

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

УДК 517.521

MSC 41A10

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ В $C_0(\Omega_\delta)$ СРЕДНИХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ СУММ ФУРЬЕ–МЕЙКСНЕРА

Р.М. Гаджимирзаев

ABSTRACT. Approximation properties of the de la Vallée Poussin means $V_{n+m,N}^\alpha(f, x)$ of Fourier–Meixner sums are studied. In particular, for $an \leq m \leq bn$ and $n + m \leq \lambda N$ the existence of a constant $c(a, b, \alpha, \lambda)$ is established such that $\|V_{n+m,N}^\alpha(f)\| \leq c(a, b, \alpha, \lambda)\|f\|$, where $\|f\|$ is the norm of the function f in the space $C_0(\Omega_\delta)$.

Keywords: approximation properties, Meixner polynomials, Fourier series, de la Vallée Poussin means.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, \dots\}$. Через $m_{n,N}^\alpha(x)$ обозначим полиномы Мейкснера, образующие при $\alpha > -1$ ортонормированную систему на множестве Ω_δ относительно веса

$$\rho(x) = e^{-x} \frac{\Gamma(Nx + \alpha + 1)}{\Gamma(Nx + 1)} (1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}.$$

Рассмотрим пространство функций $C_0(\Omega_\delta)$, заданных на сетке Ω_δ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{2}} |f(x)| = 0.$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega_\delta} e^{-\frac{x}{2}} |f(x)|.$$

Сумму Фурье–Мейкснера функции $f \in C_0(\Omega_\delta)$ запишем в виде

$$(1) \quad S_{n,N}^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k^\alpha(f) m_{k,N}^\alpha(x),$$

GADZHIMIRZAEV R.M., ON THE BOUNDEDNESS IN $C_0(\Omega_\delta)$ OF THE VALLÉE POUSSIN MEANS FOR THE FOURIER–MEIXNER SUMS.

© 2024 ГАДЖИМИРЗАЕВ Р.М.

где

$$(2) \quad c_k^\alpha(f) = \sum_{t \in \Omega_\delta} f(t) m_{k,N}^\alpha(t) \rho(t).$$

В работах [1, 2] посредством неравенства Лебега были исследованы аппроксимативные свойства сумм $S_{n,N}^\alpha(f, x)$ при $\alpha > -1$ и $n = O(N)$. В частности, были получены поточечные оценки для соответствующей функции Лебега. В настоящей работе в качестве аппарата приближения функций из $C_0(\Omega_\delta)$ рассматриваются средние Валле Пуссена

$$(3) \quad V_{n+m,N}^\alpha(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} S_{k,N}^\alpha(f, x).$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Пусть $f \in C_0(\Omega_\delta)$, $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\lambda > 0$, a и b фиксированные действительные числа, причем $0 < a \leq b$. Тогда для $an \leq m \leq bn$ и $n+m \leq \lambda N$ имеет место неравенство

$$\|V_{n+m,N}^\alpha(f)\| \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \|f\|.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает оценка

$$(4) \quad e^{-\frac{x}{2}} |f(x) - V_{n+m,N}^\alpha(f, x)| \leq c(a, b, \alpha, \lambda) E_n(f),$$

где $E_n(f) = \inf_{p_n \in H^n} \|f - p_n\|$ — величина наилучшего приближения функции f алгебраическими полиномами степени не выше n . Здесь и далее через c , $c(\alpha)$, $c(\alpha, \lambda, s)$ мы будем обозначать положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

Отметим, что в работах [3]–[7] были исследованы аналогичные задачи о приближении функций посредством средних Валле Пуссена частичных сумм ряда Фурье по различным ортогональным системам. В частности, в [3] были рассмотрены средние Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби

$$\mathcal{V}_{n,m}^{\alpha,\beta}(f, x) = \frac{1}{n+1} \left[S_m^{\alpha,\beta}(f, x) + \dots + S_{m+n}^{\alpha,\beta}(f, x) \right]$$

и доказана следующая

Теорема А. Пусть $-1 < \alpha, \beta \leq 0$, a, b — положительные числа ($a \leq b$). Тогда средние Валле Пуссена $\mathcal{V}_{n,m}^{\alpha,\beta}(f, x)$ равномерно относительно $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ ограничены как линейные операторы, действующие в пространстве $C[-1, 1]$.

Аналогичная теорема доказана в работе [4] в случае средних Валле Пуссена для сумм Фурье по дискретным полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(\frac{N-1}{2}(1+x), N)$ при $\alpha = \beta = 0$, $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ и $n = O(\sqrt{N})$. Далее, в [5] были рассмотрены дискретные полиномы Якоби $P_0^{\alpha,\beta}(x), P_1^{\alpha,\beta}(x), \dots, P_{N-1}^{\alpha,\beta}(x)$ ($N = 1, 2, \dots$), которые образуют ортогональную относительно веса $\mu(x)$ систему на сетке $\Omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. При $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ и $n = O(N)$ была доказана равномерная ограниченность в $C[-1, 1]$ нормы операторов Валле Пуссена $v_{n,m,N}^{\alpha,\beta}(f)$ частичных сумм ряда Фурье по полиномам $\{P_k^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$. В работах [6, 7] было исследовано приближение функций по норме пространства Лебега L_w^p , $w(x)$ — вес типа Якоби, средними Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби. В [6] также был рассмотрен вопрос об

ограниченности средних Валле Пуссена $\mathcal{V}_{2n}^\alpha(f, x)$ для сумм Фурье–Лагерра. В частности была доказана

Теорема В. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $u(x) = x^\gamma e^{-x/2}$, $\alpha > -1$ и $\max\{\alpha/2 - 1/4, 0\} < \gamma + 1/p < \min\{\alpha/2 + 7/6, \alpha + 1\}$. Тогда для любого $f \in L_u^p$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{V}_{2n}^\alpha(f)\|_{L_u^p} \leq c \|f\|_{L_u^p}, \quad c \neq c(n, f).$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ МЕЙКСНЕРА

Приведем некоторые свойства полиномов Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$, которые можно найти в [8]. Полиномы $M_{n,N}^\alpha(x)$ можно определить с помощью равенства

$$(5) \quad M_{n,N}^\alpha(x) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-Nx)_k}{(\alpha+1)_k k!} (1-e^\delta)^k,$$

в котором $(n)_k = n(n+1) \cdots (n+k-1)$. При $\alpha > -1$ полиномы $M_{n,N}^\alpha(x)$ ортогональны относительно веса $\rho(x)$:

$$\sum_{x \in \Omega_\delta} M_{n,N}^\alpha(x) M_{k,N}^\alpha(x) \rho(x) = h_n^\alpha \delta_{nk},$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} e^{n\delta} \Gamma(\alpha+1)$. Формула Кристоффеля–Дарбу для этих полиномов имеет вид

$$(6) \quad K_{n,N}^\alpha(t, x) = \sum_{k=0}^n m_{k,N}^\alpha(t) m_{k,N}^\alpha(x) = \frac{\delta \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}}} \frac{m_{n+1,N}^\alpha(t) m_{n,N}^\alpha(x) - m_{n,N}^\alpha(t) m_{n+1,N}^\alpha(x)}{x - t}.$$

В работах [8, 9] при $0 < \delta \leq 1$, $\lambda > 0$, $1 \leq n \leq \lambda N$, $\alpha > -1$, $0 \leq x < \infty$, $s \geq 0$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$ была получена весовая оценка:

$$(7) \quad e^{-\frac{x}{2}} |M_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta)| \leq c(\alpha, \lambda, s) A_n^\alpha(x),$$

где

$$(8) \quad A_n^\alpha(x) = \begin{cases} \theta_n^\alpha, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\theta_n}, \\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta_n} < x \leq \frac{\theta_n}{2}, \\ \left[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}} + |x - \theta_n|) \right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta_n}{2} < x \leq \frac{3\theta_n}{2}, \\ e^{-\frac{x}{4}}, & \frac{3\theta_n}{2} < x < \infty. \end{cases}$$

Приведем еще одно свойство полиномов Мейкснера, которое представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $\alpha > -1$, $\lambda > 0$, $1 \leq n \leq \lambda N$, $0 \leq x \leq \frac{\lambda(\alpha+1)}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}n}$. Тогда имеет место оценка

$$M_{n,N}^\alpha(x) \geq \frac{1}{2} \binom{n+\alpha}{n}.$$

Доказательство. Так как $(-n)_k = (-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1) = (-1)^k n^{[k]}$, $(-Nx)_k = (-1)^k (Nx)^{[k]}$, то из (5) имеем

$$(9) \quad 2M_{n,N}^\alpha(x) - \binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n} + 2\binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^{[k]}(Nx)^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} (1-e^\delta)^k.$$

Далее, нам понадобится некоторая информация о числах Стирлинга первого рода $s(n, k)$, $0 \leq k \leq n$, которые могут быть определены из равенства [10, p.824]

$$(10) \quad x^{[n]} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k.$$

В частности, $s(0, 0) = s(n, n) = 1$, $s(n, 0) = 0$ при $n \geq 1$. Числа $s(n, k)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k), \quad 1 \leq k < n.$$

Кроме того, для $s(n, k)$ имеет место равенство

$$(11) \quad \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n |s(n, k)| = 1.$$

Таким образом, из (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} 2M_{n,N}^\alpha(x) - \binom{n+\alpha}{n} &\geq \\ &\binom{n+\alpha}{n} - 2\binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^k(e^\delta-1)^k}{(\alpha+1)_k} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k |s(k, j)|(Nx)^j \geq \\ &\binom{n+\alpha}{n} - 2\binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(e^\delta-1)^k}{(\alpha+1)_k \delta^k} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k |s(k, j)| \frac{\lambda^j (\alpha+1)^j}{e^{2(\lambda+\alpha+1)j}} n^{k-j} N^{j-k}. \end{aligned}$$

Так как $(\alpha+1)_k = (\alpha+1)\cdots(\alpha+k) > (\alpha+1) \cdot (k-1)!$, $\frac{(e^\delta-1)^k}{\delta^k} < e^{k\delta}$, $\frac{\alpha+1}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}} < 1$ и $n^{k-j} N^{j-k} \leq \lambda^{k-j}$, то с учетом (11) мы можем записать

$$\begin{aligned} 2M_{n,N}^\alpha(x) - \binom{n+\alpha}{n} &\geq \binom{n+\alpha}{n} - \frac{2\lambda(\alpha+1)}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}(\alpha+1)} \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \geq \\ &\binom{n+\alpha}{n} - \frac{2(\alpha+1)\lambda e^\lambda}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}} \binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n} - \frac{\lambda}{e^\lambda} \frac{2(\alpha+1)}{e^{2(\alpha+1)}} \binom{n+\alpha}{n} \geq 0. \end{aligned}$$

□

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2. [2] Пусть $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $N = 1/\delta$, $0 < \delta \leq 1$. Тогда для $1 \leq n \leq \lambda N$ имеет место следующая оценка

$$e^{-x} K_{n,N}^\alpha(x, x) \leq c(\alpha, \lambda) \begin{cases} n^{1-\alpha} (A_n^\alpha(x))^2, & x \in [0, \frac{\theta_n}{2}] \cup [\frac{3\theta_n}{2}, \infty), \\ n^{-\alpha}, & x \in [\frac{\theta_n}{2}, \frac{3\theta_n}{2}]. \end{cases}$$

Следующие леммы доказаны в работе [11].

Лемма 3. Пусть $x \neq y$. Тогда для

$$\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K_{k,N}^\alpha(x, y)$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y) = & -\frac{\delta}{(e^\delta - 1)e^{(n-1)\delta}} \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \frac{1}{(x - y)^2} \cdot \\ & \left\{ x M_{n,N}^\alpha(x - \delta) M_{n,N}^\alpha(y) + y M_{n,N}^\alpha(x) M_{n,N}^\alpha(y - \delta) - \right. \\ & \frac{x}{n} M_{n,N}^\alpha(y) \left[\frac{e^\delta(x - \delta)}{x - y - \delta} M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x - 2\delta) + \alpha M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x - \delta) \right] - \\ & \frac{y}{n} M_{n,N}^\alpha(x) \left[\alpha M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y - \delta) - \frac{e^\delta(y - \delta)}{x - y + \delta} M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y - 2\delta) \right] + \\ & \frac{xy}{n} \left[\frac{e^\delta}{x - y - \delta} + \frac{e^\delta - 1}{\delta} \right] M_{n,N}^\alpha(x - \delta) M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y - \delta) - \\ & \frac{xy}{n} \left[\frac{e^\delta}{x - y + \delta} - \frac{e^\delta - 1}{\delta} \right] M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x - \delta) M_{n,N}^\alpha(y - \delta) + \\ & \left. \frac{2xy}{n} \frac{e^\delta - 1}{\delta} M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x - \delta) M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y - \delta) \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 4. Если $x > 0$, $y > 0$ и $|x - y| \geq \frac{\theta_n}{4}$, то

$$e^{-\frac{x+y}{2}} |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y)| \leq c(\alpha, \lambda) \theta_n^{-(\alpha+1)} A_n^\alpha(x) A_n^\alpha(y).$$

Лемма 5. Если $0 < x, y < \frac{\theta_n}{2}$ и $x > 2y$ ($y > 2x$), то

$$e^{-\frac{x+y}{2}} |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y)| \leq \frac{c(\alpha, \lambda) \theta_n^{-\alpha}}{\max(x, y)} A_n^\alpha(x) A_n^\alpha(y).$$

Лемма 6. Если $x \in \left[\frac{2}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2} \right]$, $y \in \left[\frac{1}{\theta_n}, \frac{3\theta_n}{4} \right]$ и $|x - y| \geq \sqrt{\frac{x}{\theta_n}}$, то

$$e^{-\frac{x+y}{2}} |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y)| \leq \frac{c(\alpha, \lambda) (xy)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} (x + y)}{\sqrt{n} (x - y)^2}.$$

Лемма 7. Если $\frac{\theta_n}{4} \leq x, y \leq \frac{7\theta_n}{2}$ и $|x - y| > 1$, то

$$e^{-\frac{x+y}{2}} |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, y)| \leq \frac{c(\alpha, \lambda) \theta_n^{-\alpha}}{|x - y|^{\frac{3}{2}}}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Из (1)–(3) имеем

$$V_{n+m}^\alpha(f, x) = \sum_{t \in \Omega_\delta} f(t) \rho(t) \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{j=0}^k m_{j,N}^\alpha(x) m_{j,N}^\alpha(t).$$

Отсюда

$$e^{-\frac{x}{2}} |V_{n+m}^\alpha(f, x)| \leq \|f\| \Lambda_{n,m}^\alpha(x),$$

где

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) = (1 - e^{-\delta})^{\alpha+1} \sum_{t \in \Omega_\delta} e^{-\frac{x+t}{2}} \frac{\Gamma(Nt + \alpha + 1)}{\Gamma(Nt + 1)} \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} K_{k,N}^\alpha(x, t) \right|.$$

Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что при $x \in [0, \infty)$ и $-1 < \alpha < 1/2$ имеет место равномерная оценка

$$(12) \quad \Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

Пусть $x \in \left[0, \frac{2}{\theta_n}\right]$. Так как $\frac{\Gamma(Nt + \alpha + 1)}{\Gamma(Nt + 1)} \leq c(\alpha)(Nt + 1)^\alpha = c(\alpha)N^\alpha(t + \delta)^\alpha$, то мы можем записать

$$(13) \quad \Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(\alpha)\delta \left[\sum_{t \in B_1} + \sum_{t \in B_2} \right] (t + \delta)^\alpha \frac{e^{-\frac{x+t}{2}}}{m+1} \left| \sum_{k=n}^{n+m} K_{k,N}^\alpha(x, t) \right| = I_1 + I_2,$$

где $B_1 = [0, 4/\theta_n] \cap \Omega_\delta$, $B_2 = (4/\theta_n, \infty) \cap \Omega_\delta$. Из (6) и (7) имеем

$$(14) \quad I_1 \leq c(\alpha, \lambda) \frac{\delta}{m+1} \sum_{t \in B_1} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{j=0}^k \theta_j^\alpha \leq c(\alpha, \lambda) \frac{\theta_{n+m}^{\alpha+2}}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

Для оценки I_2 воспользуемся равенством

$$(15) \quad \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} K_{k,N}^\alpha(x, t) = \frac{n+m+1}{m+1} \mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t) - \frac{n}{m+1} \mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, t).$$

Тогда

$$I_2 \leq c(b, \alpha)\delta \sum_{t \in B_2} (t + \delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} (|\mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t)| + |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, t)|) = I_{21} + I_{22}.$$

Величины I_{21} и I_{22} оцениваются по одной и той же схеме, поэтому ограничимся оценкой I_{21} . Пусть $B_3 = (4/\theta_n, \theta_{n+m+1}/2) \cap \Omega_\delta$. Тогда

$$I_{21} = c(b, \alpha)\delta \left(\sum_{t \in B_3} + \sum_{t \in B_2 \setminus B_3} \right) (t + \delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t)| = I_{21}^1 + I_{21}^2.$$

Из лемм 4 и 5 получаем:

$$I_{21}^1 \leq c(b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha} A_{n+m+1}^\alpha(x) \delta \sum_{t \in B_3} \frac{t^\alpha A_{n+m+1}^\alpha(t)}{\max(x, t)} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in B_3} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{5}{4}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda),$$

$$I_{21}^2 \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha-1} A_{n+m+1}^\alpha(x) \delta \sum_{t \in B_2 \setminus B_3} t^\alpha A_{n+m+1}^\alpha(t) \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{-\frac{5}{4}} \left(n^\alpha n^{\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3n}{4}} \right) \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\alpha - \frac{1}{2}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

Из (13), (14) и оценок для I_{21}^1 , I_{21}^2 выводим

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(a, b, \alpha, \lambda), \quad x \in \left[0, \frac{2}{\theta_n}\right].$$

Пусть теперь $x \in [2/\theta_n, \theta_{n+m+1}/2]$. Пользуясь равенством (15), мы можем записать

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(b)\delta \sum_{t \in \Omega_\delta} (t+\delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} (|\mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t)| + |\mathcal{K}_{n,N}^\alpha(x, t)|) = J_1 + J_2.$$

Для оценки величины J_1 введем обозначения: $D_1 = [0, x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}] \cap \Omega_\delta$, $D_2 = (x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, x + \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}) \cap \Omega_\delta$, $D_3 = (x + \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, 3\theta_{n+m+1}/4] \cap \Omega_\delta$, $D_4 = (3\theta_{n+m+1}/4, \infty) \cap \Omega_\delta$. С учетом этих обозначений запишем J_1 в следующем виде

$$(16) \quad J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13} + J_{14},$$

в котором

$$J_{1i} = c(b)\delta \sum_{t \in D_i} (t+\delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t)|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Оценим J_{11} . Пусть $D_1^1 = [0, 1/\theta_n] \cap \Omega_\delta$, $D_1^2 = (1/\theta_n, x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}] \cap \Omega_\delta$. Тогда из лемм 5 и 6 получим

$$\begin{aligned} J_{11} &\leq c(b, \alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in D_1^1} (t+\delta)^\alpha \frac{\theta_{n+m+1}^{-\alpha}}{\max(x, t)} A_{n+m+1}^\alpha(x) A_{n+m+1}^\alpha(t) + \\ &c(b, \alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in D_1^2} (t+\delta)^\alpha \frac{(xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+t)}{\sqrt{n+m+1}(x-t)^2} \leq c(b, \alpha, \lambda)\theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} \delta \sum_{t \in D_1^1} (t+\delta)^\alpha + \\ &c(b, \alpha, \lambda) \frac{x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}{\sqrt{n+m+1}} \delta \sum_{t \in D_1^2} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(x-t)^2} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) + \\ (17) \quad &\frac{c(b, \alpha, \lambda)x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+m+1}} \frac{\delta}{x} \left(\sum_{\frac{1}{x\theta_n} \leq y \leq \frac{1}{3}} + \sum_{\frac{1}{3} \leq y \leq 1 - \sqrt{\frac{1}{x\theta_{n+m+1}}}} \right) \frac{y^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(1-y)^2} \leq c(a, b, \alpha, \lambda). \end{aligned}$$

Для оценки J_{12} применим к $K_{k,N}^\alpha(x, t)$ неравенство Коши–Буняковского и воспользуемся леммой 2:

$$\begin{aligned} J_{12} &\leq \frac{c(a, b)}{n+m+1} \delta \sum_{t \in D_2} (t+\delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} K_{0,N}^\alpha(x, t) + \\ &\frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{n+m+1} \delta \sum_{t \in D_2} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=1}^{n+m} k^{1-\alpha} \theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \leq \\ (18) \quad &\frac{c(a, b, \alpha)x^\alpha}{n+m+1} \sqrt{\frac{x}{\theta_{n+m+1}}} + c(a, b, \alpha, \lambda)(n+m)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{\theta_{n+m+1}}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda). \end{aligned}$$

Чтобы оценить величину J_{13} , введем обозначения: $D_3^1 = (x + \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, 3x/2] \cap \Omega_\delta$, $D_3^2 = (3x/2, 3\theta_{n+m+1}/4] \cap \Omega_\delta$. Заметим, что $t - x \geq \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}$ при $x \in [2/\theta_n, \theta_{n+m+1}/2]$ и $t \in D_3$. Тогда из леммы 6 получим

$$(19) \quad \begin{aligned} J_{13} &\leq \frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{\sqrt{n+m+1}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_3} \frac{(t+\delta)^\alpha (x+t) t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(x-t)^2} \leq \\ &\frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{\sqrt{n+m+1}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_3} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}{(x-t)^2} \leq \frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{\sqrt{n+m+1}} \sqrt{x} \delta \sum_{t \in D_3^1} \frac{1}{(t-x)^2} + \\ &\frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{\sqrt{n+m+1}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_3^2} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к оценке J_{14} . Пусть $D_4^1 = (3\theta_{n+m+1}/4, 3\theta_{n+m+1}/2] \cap \Omega_\delta$, $D_4^2 = (3\theta_{n+m+1}/2, \infty) \cap \Omega_\delta$. Тогда из леммы 4 и равенства (8) имеем

$$(20) \quad \begin{aligned} J_{14} &\leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-(\alpha+1)} A_{n+m+1}^\alpha(x) \delta \sum_{t \in D_4} (t+\delta)^\alpha A_{n+m+1}^\alpha(y) \leq \\ &c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \theta_{n+m+1}^{\alpha-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_4^1} \frac{1}{(\theta_{n+m+1}^{\frac{1}{3}} + |t - \theta_{n+m+1}|)^{\frac{1}{4}}} + \\ &c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \delta \sum_{t \in D_4^2} t^\alpha e^{-\frac{t}{4}} \leq \\ &c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left(\theta_{n+m+1}^{\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3n}{4}} \right) \leq c(a, b, \alpha, \lambda). \end{aligned}$$

Из (16)–(20) получаем следующую оценку

$$J_1 \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

А поскольку для J_2 справедлива аналогичная оценка, то

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(a, b, \alpha, \lambda), \quad x \in \left[\frac{2}{\theta_n}, \frac{\theta_{n+m+1}}{2} \right].$$

Рассмотрим случай, когда $x \in (\theta_n/2, 3\theta_{n+m+1}/2]$. Величину J_1 запишем в виде

$$(21) \quad J_1 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5,$$

в котором

$$H_i = c(a, b) \delta \sum_{G_i} (t+\delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_{n+m+1,N}^\alpha(x, t)|, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$G_1 = [0, x - \theta_{n+m+1}/4] \cap \Omega_\delta$, $G_2 = (x - \theta_{n+m+1}/4, x - 1) \cap \Omega_\delta$, $G_3 = [x - 1, x + 1] \cap \Omega_\delta$, $G_4 = (x + 1, x + \theta_{n+m+1}/4) \cap \Omega_\delta$, $G_5 = [x + \theta_{n+m+1}/4, \infty) \cap \Omega_\delta$. Для величины H_3 справедлива оценка (18). Чтобы оценить величины H_1 и H_5 , воспользуемся леммой 4 и равенством (8):

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \frac{c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{5}{4}}}{(\theta_{n+m+1}^{\frac{1}{3}} + |x - \theta_{n+m+1}|)^{\frac{1}{4}}} \delta \sum_{t \in G_1} (t+\delta)^\alpha A_{n+m+1}^\alpha(t) \leq \\ &c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{\theta_{n+m+1}} + \theta_{n+m+1}^{\alpha+\frac{1}{2}} \right) \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\frac{5}{6}}, \end{aligned}$$

$$H_5 \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \delta \sum_{t \in G_5} (t + \delta)^\alpha A_{n+m+1}^\alpha(t) \leq$$

$$c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \left(\theta_{n+m+1}^{\alpha-\frac{1}{4}} \theta_{n+m+1}^{\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3n}{4}} \right) \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \theta_{n+m+1}^{-\frac{5}{6}}.$$

С помощью леммы 7 оценим величины H_2 и H_4 :

$$H_2 \leq \frac{c(a, b, \alpha, \lambda)}{\theta_{n+m+1}^\alpha} \delta \sum_{t \in G_2} \frac{(t + \delta)^\alpha}{(x - t)^{\frac{3}{2}}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in G_2} (x - t)^{-\frac{3}{2}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda),$$

$$H_4 \leq c(a, b, \alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in G_4} (t - x)^{-\frac{3}{2}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

Из оценок для H_i и равенства (21) имеем

$$J_1 \leq c(a, b, \alpha, \lambda).$$

Следовательно,

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(a, b, \alpha, \lambda), \quad x \in \left(\frac{\theta_{n+m+1}}{2}, \frac{3\theta_{n+m+1}}{2} \right].$$

Пусть $x \in (3\theta_{n+m+1}/2, \infty)$. В силу неравенства Коши–Буняковского мы можем записать

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq \frac{1}{m+1} \delta \sum_{t \in \Omega_\delta} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} (e^{-x} K_{k,N}^\alpha(x, x))^{\frac{1}{2}} (e^{-t} K_{k,N}^\alpha(t, t))^{\frac{1}{2}}.$$

Из леммы 2 получим

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(\alpha, \lambda) \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{m+1} \delta \sum_{t \in \Omega_\delta} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} (e^{-t} K_{k,N}^\alpha(t, t))^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $E_1 = [0, 1/\theta_n] \cap \Omega_\delta$, $E_2 = (1/\theta_n, \theta_{n+m}/2] \cap \Omega_\delta$, $E_3 = (\theta_{n+m}/2, 3\theta_{n+m}/2] \cap \Omega_\delta$, $E_4 = (3\theta_{n+m}/2, \infty) \cap \Omega_\delta$. Тогда

$$(22) \quad \Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(\alpha, \lambda) \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{m+1} (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4),$$

где

$$\mathcal{H}_1 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in E_1} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} \theta_k^\alpha \leq c(\alpha, \lambda) \frac{(n+m)^2}{\theta_n^{\alpha+1}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{1-\alpha},$$

$$\mathcal{H}_2 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in E_2} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} \theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \leq$$

$$c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{7}{4}-\frac{\alpha}{2}} \delta \sum_{t \in E_2} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{5}{2}},$$

$$\mathcal{H}_3 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in E_3} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} k^{-\frac{\alpha}{2}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{5}{2}},$$

$$\mathcal{H}_4 \leq c(\alpha, \lambda) \delta \sum_{t \in E_4} (t + \delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} e^{-\frac{t}{4}} \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{2-\alpha} e^{-\frac{3n}{4}}.$$

Из (22) и оценок для $\mathcal{H}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) находим

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \leq c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x}{4}}, \quad x \in \left(\frac{3\theta_{n+m+1}}{2}, \infty \right).$$

Тем самым доказана справедливость оценки (12).

REFERENCES

- [1] R.M. Gadzhimirzaev, *Approximative properties of Fourier–Meizner sums*, Problemy Analiza – Issues of Analysis, (2018) 7(25):1, 23–40.
- [2] R.M. Gadzhimirzaev, *Estimate of the Lebesgue function of Fourier sums in terms of modified Meizner polynomials*, Math. Notes, (2019) 106:4, 526–536.
- [3] I.I. Sharapudinov, I.A. Vagabov, *Convergence of the Vallée Poussin means for Fourier–Jacobi sums*, Math. Notes, (1996) 60:4, 425–437.
- [4] I.I. Sharapudinov, *Boundedness in $C[-1, 1]$ of the de la Vallée Poussin means for discrete Chebyshev–Fourier sums*, Sbornik: Mathematics, (1996) 187:1, 141–158.
- [5] F.M. Korkmasov, *Approximate properties of the de la Vallée Poussin means for the discrete Fourier–Jacobi sums*, Siberian Math. J., (2004) 45:2, 273–293.
- [6] G. Mastroianni, W. Themistoclakis, *De la Vallée Poussin means and Jackson’s theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), (2008) 74:1-2, 147–170.
- [7] W. Themistoclakis, *Weighted L^1 approximation on $[-1, 1]$ via discrete de la Vallée Poussin means*, Math. Comput. Simulation, (2017) 147, 279–292.
- [8] I.I. Sharapudinov, *Polynomials orthogonal on the grid. Theory and Applications*, Makhachkala: DSU publishing, 1997.
- [9] I.I. Sharapudinov, *Asymptotics and weighted estimates of Meizner polynomials orthogonal on the grid $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$* , Math. Notes (1997) 62:501, 501–512.
- [10] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York, 1972.
- [11] R.M. Gadzhimirzaev, *Approximation properties of Vallée Poussin means of partial sums of the Fourier series in the Meizner–Sobolev polynomials*, Sbornik: Mathematics, (2024).

RAMIS MAKHMUDOVICH GADZHIMIRZAEV
 DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
 DAGESTAN FEDERAL RESEARCH CENTER OF RAS,
 ST. M. GADZHIEVA, 45,
 367032, MAKHACHKALA, RUSSIA
 Email address: ramis3004@gmail.com