

# Новая компонента схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ полустабильных пучков ранга два на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$

М. А. Заводчиков, А. С. Тихомиров

## Abstract

In this paper we study the Gieseker-Maruyama moduli scheme  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$  of semistable coherent sheaves of rank two with Chern classes  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 0$  on the projective space  $\mathbb{P}^3$ . To date, only two irreducible components of this scheme have been known, and their general points are locally free sheaves. In this paper we find and describe a new irreducible component of the space  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ , a general point of which is a sheaf with singularity at a disjoint union of a pair of lines and a pair of points. We prove that this component has the expected dimension 27 and is generically reduced as a scheme.

**Keywords:** (semi)stable coherent sheaves, rank two sheaves, moduli space of semistable sheaves.

## 1 Введение

Рассмотрим пространство (схему) модулей Гизекера-Маруямы  $M = M_{\mathbb{P}^3}(2; c_1, c_2, c_3)$  полустабильных когерентных пучков без кручения ранга два с классами Черна  $c_1 \in \{-1, 0\}$ ,  $c_2 \geq 1$ ,  $c_3 \geq 0$ , на трехмерном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  над основным полем  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$  характеристики 0. Геометрия и география этого пространства наиболее хорошо изучена для малых значений второго класса Черна  $c_2$ . В частности, в случае  $c_1 = 0$  найдены все компоненты схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, c_2, 0)$  для  $0 \leq c_2 \leq 2$  и целый ряд компонент этой схемы для  $3 \leq c_2 \leq 5$  – см. [6], [10]. В случае  $c_1 = -1$  к настоящему времени получены следующие результаты. Для  $c_2 = 2$  Ч. Алмейда, М. Жардим и А. С. Тихомиров в недавней работе [1] и М. А. Заводчиков в работе [14] описали все компоненты схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, c_3)$  для допустимых значений 0, 2 и 4 класса  $c_3$ . В случае  $(c_2, c_3) = (3, 9)$  и  $(c_2, c_3) = (4, 16)$  Р. Хартсхорн в [7], а затем М.-Ч. Чанг для  $(c_2, c_3) \in \{(3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), \}$  в [4] нашли по одной компоненте схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, c_2, c_3)$  и показали, что общая точка каждой из этих компонент является рефлексивным пучком. Кроме того, недавно Б.Шмидт в статье [13] показал, что схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 3, 9)$  и  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 16)$  исчерпываются вышеуказанными компонентами, найденными Хартсхорном. Далее, для  $c_2 = 4$  и  $c_3 = 0$  К. Баника и Н. Манолахе [3] доказали, что в схеме  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$  имеется только две неприводимые компоненты размерности 27 и 28 соответственно, общие точки которых являются локально свободными пучками. Кроме того, в вышеупомянутой работе Алмейды, Жардима и Тихомирова [1] показано, что схема  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$  имеет по крайней мере одну неприводимую рациональную компоненту, общая точка которой является пучком с 0-мерными особенностями.

Настоящая статья является естественным продолжением работы [1] в направлении изучения пространств модулей стабильных пучков ранга два с классом  $c_1 = -1$ , малым

классом  $c_2$ , нулевым классом  $c_3$  и особенностями смешанной размерности. В ней получена новая компонента схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ , общая точка  $[\mathcal{E}]$  которой является пучком с особенностями смешанной размерности следующего вида: 1-мерные особенности пучка  $\mathcal{E}$  – это пара скрещивающихся прямых, а 0-мерные особенности пучка  $\mathcal{E}$  рефлексивны, то есть совпадают с особенностями его рефлексивной оболочки  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ . Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Основная теорема.**

*Схема модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$  полустабильных когерентных пучков ранга два без кручения с классами Черна  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 0$  на трехмерном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  имеет неприводимую приведенную в общей точке компоненту  $\overline{\mathcal{M}}$  ожидаемой размерности 27. Общий пучок  $\mathcal{E}$  из этой компоненты стабилен и включается в точную тройку*

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – скрещивающиеся прямые в  $\mathbb{P}^3$ ,  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  – рефлексивный пучок из  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 2)$ , дважды двойственный к пучку  $\mathcal{E}$ . При этом

$$\text{Sing}(\mathcal{E}) = \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \sqcup l_1 \sqcup l_2, \quad (2)$$

где  $\text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee})$  – пара точек,  $\dim \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$ , а  $\dim(l_1 \sqcup l_2) = 1$ , то есть  $\mathcal{E}$  имеет особенности смешанной размерности.

Эта теорема является непосредственным следствием теорем 1 и 2, доказываемых ниже в параграфах 2 и 3 соответственно.

## 2 Семейство $\mathcal{M}$ стабильных пучков из $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ с особенностями смешанной размерности

Рассмотрим схему  $R$  модулей стабильных рефлексивных пучков  $\mathcal{F}$  ранга два с классами Черна  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 2$  на пространстве  $\mathbb{P}^3$ , удовлетворяющих точным тройкам вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow 0, \quad (3)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – произвольная пара непересекающихся прямых. Заметим, что из этой тройки непосредственно следует, что  $h^0(\mathcal{F}(1)) = 1$  и

$$H^0(\mathcal{F}(1)) = \mathbf{k}s_{\mathcal{F}}, \quad \text{где} \quad (s_{\mathcal{F}})_0 = m_1 \sqcup m_2. \quad (4)$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset (s_{\mathcal{F}})_0. \quad (5)$$

Как известно, [4, Lem. 2.4, Thm. 2.5], [7],  $R$  – открытое подмножество схемы модулей Гизекера-Маруямы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 2)$ , имеющее размерность 11:

$$\dim R = 11, \quad (6)$$

и для любого пучка  $[\mathcal{F}] \in R$

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \text{ – пара точек (возможно, совпавших)}. \quad (7)$$

При этом  $R$  является тонким пространством модулей, то есть существует универсальное семейство  $\mathbb{F}$  рефлексивных пучков на  $\mathbb{P}^3$  с базой  $R$ , рассматриваемое как пучок на  $\mathbb{P}^3 \times R$ , плоский над  $R$ . По определению для произвольной точки  $w \in R$  пучок  $\mathcal{F}_w := \mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times \{w\}}$  является стабильным рефлексивным пучком ранга два с особенностями  $\text{Sing}(\mathcal{F}_w)$  в паре точек (возможно, совпавших), то есть с 0-мерным множеством особенностей.

Пусть  $G = G(1, 3)$  – грассманиан прямых пространства  $\mathbb{P}^3$ . Заметим, что в соответствии с теоремой Грауэрта-Мюлиха [9, Part I, Sec. 3] множество

$$G_w = \{l \in G \mid \mathcal{F}_w|_l \cong \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1)\}, \quad w \in R, \quad (8)$$

является открытым плотным подмножеством грассманиана  $G$  – см. [9], [4]. Нетрудно видеть, что  $\text{Sing}(\mathcal{F}_w) \cap l = \emptyset$  для  $w \in R$  и  $l \in G_w$ . Рассмотрим множество  $\Pi = \{(l_1, l_2) \in \text{Sym}^2 G \mid l_1 \cap l_2 = \emptyset\}$  и плотное открытое подмножество  $\Sigma$  в  $R \times \Pi$  вида:

$$\Sigma = \{(w, (l_1, l_2)) \in R \times \Pi \mid l_1, l_2 \in G_w\}. \quad (9)$$

Из (6)-(9) следует, что

$$\dim \Sigma = \dim R + \dim G = 19. \quad (10)$$

Нас будет интересовать множество  $M$  данных вида  $x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle)$ :

$$M = \{x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle) \mid (w, (l_1, l_2)) \in \Sigma, \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon \bmod \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)), \quad (11)$$

где  $\varepsilon : \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)$  – эпиморфизм и  $(s_{\mathcal{F}_w})_0 \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$ .

(Напомним, что в этом определении сечение  $s_{\mathcal{F}_w}$  есть базисный вектор 1-мерного пространства  $H^0(\mathcal{F}_w)$  в соответствии с обозначением (4).)

### Теорема 1.

(i)  $M$  является схемой размерности

$$\dim M = 27, \quad (12)$$

и определен морфизм

$$\varphi : M \rightarrow M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 2), \quad x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle) \mapsto [\mathcal{E}_x], \quad (13)$$

где  $\mathcal{E}_m := \ker(\varepsilon_m)$  стабильный пучок.

(ii) Пусть  $\mathcal{M} = \varphi(M)$ . Морфизм  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{M}$  является изоморфизмом; обратный к нему морфизм  $\psi = \varphi^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow M$  дается формулой:

$$\begin{aligned} \psi : [\mathcal{E}] \mapsto (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle), \quad \text{где } w = [\mathcal{E}^{\vee\vee}], \quad (l_1, l_2) = \text{Supp}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}), \\ \text{а } \varepsilon : \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \text{ – канонический эпиморфизм.} \end{aligned} \quad (14)$$

При этом имеет место равенство (2).

*Доказательство.* (i) Рассмотрим график инциденции  $\Gamma_\Pi = \{(l_1, l_2), z) \in \Pi \times \mathbb{P}^3 \mid z \in l_1 \sqcup l_2\}$ . Вложения  $\Sigma \hookrightarrow R \times \Pi \simeq \Pi \times \mathbb{P}^3 \times R$  и  $\Gamma_\Pi \hookrightarrow \Pi \times \mathbb{P}^3$  индуцирует вложения  $i : \mathbb{P}^3 \times \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times R \times \Pi \simeq \Pi \times \mathbb{P}^3 \times R$  и  $j : \Gamma_\Pi \times R \hookrightarrow \Pi \times \mathbb{P}^3 \times R$ . Вложения  $i$  и  $j$  определяют расслоенное произведение

$$\Gamma = (\mathbb{P}^3 \times \Sigma) \times_{\Pi \times \mathbb{P}^3 \times R} (\Gamma_\Pi \times R)$$

с проекцией  $p : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \Sigma \xrightarrow{pr_2} \Sigma$ , а также  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \Sigma}$ -пучки  $\mathbb{F}_\Sigma = i^*(\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_\Pi)$  и  $\mathcal{O}_\Gamma(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_\Sigma|_\Gamma$ , плоские над  $\Sigma$ . Для произвольной точки  $(w, (l_1, l_2)) \in \Sigma$  ввиду (8) имеем

$$\dim \text{Ext}^i(\mathcal{F}_w, \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{l_i}(1)) = h^i(\bigoplus_{i=1}^2 (\mathcal{O}_{l_i}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_i}(2))) = \begin{cases} 10, & i = 0, \\ 0, & i \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Теорема о замене базы [11, Thm. 1.4], примененная к плоскому морфизму  $\mathbb{P}^3 \times \Sigma \xrightarrow{pr_2} \Sigma$  и плоским над  $\Sigma$  пучками  $\mathbb{F}_\Sigma$  и  $\mathcal{O}_\Gamma(1)$ , и равенства (15) показывают, что пучки  $\mathcal{E}xt_{pr_2}^i(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1))$ ,  $i \geq 1$ , зануляются, а пучок

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}xt_{pr_2}^0(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1))$$

является локально свободным  $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучком ранга 10. Пусть  $\tilde{Y} = \mathbf{V}(\mathcal{A}^\vee) \xrightarrow{\pi} \Sigma$  – векторное расслоение над  $\Sigma$ , ассоциированное с пучком  $\mathcal{A}^\vee$ ,  $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\text{can}} \pi^* \mathcal{A}$  – канонический мономорфизм,  $p_2 : \mathbb{P}^3 \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  – проекция на сомножитель, а  $\pi = \text{id} \times \pi : \mathbb{P}^3 \times \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \Sigma$  – индуцированная проекция. Используя (10), находим

$$\dim \tilde{Y} = \dim \Sigma + 10 = 29. \quad (16)$$

На  $\mathbb{P}^3 \times \Sigma$  имеем композицию морфизмов

$$ev_{\mathcal{A}} : pr_2^* \mathcal{A} = pr_2^* \mathcal{E}xt_{pr_2}^0(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) = pr_2^* pr_{2*} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \xrightarrow{ev_{\mathbb{F}}} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)),$$

где  $ev_{\mathbb{F}}$  – морфизм вычисления. Она определяет морфизм  $ev : pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_\Sigma \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma(1)$  как композицию

$$ev : pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_\Sigma \xrightarrow{ev_{\mathcal{A}} \otimes \text{id}} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \otimes \mathbb{F}_\Sigma \xrightarrow{ev_\Sigma} \mathcal{O}_\Gamma(1),$$

где  $ev_\Sigma$  – морфизм вычисления. На  $\mathbb{P}^3 \times \tilde{Y}$  рассмотрим подсхему  $\Gamma_{\tilde{Y}} = \Gamma \times_\Sigma \tilde{Y}$ , пучки  $\mathbb{F}_{\tilde{Y}} = \pi^* \mathbb{F}_\Sigma$ ,  $\mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1) = \pi^* \mathcal{O}_\Gamma(1)$  и морфизм

$$\tilde{\varepsilon} : \mathbb{F}_{\tilde{Y}} \xrightarrow{p_2^* \text{can} \otimes \text{id}} \pi^*(pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_\Sigma) \xrightarrow{\pi^* ev} \mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1). \quad (17)$$

Заметим, что по определению схема  $\tilde{Y}$  имеет следующее поточечное описание:

$$\tilde{Y} = \{y = (w, (l_1, l_2), \varepsilon_y) \mid (w, (l_1, l_2)) \in \Sigma, \varepsilon_y = \tilde{\varepsilon}|_{\mathbb{P}^3 \times \{y\}} \in \text{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1))\}. \quad (18)$$

Рассмотрим в  $\tilde{Y}$  плотное открытое подмножество

$$Y = \{y = (w, (l_1, l_2), \varepsilon_y) \in \tilde{Y} \mid \varepsilon_y : \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \text{ – эпиморфизм}\}. \quad (19)$$

Ввиду (16) имеем:

$$\dim Y = 29. \quad (20)$$

Положим  $\Gamma_Y = \Gamma_{\tilde{Y}} \times_{\tilde{Y}} Y$ ,  $\mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1) = \mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1)|_{\Gamma_Y}$ .  $\mathbb{F}_Y = \mathbb{F}_{\tilde{Y}}|_{\mathbb{P}^3 \times Y}$ . По построению на  $\mathbb{P}^3 \times Y$  имеем эпиморфизм

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}|_{\mathbb{P}^3 \times Y} : \mathbb{F}_Y \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1). \quad (21)$$

Рассмотрим Quot-схему  $Q := \text{Quot}_{\mathbb{P}^3 \times \Sigma / \Sigma}(\mathbb{F}_\Sigma, P) \xrightarrow{q} \Sigma$ , где  $P = P(m) = 2(m+1)$  – многочлен Гильберта приведенной схемы  $l_1 \sqcup l_2$  относительно обильного пучка  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ . Пусть

$[\epsilon_Q : \mathbb{F}_Q := q^*\mathbb{F}_\Sigma \rightarrow \mathcal{L}]$  – класс универсального фактора на  $\mathbb{P}^3 \times Q$ . В силу (21) по универсальности Quot-схемы  $Q$  существует морфизм

$$f : Y \rightarrow Q$$

и изоморфизмы  $\mathbb{F}_Y \cong \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1) \cong (\text{id} \times f)^*\mathcal{L}$  такие, что  $\epsilon = (\text{id} \times f)^*\epsilon_Q$ :

$$(\mathbb{F}_Y \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1)) = (\text{id} \times f)^*(\mathbb{F}_Q \xrightarrow{\epsilon_Q} \mathcal{L}). \quad (22)$$

Положим  $M = f(Y)$ . Заметим, что для произвольной точки  $y = (w, (l_1, l_2), \epsilon_y) \in Y$  по определению Quot-схемы  $Q$  слой  $f^{-1}(f(y))$  есть

$$f^{-1}(f(y)) \cong \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) \cong \mathbf{k}^* \oplus \mathbf{k}^*. \quad (23)$$

Из (11) и поточечного описания (19) схемы  $Y$  непосредственно вытекает равенство (11). При этом для произвольной точки  $x = (w, (l_1, l_2), \langle \epsilon \rangle) \in M$  условие скрещивания прямых  $l_1$  и  $l_2$ , условие эпиморфности морфизма  $\epsilon : \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)$  и условие  $(s_{\mathcal{F}_w})_0 \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$ , входящие в определение множества  $\mathcal{M}$ , являются открытыми условиями. Отсюда следует, что  $\mathcal{M}$  есть открытое подмножество схемы  $M$ , а значит, является схемой. При этом ввиду (20) и (23)  $M$  имеет размерность  $\dim M = \dim Y - 2 = 27$ , то есть имеем равенство (12). Кроме того, открытое вложение  $i : M \hookrightarrow Q$  и морфизм  $f : Y \rightarrow M$  определяют на  $\mathbb{P}^3 \times M$  подсхему  $\Gamma_M$  такую, что  $\Gamma_Y = \Gamma_M \times_M Y$ , и плоские над  $M$  пучки  $\mathbb{F}_M = (\text{id} \times i)^*\mathbb{F}_Q$  и  $\mathcal{O}_{\Gamma_{MM}}(1)$  такие, что

$$\mathbb{F}_Y \cong (\text{id} \times f)^*\mathbb{F}_M, \quad \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1) \cong (\text{id} \times f)^*\mathcal{O}_{\Gamma_M}(1).$$

При этом универсальный фактор  $\epsilon_Q : \mathbb{F}_Q \rightarrow \mathcal{L}$  на  $\mathbb{P}^3 \times Q$  индуцируют фактор-морфизм

$$\epsilon_M = (\text{id} \times i)^*\epsilon_Q : \mathbb{F}_M \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_M}(1). \quad (24)$$

Обозначим

$$\mathbb{E}_M = \ker(\epsilon_M), \quad \mathcal{E}_x = \mathbb{E}_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}, \quad \epsilon_x = \epsilon_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}, \quad x \in M. \quad (25)$$

В силу того, что пучки  $\mathbb{E}_M, \mathbb{F}_M, \mathcal{O}_{\Gamma_M}(1)$  – плоские над  $M$ , то для произвольной точки  $x = (w, (l_1, l_2), \langle \epsilon_m \rangle) \in M$  точна тройка

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_x \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{F}_w \xrightarrow{\epsilon_x} \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \rightarrow 0. \quad (26)$$

Легко видеть, что пучок  $\mathcal{E}_m$  стабилен по Гизекеру. Действительно, поскольку  $[\mathcal{F}_w] \in R$ , то пучок  $\mathcal{F}_w$  – стабильный по Гизекеру пучок с  $c_1(\mathcal{F}_w) = -1$ , а значит, он не содержит подпучков  $\mathcal{F}'$  ранга 1 с  $c_1(\mathcal{F}') \geq 0$ . Тем самым, ввиду тройки (26) пучок  $\mathcal{E}_x$  также имеет  $c_1(\mathcal{E}_x) = -1$ , а значит, не содержит подпучков  $\mathcal{E}'$  ранга 1 с  $c_1(\mathcal{E}') \geq 0$ , и потому стабилен по Гизекеру.

Заметим, что по определению класс изоморфизма  $[\mathcal{E}_x]$  пучка  $\mathcal{E}_x$  зависит только от класса  $\langle \epsilon_x \rangle$  эпиморфизма  $\epsilon_x$ , поэтому в морфизм  $\varphi$  в (13) ввиду стабильности пучка  $\mathcal{E}_x$  и равенства  $\mathcal{E}_x = \mathbb{E}_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}$  (см. (25)) определен корректно.

(ii) Формула (14) является непосредственным следствием тройки (26), в которой  $\mathcal{F}_w = \mathcal{E}^{\vee\vee}$ . Равенство (2) вытекает из (5), (7) и условия  $(s_{\mathcal{E}^{\vee\vee}})_0 \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$  в (11), накладываемого на пучок  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ . Теорема доказана.  $\square$

Из теоремы 1 вытекает

**Следствие.** *Имеют место равенства  $\dim \overline{\mathcal{M}} = \dim \mathcal{M} = 27$ , где  $\overline{\mathcal{M}}$  – замыкание  $\mathcal{M}$  в схеме модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ . Тем самым, ввиду стабильности пучков  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$  верно неравенство*

$$\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \dim T_{[\mathcal{E}]}M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0) \geq \dim_{[\mathcal{E}]} \mathcal{M} \geq 27, \quad [\mathcal{E}] \in \mathcal{M}. \quad (27)$$

### 3 Вычисление касательного пространства $\text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ к схеме модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ в точках $[\mathcal{E}]$ семейства $\mathcal{M}$

В этом параграфе мы доказываем теорему 2 о том, что семейство пучков  $\mathcal{M}$ , построенное выше, является гладким открытым подмножеством неприводимой компоненты схемы модулей Гизекера-Маруямы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ .

#### Теорема 2.

*Для произвольного пучка  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$  выполняется неравенство  $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 27$ . Как следствие, семейство пучков  $\mathcal{M}$ , построенное выше, есть гладкое плотное открытое подмножество неприводимой компоненты  $\overline{\mathcal{M}}$  схемы модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ . Эта компонента  $\overline{\mathcal{M}}$  имеет ожидаемую размерность 27.*

Доказательство этой теоремы предварим вспомогательными леммами 1-3.

Рассмотрим точную тройку (26), в которой обозначено  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x$  и использован изоморфизм  $\mathcal{F}_w = \mathcal{E}^{\vee\vee}$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow L \rightarrow 0, \quad L := \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1). \quad (28)$$

Стабильные по Гизекеру пучки  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  не имеют кручения, а  $L$  является  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -пучком кручения, поэтому

$$\text{Hom}(L, \mathcal{E}) = 0 = \text{Hom}(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (29)$$

Применяя к тройке (28) функтор  $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$  и учитывая первое равенство (29), получим точную последовательность

$$\text{Hom}(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(L, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^2(L, \mathcal{E}). \quad (30)$$

Для доказательства теоремы 2 нам необходимо найти размерности различных групп, входящих в последовательность (30). Мы получим эти результаты в нижеследующих леммах 1-3.

**Лемма 1.** *Справедливы следующие равенства:*

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbf{k}, \quad (31)$$

$$\text{Hom}(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) = 0, \quad (32)$$

$$\text{Ext}^1(L, \mathcal{E}) = \mathbf{k}^2. \quad (33)$$

*Доказательство.* Пучок  $\mathcal{E}$  стабилен согласно утверждению (i) теоремы 1 и, значит, является простым [9, Cor. 1.2.8], то есть получаем равенство (31).

Докажем равенство (32). Действительно, пучок  $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in R$  – стабильный, а значит, простой, то есть любой ненулевой эндоморфизм пучка  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  – изоморфизм. Поэтому любой ненулевой морфизм  $\tau : \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{E}$  ввиду инъективности морфизма  $\mathcal{E} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee}$  дает ненулевую композицию  $\mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\text{can} \circ \tau} \mathcal{E}^{\vee\vee}$ , которая тем самым является изоморфизмом. Как следствие,  $\text{can}$  – также изоморфизм, вопреки тройке (28). Таким образом, имеем равенство (32).

Далее, к точной тройке (28) применим функтор  $\text{Hom}(L, -)$ ; с учетом второго равенства (29) получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, L) \rightarrow \text{Ext}^1(L, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (34)$$

Так как прямые  $l_1$  и  $l_2$  не пересекаются, то

$$\begin{aligned} \text{Hom}(L, L) &= \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) = \\ &= \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}(1)) \oplus \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{O}_{l_2}(1)) \cong \mathbf{k}^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Найдем  $\text{Ext}^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee})$ . Для этого рассмотрим точные тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{l_i}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{I}_{l_i}(1) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Применим к ним функтор  $\text{Hom}(-, \mathcal{E}^{\vee\vee})$ , получим точные последовательности

$$\text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (37)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) = \mathbf{H}^0(\mathcal{E}^{\vee\vee})^{\oplus 2}. \quad (38)$$

Так как пучок  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  стабилен, то  $\mathbf{H}^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$ , поэтому (38) влечет

$$\text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0. \quad (39)$$

С другой стороны,  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = \mathbf{H}^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}(-1)) = 0$  (см. [4, Tab. 2.6.1]). Отсюда и из (37) и (39) следует, что  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$ , и поэтому

$$\text{Ext}^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \oplus \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0. \quad (40)$$

Из (34) и равенств (35) и (40) вытекает (33).  $\square$

**Лемма 2.** *Имеет место неравенство*

$$\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) \leq 20. \quad (41)$$

*Доказательство.* Рассмотрим точную тройку (3), в которой в качестве  $\mathcal{F}$  возьмем пучок  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  из тройки (28):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow 0 \quad (42)$$

Напомним, что по определению  $M$  (см. (11)) имеем  $(m_1 \sqcup m_2) \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$ , откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{m_i}, L) &= \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{m_i}, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) = 0, \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ \mathcal{E}xt^j(L, \mathcal{O}_{m_i}(-4)) &= 0, \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (43)$$

Кроме того, согласно [4, Tab. 2.6.1] верны равенства

$$h^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1)) = 1, \quad h^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1)) = 0. \quad (44)$$

Применяя к (42) функтор  $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$  и учитывая второе равенство (29), получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}). \quad (45)$$

Заметим, что тройка (28), подкрученная на  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(2) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(2) \rightarrow 0,$$

с учетом изоморфизмов  $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) \cong H^0(\mathcal{E}(1)) = 0$ ,  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) \cong H^1(\mathcal{E}(1))$  и равенств (44) дает неравенство

$$5 \leq \dim \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) = \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) + 5 \leq 6. \quad (46)$$

Покажем, что

$$\dim \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) = 15. \quad (47)$$

Для этого применим функтор  $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$  к точной тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2} \rightarrow 0, \quad (48)$$

получим точную последовательность

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) &\rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (49)$$

Согласно [4, Tab. 2.6.1] имеем  $h^i(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$ ,  $i \neq 1$ ,  $h^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 1$ . Кроме того,  $h^0(L) = 4$ ,  $h^{\geq 1}(L) = 0$ . Поэтому, переходя к когомологиям тройки (28), находим:  $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) = h^1(\mathcal{E}) = 5$ ,  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) = h^1(\mathcal{E}) = 0$ . Подставляя эти равенства в (49), выводим, что для получения равенства (47) достаточно проверить равенства

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 0, \quad (50)$$

$$\dim \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 10. \quad (51)$$

Проверим равенство (50). Рассмотрим точную последовательность, вытекающую из спектральной последовательности локальных и глобальных Ext-ов  $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \implies \text{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})$ :

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \rightarrow H^2(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \quad (52)$$

Так как стабильный пучок  $\mathcal{E}$  не имеет кручения, а  $\mathcal{O}_{m_1}$  – пучок кручения, то  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$ , и из (52) вытекает изоморфизм

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \cong H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})). \quad (53)$$

Далее, применяя к тройке (28) функтор  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, -)$  и учитывая (43), получаем изоморфизм пучков

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (54)$$

Заметим, что, согласно [9, Prop. 1.1.6.i)],

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0. \quad (55)$$

Применяя к точным тройкам (42) и (48) функтор  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, -)$  и пользуясь (55) и изоморфизмом  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2})$ , получаем мономорфизм

$$0 \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}) \quad (56)$$

и изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}) \cong \mathcal{O}_{m_1} \quad (57)$$

соответственно. С другой стороны, поскольку  $\text{Supp}(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee})) \subset \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee})$ , то  $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) \leq \dim \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$ . Отсюда и из (57) вытекает, что морфизм  $\beta$  в (56) – нулевой и  $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$ . Поэтому  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$  в силу (53). По той же причине  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 0$  и, значит, верно равенство (50).

Перейдем к проверке равенства (51). Для этого вычислим  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})$ . По двойственности Серра-Гротендика имеем

$$\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))^\vee. \quad (58)$$

Рассмотрим точную последовательность, вытекающую из спектральной последовательности локальных и глобальных Ext-ов для пары пучков

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{H}^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))) \rightarrow \\ \rightarrow \mathbb{H}^2(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))). \end{aligned} \quad (59)$$

Применяя к тройке (28) функтор  $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{m_1}(-4))$  и учитывая последние равенства (43), получаем равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &= \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)), \\ \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &= \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)). \end{aligned} \quad (60)$$

Применяя тот же функтор к (42), (48) и точной тройке  $0 \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \cup m_2} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1} \rightarrow \mathcal{O}_{m_2} \rightarrow 0$  и используя соотношения  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)$ ,  $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{O}_{m_1}(-4)) = 0$ ,  $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) = 0$ ,  $j \geq 1$  (см. [5, Ch. III, Prop. 6.3.(b)]), изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}) \cong \det N_{m_1/\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{m_1}(2), \quad (61)$$

(см. [12, p. 50]), и соотношения  $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))$ ,  $i \geq 0$ ,  $\mathcal{I}_{m_1}|_{m_1} \cong \mathcal{O}_{m_1}(-1)^{\oplus 2}$ , получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{m_1}(-3) \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (62)$$

и изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \\ &\cong \mathcal{O}_{m_1}(-2), \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}(-1)^{\oplus 2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \\ &\cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2} \end{aligned} \quad (64)$$

соответственно. Подставляя (63) и (64) в (62), получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{m_1}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{m_1}(-2) \\ \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Поскольку пучок  $\mathcal{E}^{\vee\vee}|_{m_1}$  – локально свободный пучок ранга 2 вне 0-мерного множества  $\text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \cap m_1$ , то пучок  $\mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) - \mathcal{O}_{m_1}$ -пучок ранга 2. Тем самым,  $\text{im}(\psi)$  является  $\mathcal{O}_{m_1}$ -пучком кручения. Следовательно, как подпучок пучка  $\mathcal{O}_{m_1}(-3)$  он является нулевым пучком. Поэтому из (65) и (60) вытекают изоморфизмы

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2}, \quad (66)$$

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-2)/\mathcal{O}_{m_1}(-3) \cong \mathbf{k}_x, \quad x \in m_1. \quad (67)$$

Подставляя (66) и (66) в (59) получаем  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))^{\vee} \cong \mathbf{k}^5$ , где  $SD$  – двойственность Серра-Гротендика. Аналогично  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}^5$ . Как следствие последних изоморфизмов получаем равенство (51), а тем самым, и равенство (47). Подставляя теперь (46) и (47) в (45), получаем неравенство (41). Лемма 2 доказана.  $\square$

**Лемма 3.** *Верно равенство*

$$\dim \text{Ext}^2(L, \mathcal{E}) = 8. \quad (68)$$

*Доказательство.* Напомним, что поскольку  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$ , то из определения  $\mathcal{M}$  (см. (8)-(11) и теорему ??.(ii)) следует, что пучок  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  локально свободен вдоль  $l_1$ , причем

$$\mathcal{E}^{\vee\vee}|_{l_1} \cong \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1), \quad (69)$$

и, кроме того,

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) = 0, \quad (70)$$

а также  $\mathcal{T}or_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}) = 0$ . Поэтому ограничивая точную тройку (28) на  $l_1$ , получаем точные тройки

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \ker(r) \rightarrow \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_{l_1}(1) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}) \rightarrow \mathcal{E}|_{l_1} \rightarrow \ker(r) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Верхняя тройка (71) влечет изоморфизм  $\ker(r) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$ . Подставляя его в нижнюю тройку (71) и используя соотношение  $\mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}) \cong N_{l_1/\mathbb{P}^3}^{\vee}(1) \cong \mathcal{O}_{l_1}^{\oplus 2}$ , получаем  $\mathcal{E}|_{l_1} = \mathcal{O}_{l_1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-2)$ . Отсюда находим  $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}|_{l_1}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-3)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1)$  и, тем самым,

$$h^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) = 4. \quad (72)$$

Далее, по аналогии с (61) имеем  $\mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$ . Отсюда и из точной последовательности, полученной применением к тройке (28) функтора  $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{l_1}(-3))$ , вытекает изоморфизм  $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$ . Тем самым,  $h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) = 0$ . Подставляя это равенство вместе с (72) в точную последовательность  $0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)))$ , аналогичную (59), получаем изоморфизм  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{E}) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))^{\vee} \cong \mathbf{k}^4$ . Аналогично,  $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}^4$ , откуда вытекает (68). Лемма 3 доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Подставляя в (30) полученные в леммах 1-3 соотношения (31), (32), (33), (41) и (68), получаем требуемое неравенство  $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 27$  для  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$ . Сравнивая это неравенство с (27), получаем равенство  $\dim T_{[\mathcal{E}]}M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0) = \dim T_{[\mathcal{E}]}M = 27$ . Тем самым, ввиду неприводимости  $\mathcal{M}$  замыкание  $\overline{\mathcal{M}}$  схемы  $\mathcal{M}$  в схеме модулей  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$  является неприводимой компонентой размерности 27 схемы  $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ , а  $\mathcal{M}$  – гладким плотным открытым подмножеством в  $\overline{\mathcal{M}}$ . При этом размерность 27 является ожидаемой (по теории деформации), то есть совпадает с виртуальной размерностью  $\text{vdim} \mathcal{M}$ , вычисляемой для  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$  по формуле Римана-Роха  $\text{vdim} \mathcal{M} = 1 - \chi(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ , где  $\chi(E, E) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ . Действительно, поскольку  $c_1(\mathcal{E}) = -1$ ,  $c_2(\mathcal{E}) = 4$ , то, как известно [6], [7], [10],  $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 6 - 8c_2(\mathcal{E}) = -26$ , откуда  $\text{vdim} \mathcal{M} = 1 - (-26) = 27$ .  $\square$

## Список литературы

- [1] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov. Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant of the projective space. *Advances in Mathematics* **402** (2022), 1-64.
- [2] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov, S. A. Tikhomirov. New moduli components of rank 2 bundles on projective space. *Sbornik Mathematics* **212**, No. 11 (2021), 1503-1552.
- [3] C. Bănică, N. Manolache. Rank 2 stable vector bundles on  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  with Chern classes  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 4$ . *Math. Z.*, 1985, Bd. **190**, 315-339.
- [4] M.-C. Chang. Stable rank 2 reflexive sheaves on  $\mathbb{P}^3$  with small  $c_2$  and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **284**:1 (1984), 57-89.
- [5] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [6] R. Hartshorne. Stable vector bundles of rank 2 on  $\mathbb{P}^3$ . *Math. Ann.* **238** (1978), 229–280.
- [7] R. Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Math. Ann.* **254** (1980), 121-176.
- [8] R. Hartshorne, I. Sols. Stable rank 2 vector bundles on  $\mathbb{P}^3$  with  $e = -1, c_2 = 2$ . *J. Reine Angew. Math.* **325** (1981), 145–152.
- [9] D. Huybrechts, M. Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Second edition, Cambridge, 2010.
- [10] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov. Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on  $\mathbb{P}^3$ . *Ann. Mat. Pura Appl.* **196** (2017), 1573–1608.
- [11] H. Lange. Universal families of extensions. *J. Algebra*, **83**(1) (1983), 101–112.
- [12] Ch. Okonek, M. Schneider, H. Spindler. *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Birkhäuser, 1988.
- [13] B. Schmidt. Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space. *Mat. Contemp.*, **47** (2020), 228-270.

- [14] M. A. Zavodchikov. Components of the Moduli Scheme of Stable Rank 2 Torsion Free Sheaves with Chern Classes  $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$  on Three-Dimensional Projective Space. Yaroslavl Pedagogical Vestnik, **3:1** (2012), 70-89 (Russian).

Заводчиков Михаил Александрович  
Математический факультет, Ярославский государственный университет  
им. П.Г.Демидова  
Союзная ул., 144, Ярославль 150008,  
zav-mikhail@yandex.ru

Тихомиров Александр Сергеевич  
Факультет математики, Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"  
Усачева ул., 6, Москва 119048  
astikhomirov@mail.ru