_4, J_5$ — функции, определенные соотношениями (98)–(102).

Из (98) вытекает, что

$$D_x^\alpha J_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} \left(\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h) \right) \times$$

$$\times (D_x^\alpha u_0(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x)) - D_x^\alpha u_0(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x))) dy^1 \dots dy^{2k+2}.$$

Итак, оценивая $|D_x^\alpha u_0(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x)) - D_x^\alpha u_0(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x))|$ аналогично (84) (в котором рассматривается $u_0(\cdot)$ с условием (14) вместо $v_j(\cdot, \cdot)$ или $a(\cdot)$) и интегрируя его на $(\mathbb{R}^d)^{2k+2}$ с весом $\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h)$, получим

$$|D_x^\alpha J_1| \leq C \tilde{Q}_{q-1}^{(1)},$$

где $C = C(\tau, q)$ — независимая от n и k постоянная, а $\tilde{Q}_{q-1}^{(1)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^{2k+2}$ с весом $\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h)$ произведений множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q-1$), умноженных на $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x))_{j'} - D_x^\sigma(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q-1$) или $|X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,k+1}(x)|$. Отсюда, с помощью неравенств (40), (65) и (79), вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{\Psi}^{(1)}(s)$ от $s \geq 0$, не зависящая от n и k , и такая, что

$$|D_x^\alpha J_1| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q-1}} \tilde{\Psi}^{(1)}(s_1), \quad s_1 = (2k+2)\delta_{n+1}. \quad (109)$$

Аналогично, рассматривая выражение $D_x^\alpha J_{2,h} + D_x^\alpha J_{3,h}$, которое получается из (99)–(100) и оценивая

$$|D_x^\alpha f(t_{2k-2h+1}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h})(x) - D_x^\alpha f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))|$$

и

$$|D_x^\alpha f(t_{2k-2h}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h+1}(x)) - D_x^\alpha f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))|$$

аналогично (84), в котором рассматривается $f(\cdot, \cdot)$ с условиями (13) и (16) вместо $v_j(\cdot, \cdot)$ или $a(\cdot)$, получается

$$|D_x^\alpha J_{2,h}| + |D_x^\alpha J_{3,h}| \leq C' \tilde{Q}_{q-1}^{(2,h)}$$

где $C' = C'(\tau, q)$ — независимая от n , k и h постоянная, а $\tilde{Q}_{q-1}^{(2,h)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^{2h}$ с весом $\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'})$ произведений множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h+1}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q-1$), умноженных на один или несколько из множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_{j'} - D_x^\sigma(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \dots, d, 1 \leq |\sigma| \leq q-1$), $|X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)|$, δ_{n+1} , $|y^{2h+1}|$. Из этого соотношения, еще раз с помощью неравенств (40), (65) и (79), вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{\Psi}^{(2)}(s)$ от $s \geq 0$, не зависящая от n , k и h , и такая, что

$$|D_x^\alpha J_{2,h}| + |D_x^\alpha J_{3,h}| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \tilde{\Psi}^{(2)}(s_2), \quad s_2 = 2h\delta_{n+1}. \quad (110)$$

Кроме того, вспоминая определения (101)–(102) и условия (13) и (16), нетрудно видеть, что существует независимая от n и k постоянная $C'' =$

$C''(\tau, q)$ такая, что

$$|D_x^\alpha J_4| + |D_x^\alpha J_5| \leq C'' \sqrt{\delta_{n+1}}. \quad (111)$$

Из (108)–(111) вытекает, что, при условии $0 \leq t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$, имеем

$$\begin{aligned} & |D_x^\alpha u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \\ & \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q-1}} \tilde{\Psi}^{(1)}((2k+2)\delta_{n+1}) + \delta_{n+1} \sum_{h=1}^k (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \tilde{\Psi}^{(2)}(2h\delta_{n+1}) + C''(\delta_{n+1})^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

значит,

$$|D_x^\alpha u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \tilde{\Psi}((2k+2)\delta_{n+1}), \quad (112)$$

где $\tilde{\Psi}(s) = \tilde{\Psi}^{(1)}(s) + s\tilde{\Psi}^{(2)}(s) + C''$.

Так как (112) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, вспоминая также определение (9), получим

$$\sup_{(t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[n+1]}(t, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \tilde{\Psi}(\tau_+). \quad (113)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} = \frac{1}{2^{1/2q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2q}} < \infty,$$

из (113) вытекает, что $D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)$ сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что их предельной функцией является $D_x^\alpha u(t, x)$, где $u^{[n]}(t, x)$ — предельная функция последовательности $\{D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$, что завершает доказательство предложения. \square

7 Переход к пределу

Чтобы доказать, что предельная функция $u(t, x)$ последовательности $\{D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет уравнению (2), напомним сначала связь между приближенными решениями $u^{[n]}(t, x)$ и уравнением (2).

Лемма 6. Пусть $\tau > 0$, а $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$, $n = 1, 2, \dots$, — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены с $q \geq 3$. Тогда при $t_1^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} &= -v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \kappa(x) \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + f(t_{k-1}^{[n]}, x) + R, \end{aligned} \quad (114)$$

$$|R| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \quad (115)$$

где C_0 — независимая от n постоянная.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
& u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - a(x)y) = \\
& = u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - a(x)y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [\delta_n^2 v_i(t_k^{[n]}, x) v_j(t_k^{[n]}, x) + 2\delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) a(x) y_j + (a(x))^2 y_i y_j] \times \\
& \quad \times \frac{\partial^2 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^d \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h}, \quad (116)
\end{aligned}$$

где $\mu_i = -\delta_n v_i - a(x)y_i$ (и аналогично для μ_j и μ_h), а \tilde{x} — точка между x и $x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - a(x)y$.

Заметим, что в силу (25) и (27) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \\
& \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\delta_n^2 v_i(t_k^{[n]}, x) v_j(t_k^{[n]}, x) - 2\delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) a(x) y_j + (a(x))^2 y_i y_j) \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{\partial^2 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] dy = \\
& = \delta_n (a(x))^2 \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d v_i(t_k^{[n]}, x) v_j(t_k^{[n]}, x) \frac{\partial^2 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, так как $|\mu_i \mu_j \mu_h| \leq (\delta_n |v| + |a||y|)^3$, учитывая условия (11)–(12), из соотношения (26) и леммы 3 выводим, что существует независимая от n постоянная C_0 такая, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^d \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy \right| \leq \delta_n^{3/2} C_0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) = \\
& = -\delta_n v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n (a(x))^2 \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x) + R'
\end{aligned}$$

с $|R'| \leq \delta_n^{3/2} C_0$. Следовательно, разделив обе части этого равенства на δ_n и подставив $\kappa(x) = (a(x))^2$, получим (114)–(115). Лемма доказана. \square

Следствие 1. Пусть $q \geq 3$ и предположения теоремы 1 выполнены. Тогда для каждого $\tau \geq 0$ существует независимая от n постоянная $L = L(\tau)$ такая, что для приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ и предельной функции $u(t, x)$ справедливы неравенства

$$|u^{[n]}(t_1, x) - u^{[n]}(t_2, x)| \leq L|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, \tau_+], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (117)$$

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq L|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, \tau_+], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (118)$$

Доказательство. В силу леммы 3 и соотношения $\delta_n \leq \delta_1$ правая часть (114) ограничена постоянной L , которая не зависит от n . Итак, принимая во внимание (9), получим неравенство (117).

Неравенство (118) следует из (117) и равномерной сходимости $u^{[n]}(t, x)$ к $u(t, x)$. \square

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости производной (справа) по t приближенных решений. Для этого мы начнем с рассмотрением равномерной непрерывности $u^{[n]}(t, x)$, $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$.

Лемма 7. Пусть $q \geq 3$ и $\tau > 0$. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены. Тогда функции $u^{[n]}(t, x)$, $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i, j = 1, \dots, d$, равномерно непрерывны на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Лемма 3 и предложения 1 и 2 гарантируют равномерную непрерывность $u^{[n]}(t, x)$, $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ по $x \in \mathbb{R}^d$. Поэтому нам остается показать их равномерную непрерывность по $t \in [0, \tau]$.

Равномерная непрерывность $u^{[n]}(t, x)$ по $t \in [0, \tau]$ вытекает из следствия 1.

Что касается равномерной непрерывности $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i, j = 1, \dots, d$, по $t \in [0, \tau]$, то сначала докажем следующие леммы (леммы 8 и 9).

Лемма 8. Существует независимая от n постоянная $L' = L'(\tau)$ такая, что при $0 \leq t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$|\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x)| \leq L' \left(|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}| + \sqrt{|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}|} \right). \quad (119)$$

Доказательство. Пусть $0 \leq t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \leq \tau_+$. Тогда, используя выражение

$$X_{k,y}^{n,h}(x) = x - \delta_n \sum_{h'=1}^h v(t_{k-h'+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h'-1}(x)) - \sum_{h'=1}^h a(X_{k,y}^{n,h'-1}(x)) y^{h'} \quad (120)$$

для $h = 1, \dots, k-k'$, вытекающее из (17)–(18), аналогичным (19) образом из (8) получается

$$\begin{aligned} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, X_{k,y}^{n,k-k'}(x)) dy^1 \dots dy^{k-k'} + \\ &+ \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \dots dy^h + \\ &+ \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x) = \\
& = \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) [u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, X_{k,y}^{n,k-k'}(x)) - u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x)] dy^1 \dots dy^{k-k'} + \\
& + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \dots dy^h + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x).
\end{aligned} \tag{121}$$

Дифференцируя обе части равенства (121) по x_i ($i \in \{1, \dots, d\}$) и учитывая (120), получим

$$\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x) = U_1 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'} U_{2,h} + U_3 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} U_{4,h} + \delta_n U_5, \tag{122}$$

где

$$\begin{aligned}
U_1 &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \left[\partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} - \partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=x} \right] \times \\
& \quad \times dy^1 \dots dy^{k-k'}, \\
U_{2,h} &= \sum_{j,j'=1}^d \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \partial_{\xi_j} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} \times \\
& \quad \times \partial_{\xi_{j'}} v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i} (X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'} dy^1 \dots dy^{k-k'}, \\
U_3 &= \sum_{j,j'=1}^d U_{3,jj'}, \\
U_{3,jj'} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \partial_{\xi_j} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} \times \\
& \quad \times \sum_{h=1}^{k-k'} y_j^h \partial_{\xi_{j'}} a(\xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i} (X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'} dy^1 \dots dy^{k-k'}, \\
U_{4,h} &= \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \left(\prod_{h'=1}^h \Theta_n(y^{h'}) \right) \sum_{j=1}^d \partial_{\xi_j} f(t_{k-h-1}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h}(x)} \partial_{x_i} (X_{k,y}^{n,h}(x))_j \times \\
& \quad \times dy^1 \dots dy^h, \\
U_5 &= \partial_{x_i} f(t_{k-1}^{[n]}, x).
\end{aligned}$$

Оценим сначала $|U_1|$. Из леммы 3 с $q = 2$ следует, что существует независимая от n , k и k' постоянная $C = C(\tau)$ такая, что

$$\left| \partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} - \partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=x} \right| \leq C |X_{k,y}^{n,k-k'}(x) - x|.$$

Следовательно, учитывая (120), получим

$$\begin{aligned} & \left| \partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} - \partial_{\xi_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=x} \right| \leq \\ & \leq C \left(\sup_{(t,\xi) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} |v_i(t, \xi)| \delta_n(k-k') + \left| \sum_{h=1}^{k-k'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) y^h \right| \right). \end{aligned} \quad (123)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \left| \sum_{h=1}^{k-k'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) y^h \right| dy^1 \dots dy^{k-k'} \leq \\ & \leq \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \left(\sum_{h=1}^{k-k'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) y_j^h \right)^2 dy^1 \dots dy^{k-k'} \right)^{1/2} = \\ & = \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) (\Sigma_1 + \Sigma_2) dy^1 \dots dy^{k-k'} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{h=1}^{k-k'} (y_j^h)^2 (a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))^2, \\ \Sigma_2 &= 2 \sum_{h=2}^{k-k'} \sum_{h'=1}^{h-1} y_j^h y_j^{h'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) a(X_{k,y}^{n,h'-1}(x)). \end{aligned}$$

Так как $a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))$ не зависит от y^h , имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \Sigma_1 dy^1 \dots dy^{k-k'} \leq 2(k-k') \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |a(\xi)| \delta_n.$$

Кроме того, так как $y_j^{h'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) a(X_{k,y}^{n,h'-1}(x))$ не зависит от y^h , имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \Sigma_2 dy^1 \dots dy^{k-k'} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \left| \sum_{h=1}^{k-k'} a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) y^h \right| dy^1 \dots dy^{k-k'} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |a(\xi)| \sqrt{\delta_n(k-k')}. \end{aligned} \quad (124)$$

Из определения U_1 и неравенств (123) и (124) вытекает, что существует независимая от n , k и k' постоянная $L_1 = L_1(\tau)$ такая, что

$$|U_1| \leq L_1 (|k\delta_n - k'\delta_n| + \sqrt{|k\delta_n - k'\delta_n|}). \quad (125)$$

Что касается $U_{2,h}$, из леммы 3 с $q = 1$, леммы 1 и условия на $v(t, x)$ следует непосредственно, что существует независимая от n, k и k' постоянная $L_2 = L_2(\tau)$ такая, что

$$|U_{2,h}| \leq L_2. \quad (126)$$

Чтобы оценить $|U_3|$, замечаем, что

$$\begin{aligned} |U_{3,jj'}| \leq & \left(\sup_{(t,\xi) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} |\partial_{\xi_j} u^{[n]}(t, \xi)| \right) \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \left(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h) \right) \times \\ & \times \left| \sum_{h=1}^{k-k'} y_j^h \partial_{\xi_{j'}} a(\xi) \Big|_{\xi = X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i} (X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'} \right| dy^1 \dots dy^{k-k'}. \end{aligned}$$

Так как в силу леммы 3 с $q = 1$ $\sup_{(t,\xi) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} |\partial_{\xi_j} u^{[n]}(t, \xi)|$ ограничен независимой от n постоянной, а $\partial_{\xi_{j'}} a(\xi) \Big|_{\xi = X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i} (X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}$ не зависит от y^h , то, учитывая условие (12) и лемму 2, аналогичным выводом (124) образом получим существование независимой от n, k и k' постоянной $L_3 = L_3(\tau)$ такой, что

$$|U_3| \leq L_3 \sqrt{|k\delta_n - k'\delta_n|}. \quad (127)$$

Наконец, в силу леммы 1 и условий на $a(\cdot)$ и $f(\cdot, \cdot)$, из выражений $U_{4,h}$ и U_5 следует, что существуют независимые от n, k и k' постоянные $L_4 = L_4(\tau)$ и $L_5 = L_5(\tau)$ такие, что

$$|U_{4,h}| \leq L_4, \quad |U_5| \leq L_5. \quad (128)$$

Объединяя соотношения (122) и (125)–(128), получаем

$$\begin{aligned} & |\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_i} u^{[n]} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x)| \leq \\ & \leq (L_1 + L_2 + L_4) |k\delta_n - k'\delta_n| + (L_1 + L_3) \sqrt{|k\delta_n - k'\delta_n|} + L_5 \delta_n. \end{aligned} \quad (129)$$

Так как $\delta_n \leq (k - k')\delta_n$, из (129) следует неравенство (119). Лемма доказана. \square

Лемма 9. *Существует независимая от n постоянная $L'' = L''(\tau)$ такая, что при $0 \leq t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем*

$$|\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x)| \leq L'' \left(|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}| + \sqrt{|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}|} \right). \quad (130)$$

Доказательство. Пусть $0 \leq t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \leq \tau_+$. Дифференцируя обе части (122) по x_j ($j \in \{1, \dots, d\}$), получим

$$\begin{aligned} & \partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, x) = \\ & = \partial_{x_j} U_1 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'} \partial_{x_j} U_{2,h} + \partial_{x_j} U_3 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} \partial_{x_j} U_{4,h} + \delta_n \partial_{x_j} U_5. \end{aligned} \quad (131)$$

Нетрудно видеть, что в силу леммы 2 (для $q = 1, 2$) и леммы 3 (для $q = 1, 2, 3$) правая часть (131) оценится аналогично оценке правой части (122). Таким образом, получим неравенство (130) с независимой от n, k и k' постоянной $L'' = L''(\tau)$. Лемма доказана. \square

Вернемся к доказательству леммы 7. Из леммы 8 и определения (9) следует равномерная непрерывность функций $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i \in \{1, \dots, d\}$, по $t \in [0, \tau]$, а из леммы 9 и определения (9) следует равномерная непрерывность функций $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$, по $t \in [0, \tau]$, что завершает доказательство леммы 7. \square

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 с $q = 3$. Пусть $\tau > 0$. Тогда функции $u(t, x)$, $\partial_{x_i} u(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u(t, x)$ равномерно непрерывны на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Так как $u(t, x)$, $\partial_{x_i} u(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u(t, x)$ являются пределом равномерной сходимости при $n \rightarrow \infty$ функций $u^{[n]}(t, x)$, $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ и $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ соответственно, то из леммы 7 следует утверждение следствия. \square

Лемма 10. Пусть выполнены условия теоремы 1 с $q = 3$. Пусть $\tau > 0$. Тогда производная справа $(\partial_t u^{[n]})_+(t, x)$ функции $u^{[n]}(t, x)$ по t сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ к $-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa(x) \Delta u(t, x) + f(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \varphi^{[n]}(t, x) &= -v(t, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t, x) + \kappa(x) \Delta u^{[n]}(t, x) + f(t, x), \\ \varphi^{[\infty]}(t, x) &= -v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa(x) \Delta u(t, x) + f(t, x). \end{aligned}$$

Покажем, что существует такая числовая последовательность $\{\tilde{\varepsilon}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, что $\tilde{\varepsilon}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t, x) - \varphi^{[\infty]}(t, x)| \leq \tilde{\varepsilon}(n) \quad \forall (t, x) \in [0, \tau] \times \mathbb{R}^d. \quad (132)$$

Пусть $0 \leq t \leq \tau$. Тогда для любого n найдется такой $t_k^{[n]}$, что $t_k^{[n]} \leq t < t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$, а согласно определению (9) имеем

$$(\partial_t u^{[n]})_+(t, x) = (\partial_t u^{[n]})_+(t_k^{[n]}, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно лемме 6 имеем

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t_k^{[n]}, x) - \varphi^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C \sqrt{\delta_n},$$

где C — независимая от n постоянная.

С другой стороны, так как $\varphi^{[n]}(t, x)$ равномерно непрерывна (см. следствие 2) и $|t - t_k^{[n]}| \leq \delta_n$, то можно найти такой $\tilde{\varepsilon}_1(n)$, что $\tilde{\varepsilon}_1(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$|\varphi^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \varphi^{[n]}(t, x)| \leq \tilde{\varepsilon}_1(n).$$

Кроме того, из предложения 2 следует, что можно найти такие числа $\tilde{\varepsilon}_2(n)$, $n = 1, 2, \dots$, что $\tilde{\varepsilon}_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$|\varphi^{[n]}(t, x) - \varphi^{[\infty]}(t, x)| \leq \tilde{\varepsilon}_2(n).$$

Объединяя эти соотношения, получим

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t, x) - \varphi^{[\infty]}(t, x)| \leq C\sqrt{\delta_n} + \tilde{\varepsilon}_1(n) + \tilde{\varepsilon}_2(n).$$

Так как это неравенство справедливо для любого $(t, x) \in [0, \tau] \times \mathbb{R}^d$, получим (132) с $\tilde{\varepsilon}(n) = C\sqrt{\delta_n} + \tilde{\varepsilon}_1(n) + \tilde{\varepsilon}_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что завершает доказательство леммы. \square

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Обозначим через $\omega^*(t, x)$ предельную функцию последовательности $\{(\partial_t u^{[n]})_+(t, x)\}_{n=1}^\infty$. Тогда при $0 \leq t_1 < t_2 \leq \tau$ имеется

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \omega^*(t, x) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (\partial_t u^{[n]})_+(t, x) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [u^{[n]}(t_2, x) - u^{[n]}(t_1, x)] = u(t_2, x) - u(t_1, x). \end{aligned} \quad (133)$$

В силу следствия 2 и леммы 10 функция $\omega^*(t, x)$ равномерно непрерывна на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$. Таким образом, из (133) вытекает, что определяется производная $\partial_t u(t, x)$ на всем $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ и

$$\partial_t u(t, x) = \omega^*(t, x) = -v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa(x) \Delta u(t, x) + f(t, x),$$

что вместе с предложениями 1 и 2 завершает доказательство теоремы 1. \square

Заключение

В настоящей работе построены приближенные решения для уравнения переноса-диффузии в \mathbb{R}^d с непостоянным коэффициентом диффузии и доказана их сходимост к решению уравнения. Такая задача возникает, например, при моделировании загрязнения воздуха тогда, когда ищем распределение плотности вещества в воздухе с заданным полем скорости и с непостоянным коэффициентом диффузии (например, в зависимости от неоднородного распределения температуры). В более общем случае, когда коэффициент диффузии зависит от искомой функции, необходимым шагом для решения является разрешение линеализованного уравнения, которое рассмотрено в настоящей работе. С другой стороны, если область имеет границу, то изучение настоящей работы с помощью преобразования части области в полупространство и с использованием схемы работ [5, 6] для задачи в полупространстве может внести важный вклад в построение решения начально-краевой задачи. Кроме того, оценки приближенных решений и их предельной функции, полученные в настоящей

работе, не зависят от величины коэффициента диффузии, что дает возможность исследовать поведение решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю.

References

- [1] L. Ait Mahiout, H. Fujita Yashima, *Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport*, Annales Math. Afr., **10** (2023), 105–124.
- [2] M. Aouaouda, A. Ayadi, H. Fujita Yashima, *Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane*. Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **26**:2 (2022), 222–258.
- [3] M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 260), 3-rd Ed. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [4] H. Fujita Yashima, L. Ait-Mahiout, *Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system*, Vestn. Buryat. Gos. Univ. Mat. Inf., **2023**:1 (2023), 22–36.
- [5] R. Gherdaoui, L. Taleb, S. Selvaduray, *Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space*, J. Math. Anal. Appl., **527**:2 (2023), 127507.
- [6] R. Gherdaoui, S. Selvaduray, H. Fujita Yashima, *Convergence of approximate solutions for transport-diffusion equation in the half-space with Neumann condition*, Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **48** (2024), 64–79.
- [7] I. Guikhman, A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe). Mir (Moscou), 1980.
- [8] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Holder spaces*. AMS, 1996.
- [9] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). AMS, 1968.
- [10] G. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publ., 1996.
- [11] H. Smaali, H. Fujita Yashima, *Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion*. Annales Math. Afr., **9** (2021), 89–108.
- [12] L. Taleb, S. Selvaduray, H. Fujita Yashima, *Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion*. Annales Math. Afr., **8** (2020), 53–73.

AMINA NEMDILI
 LAB. MAD, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CONSTANTINE,
 ALI MENDJELI,
 25000, CONSTANTINE, ALGERIA
Email address: nemdili.amina@gmail.com, nemdili.amina@ensc.dz

HISAO FUJITA YASHIMA
 LAB. MAD, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CONSTANTINE,
 ALI MENDJELI,
 25000, CONSTANTINE, ALGERIA
Email address: hisaofujitayashima@yahoo.com, hisao.fujitayashima@nhsm.edu.dz