S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.98
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 76A10, 35D35, 39B42, 35P05

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В.И. ВОЙТИЦКИЙ AND Д.О. ЦВЕТКОВ

Abstract: We consider a linear initial-boundary-value problem generated by the problem of small motions of a spital pendulum (around a spherical hinge) with a cavity entirely filled with a viscoelastic fluid. Using theory of operators acting in Hilbert space we formulated the problem as a Cauchy problem for differential-operator equation of first order, prove theorem on strong solvability of the problem. We study also the corresponding spectrum problem. Using theory of operators acting in spaces with indefinite metrics we study localization and structure of spectrum, determine limit points of eigenvalues.

Keywords: viscoelastic fluid, boundary value problem, operator-differential equation in Hilbert space, spectral problem, discrete and essential spectrum.

1 Введение

Проблемы движения систем твердых тел, содержащих полости с жидкостью, не теряют свою актуальность, несмотря на долгую историю (библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1, 2, 3]). Одним из наиболее распространенных приложений данной проблемы является необходимость учета влияния жидкого топлива на движение ракетно-космических систем. Возмущения движения твердого тела с жидким

Voytitsky, V.I., Tsvetkov, D.O., On small motions and normal oscillations of a pendulum with cavity completely filled with a viscoelastic fluid.

наполнением вызваны другими возможными типами нормальных движений системы, порожденными трением между слоями жидкости, наличием свободной поверхности, взаимодействием между жидкостью и стенками контейнера.

К настоящему времени разработаны различные аналитические и численные подходы к изучению таких систем (см., например, [4, 5, 6]). Также исследования многих гидромеханических систем (начиная с работ Н. Н. Моисеева и С. Г. Крейна) проводятся методами функционального анализа, с помощью которых удается установить ряд общих и тонких результатов для различных классов задач математической физики. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в монографиях [7, 8].

В данной работе рассматривается новая задача, когда физический маятник с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью (жидкостью с памятью), совершает пространственные колебания около сферического шарнира. Заметим, что одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию колебаний вязкоупругой жидкости, являются работы А. И. Милославского [9, 10]. В них для обобщенной модели Олдройта применен подход, развивающий построения, проведенные ранее С.Г. Крейном и его учениками [11, 12, 8] применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Дальнейшее развитие данной модели отражено в работах [13, 14], обобщение которых, выраженное в усложнении итогового операторного уравнения и соответствующей спектральной задачи, нашло свое отражение в данном исследовании.

Изложим кратко содержание работы. После введения приведена математическая формулировка задачи. Далее, путем проектирования части уравнений полученной начально-краевой задачи на специальные функциональные подпространства осуществлен переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{C}\,\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0, \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{C}$ является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным оператором, а оператор $-\mathcal{A}$ — максимальный диссипативный оператор. Применение теории сжимающих полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, позволило доказать теорему о сильной разрешимости (по времени) полученной задачи Коши и, тем самым, исходной задачи (теорема 1). Далее рассматриваются нормальные движения гидромеханической системы, т.е. решения однородного уравнения (1), зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. При изучении соответствующей спектральной задачи установлено, что $\lambda = 0$ является однократным собственным значением, отвечающим переходу в новое состояние покоя путем поворота маятника на произвольный угол вокруг вертикальной оси.

Дальнейшее исследование построено на изучении нормальных движений, отличных от состояния покоя. Здесь возникает спектральная проблема для двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, которая сводится к задаче на собственные значения для $\mathcal{J}$-сопряженного ограниченного оператора $\mathcal{B}$. Это позволяет выяснить структуру спектра изучаемой задачи. А именно, доказано, что дискретный спектр задачи состоит из не более чем конечного числа комплексно сопряженных пар невещественных собственных значений в открытой правой комплексной полуплоскости и $q+1$ ветви положительных конечнократных изолированных собственных значений с предельными точками $+\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{q}$, где $\gamma_k > 0$ определяются через коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости (теорема 2).

2 Основные уравнения, краевые и начальные условия

Пусть в пространстве расположен физический маятник, состоящий из твердого тела Ω_0 (плотности ρ_0) с внутренней полостью Ω_1, целиком заполненной несжимаемой вязкоупругой жидкостью (плотности ρ_1) модели Олдройта (см., например, [8, глава 11]). Маятник закреплен в неподвижной точке O. Жидкость в полости Ω_1 касается твердого тела вдоль твердой стенки S_1, которую считаем достаточно гладкой, например, дважды непрерывно дифференцируемой, т.е. $S_1 = \partial\Omega_1 \in C^2$.

Будем предполагать, что на данную систему действует однородное гравитационное поле постоянной интенсивности. Тогда в состоянии покоя точка подвеса O и центр масс маятника находятся на одной вертикальной оси, параллельной действию силы тяжести.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях данной гидромеханической системы, близких к состоянию равновесия. Для этого введем неподвижную систему координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ с ортами $\vec{e}_1^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_1^{\,3}$, $g>0$. Кроме того, введем подвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$, жестко связанную с телом Ω_0, с единичными векторами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$. В состоянии покоя подвижная система координат совпадает с неподвижной системой.

Положение подвижной системы координат относительно неподвижной системы в процессе малых движений маятника будет задаваться малым вектором углового перемещения $\vec{\delta}(t) = \sum_{j=1}^{3}\delta^j(t)\vec{e}^{\,j}$. Тогда угловая скорость $\vec{\omega}(t)$ системы будет равна $\vec{\omega} = d\vec{\delta}/dt$, а угловое ускорение равно $d^2\vec{\delta}/dt^2 = d\vec{\omega}/dt$.

Уравнение изменения кинетического момента системы относительно точки O после линеаризации (см. [2], [8, часть 7]) приводит к соотношению

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\, d\Omega_1 + \alpha\vec{\omega} + gmlP_2\vec{\delta} = \vec{M}(t), \tag{2}$$

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} := \int_G \vec{r} \times \Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\Big)\, dm, \quad P_2\vec{\delta} := \sum_{j=1}^{2} \delta^j \vec{e}^{\,j}, \quad \vec{M}(t) := \int_G \vec{r} \times \vec{f}\, dm,$$

$$\int_G (\ldots)\, dm := \rho_0 \int_{\Omega_0} (\ldots)\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\ldots)\, d\Omega_1.$$

Здесь $G = \Omega_0 \cup \Omega_1$ — область, занятая твердым телом с жидкостью; $J\vec{\omega}$ — центральный момент инерции маятника с жидкостью G; $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный от точки подвеса O к точке тела; $\vec{u}(t,x)$ — поле относительной скорости жидкости в области Ω_1; центр масс системы «тело+жидкость» расположен в точке $C \neq O$, $|\overrightarrow{OC}| = l$; $\vec{f}$ — малое поле внешних сил, действующее на данную систему; m — масса системы; $\alpha\vec{\omega}$ — момент сил трения в шарнире. Далее задача будет изучаться в предположении $\alpha > 0$ (учитывается, что трение в шарнире пропорционально угловой скорости).

Малые движения жидкости в полости описываются линеаризованным уравнением Навье-Стокса, которое в модели Олдройта содержит дополнительные интегральные слагаемые (см. [8, глава 7, 11])

$$\rho_1\Big(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\Big) = -\nabla p + \mu\Delta\vec{v} + \rho_1\vec{f}_1, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega_1), \tag{3}$$

$$\vec{v}(t,x) = \vec{u}(t,x) + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}(s,x)\, ds =: I_0(t)\vec{u}(t,x).$$

Здесь μ — коэффициент динамической вязкости вязкоупругой жидкости; $\vec{f}_1 = \vec{f}|_{\Omega_1}$; $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,q}$, $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_q$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщенной модели Олдройта; Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Также считаем заданными краевое и начальные условия:

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{w}(0) = \vec{w}^0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \tag{4}$$

а также дополнительные очевидные соотношения:

$$\frac{d(P_2\vec{\delta})}{dt} = P_2\vec{\omega}, \quad \frac{d(P_3\vec{\delta})}{dt} = P_3\vec{\omega}, \quad P_3 := I - P_2. \tag{5}$$

3 Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве

Начально-краевую задачу (2) — (5) приведем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. С этой целью для области Ω_1 воспользуемся известным разложением пространства векторных полей

$\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [7, с.118]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \tag{6}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1) \mid \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } S_1)\},$$

$$\vec{G}(\Omega_1) := \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_1) \mid \vec{v} = \nabla p\}.$$

Здесь $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к S_1, операции $\operatorname{div}\vec{u}$ и $\vec{u}\cdot\vec{n}$ понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Введем также функциональное пространство

$$\vec{J}_0^1(\Omega_1) := \Big\{ \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \, (\text{в } \Omega_1),\, \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } S_1)\Big\},$$

$$\int_{\Omega_1} |\operatorname{rot} \vec{u}|^2 \, d\Omega_1 =: \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega_1)} < \infty. \tag{7}$$

Как показано в [15] (см. также [7, с. 130]), норма (7) эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$.

Пусть P_0 и P_G — ортопроекторы из $\vec{L}_2(\Omega_1)$ на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{G}(\Omega_1)$ соответственно. Тогда, действуя на обе части уравнения (3) этими проекторами, получим соотношения

$$\rho_1 P_G\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\Big) = -\nabla p + \mu I_0(t) P_G \Delta \vec{u} + \rho_1 P_G \vec{f}_1, \tag{8}$$

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_1 P_0\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\Big) = -\mu I_0(t)(-P_0 \Delta \vec{u}) + \rho_1 P_0 \vec{f}_1. \tag{9}$$

Введем оператор Стокса A, действующий по закону

$$A\vec{u} := -P_0 \Delta \vec{u}, \quad \mathcal{D}(A) := \Big\{ \vec{u} \in \vec{H}^2(\Omega) : \ \operatorname{div}\ \vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \\ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S_1)\Big\} \subset \vec{J}_0^1(\Omega_1) \subset \vec{J}_0(\Omega_1). \tag{10}$$

Лемма 1. *Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}_0(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром. Его собственные значения $\lambda_k(A)$ конечнократны, $\lambda_k(A) \to +\infty$ $(k \to \infty)$ и*

$$\lambda_k(A) = c_A k^{2/3}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{11}$$

Обратный оператор A^{-1} является компактным и положительным.

Доказательство. Вывод этих свойств можно найти, например, в монографии [15]. Асимптотическая формула (11) установлена в работе [16]. Заметим еще, что при доказательстве свойства самосопряженности оператора A на $\mathcal{D}(A)$ из (10) существенно использовано свойство гладкости границы S_1. □

Замечание 1. *Отметим, что если задача (2), (4), (5), (9) решена и ее решение $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$, тогда $\Delta\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1)$ и $P_G \Delta \vec{u} \in \vec{G}(\Omega_1)$. В этом случае* *из* (8) *по известным* $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ *и* $\vec{f}_1$ *можно найти* $\nabla p \in \vec{G}(\Omega_1)$. *Таким образом, далее достаточно ограничиться рассмотрением задачи* (2), (4), (5), (9).

Цель дальнейших построений состоит в переходе от задачи (2), (4), (5), (9) к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Всюду далее будет использовано обозначение

$$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty).$$

Определение 1. *Назовем набор функций* $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$ *назовем сильным решением задачи* (2), (4), (5), (9), *если выполнены следующие условия:*

1) $\vec{u}(t,x) \in \mathcal{D}(A)$ *при каждом* $t \in \mathbb{R}_+$; $Au(t) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega_1))$;

2) $\vec{u}(t,x) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega_1))$, $\nabla p(t,x) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_1))$, $\vec{\omega}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^3)$, $\vec{\delta}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^3)$;

3) *выполнены уравнения* (2) *и* (9), *где все слагаемые являются элементами* $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^3)$ *и* $C(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega_1))$ *соответственно;*

4) *выполнены начальные условия* (4) *и соотношения* (5).

Будем считать, что задача (2), (4), (5), (9) имеет сильное решение. Введем новые искомые функции $\vec{v}_k(t)$, $k = \overline{1,q}$, согласно формулам

$$\vec{v}_k(t) := \mu^{1/2} \alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k (t-s)} A^{1/2} \vec{u}(s) ds, \quad k = \overline{1,q}, \tag{12}$$

тогда

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \mu^{1/2} \alpha_k^{1/2} A^{1/2} \vec{u}(t) - \beta_k \vec{v}_k(t), \quad k = \overline{1,q}.$$

Отметим также, что уравнение (9) в этом случае примет вид:

$$\rho_1 \frac{d\vec{u}}{dt} + \rho_1 P_0 \Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \Big) + \mu A \vec{u} + \mu^{1/2} \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{1/2} A^{1/2} \vec{v}_k = \rho_1 P_0 \vec{f}_1.$$

С учетом сказанного, перепишем систему уравнений (2), (5), (9) в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\rho_1 \frac{d\vec{u}}{dt} + \rho_1 P_0 \Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \Big) + \mu A \vec{u} + \mu^{1/2} \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{1/2} A^{1/2} \vec{v}_k = \rho_1 P_0 \vec{f}_1,$$

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt}\, d\Omega_1 + \alpha \vec{\omega} + (gml)^{1/2} \cdot (gml)^{1/2} P_2 \vec{\delta} = \vec{M}(t), \tag{13}$$

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \mu^{1/2} \alpha_k^{1/2} A^{1/2} \vec{u} + \beta_k \vec{v}_k = \vec{0}, \quad \frac{d}{dt}\Big((gml)^{1/2} P_2 \vec{\delta} \Big) - (gml)^{1/2} P_2 \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Введем обозначения:

$$\vec{\eta} := \beta P_2 \vec{\delta}, \quad \beta := (gml)^{1/2}, \quad \widehat{v} := (\vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_q)^{\tau},$$

$$C_{11} \vec{u} = \rho_1 I_0 \vec{u}, \ C_{12} \vec{\omega} = \rho_1 P_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}), \ C_{21} \vec{u} = \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1, \ C_{22} \vec{\omega} = J \vec{\omega},$$

$$A_{11}=\mu A,\quad A_{12}=\mu^{1/2}(\alpha_1^{1/2}A^{1/2};\dots;\alpha_q^{1/2}A^{1/2}),\quad A_{21}=-A_{12}^*,$$
$$A_{22}=\mathrm{diag}(\beta_1;\beta_2;\dots;\beta_q),$$

где I_0 и $\widehat{I}$ — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\widehat{H}=\bigoplus_{k=1}^q H_k$, $H_k=\vec{J}_0(\Omega_1)$ соответственно. Тогда система (13) может быть записана в виде двух матричных уравнений:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11} & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{12} & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{v}\\ \vec{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_1P_0\vec{f}_1\\ \vec{M}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \widehat{I} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widehat{v}\\ \vec{\eta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{21} & 0\\ 0 & -\beta P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{22} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{v}\\ \vec{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{pmatrix};$$

которые, в свою очередь, с учетом начальных условий, перепишем в виде одного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{C}\frac{dy}{dt}+\mathcal{A}y=\mathcal{F},\quad y(0)=y^0. \tag{14}$$

Здесь и далее введены обозначения

$$\mathcal{H}_1=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3,\quad \mathcal{H}_2=\widehat{H}\oplus\mathbb{C}^2,\quad \mathcal{F}=(\vec{\xi};0)^\tau,\quad \vec{\xi}=(\rho_1P_0\vec{f}_1;\vec{M})^\tau,$$
$$y=(y_1;y_2)^\tau,\quad y_1=(\vec{u};\vec{\omega})^\tau,\quad y_2=(\widehat{v};\vec{\eta})^\tau,$$
$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix} C_{\mathcal{H}_1} & 0\\ 0 & I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix},\quad C_{\mathcal{H}_1}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix},\quad I_{\mathcal{H}_2}=\begin{pmatrix} \widehat{I} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{15}$$
$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12}\\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22}\end{pmatrix},\quad \widehat{A}_{11}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}, \tag{16}$$
$$\widehat{A}_{12}=\begin{pmatrix} A_{12} & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix},\quad \widehat{A}_{21}=\begin{pmatrix} A_{21} & 0\\ 0 & -\beta P_2\end{pmatrix},\quad \widehat{A}_{22}=\begin{pmatrix} A_{22} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (2) – (5) распадается на уравнение (8), тривиальную связь $d(P^3\vec{\delta})/dt=P^3\vec{\omega}$ и задачу Коши (14) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Для оператора $\mathcal{A}$, как можно проверить, справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0\\ 0 & I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & Q^*\\ -Q & \widehat{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0\\ 0 & I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix}, \tag{17}$$
$$Q:=\widehat{A}_{12}^*\widehat{A}_{11}^{-1/2}=\begin{pmatrix} A_{12}^*A_{11}^{-1/2} & 0\\ 0 & \beta\alpha^{-1/2}\end{pmatrix},\quad A_{12}^*A_{11}^{-1/2}=(\alpha_1^{1/2},\dots,\alpha_q^{1/2})^\tau,$$
$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0\\ -Q\widehat{A}_{11}^{-1/2} & I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0\\ 0 & \widehat{A}_{22}+QQ^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \widehat{A}_{11}^{-1/2}Q^*\\ 0 & I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix}, \tag{18}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\mathcal{D}(A)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2})\oplus\mathbb{C}^2,\quad \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}):=\bigoplus_{k=1}^q\mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{19}$$

Лемма 2. *Оператор $\mathcal{A}$ плотно определен, замкнут, непрерывно обратим, т.е. существует $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и справедливо представление*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2}(I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M \widetilde{Q})\widehat{A}_{11}^{-1/2} & -\widehat{A}_{11}^{-1/2}\widetilde{Q}^* M \widehat{A}_{22}^{-1/2} \\ \widehat{A}_{22}^{-1/2} M \widetilde{Q} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & \widehat{A}_{22}^{-1/2} M \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\widetilde{Q} := \widehat{A}_{22}^{-1/2} \widehat{A}_{12}^{*} \widehat{A}_{11}^{-1/2}, \quad M := (I_{\mathcal{H}_2} + \widetilde{Q}\widetilde{Q}^*)^{-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим, и выведем формулу (20). Отсюда будет следовать, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (19)). Плотная определенность оператора $\mathcal{A}$ последует из включения $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Применим факторизацию (17) к оператору $\mathcal{A}$, в результате получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & Q^* \\ -Q & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \widetilde{Q}^* \\ -\widetilde{Q} & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M \widetilde{Q} & -\widetilde{Q}^* M \\ M\widetilde{Q} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{-1/2}(I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M \widetilde{Q})\widehat{A}_{11}^{-1/2} & -\widehat{A}_{11}^{-1/2}\widetilde{Q}^* M \widehat{A}_{22}^{-1/2} \\ \widehat{A}_{22}^{-1/2} M \widetilde{Q} \widehat{A}_{11}^{-1/2} & \widehat{A}_{22}^{-1/2} M \widehat{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{Q} := \widehat{A}_{22}^{-1/2} \widehat{A}_{12}^{*} \widehat{A}_{11}^{-1/2}$, $M := (I_{\mathcal{H}_2} + \widetilde{Q}\widetilde{Q}^*)^{-1}$. Таким образом, представление (20) доказано.

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & -Q^* \\ Q & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Как и для оператора $\mathcal{A}$, доказывается, что существует $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Лемма 3. *Оператор $(-\mathcal{A})$ — максимальный диссипативный оператор.*

Доказательство. Докажем, что $(-\mathcal{A})$ — диссипативный оператор. С учетом (17) для $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (19)) имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(-\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} &= -\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & Q^* \\ -Q & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \\
&= -\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \\
&= -\left((A_{11}\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + (A_{22}\widehat{v}, \widehat{v})_{\widehat{H}} + \alpha|\vec{\omega}|^2\right) \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Действительно, по условию $\alpha > 0$, а операторы A_{11} и A_{22} (согласно их определениям) являются положительно определенными в $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\widehat{H}$ соответственно.

По лемме 2 оператор $\mathcal{A}$ плотно определен и замкнут. Для того, чтобы замкнутый диссипативный оператор $-\mathcal{A}$ был максимальным диссипативным, достаточно показать, что положительные числа попадают в его резольвентное множество: $\{\lambda > 0\} \subset \rho(-\mathcal{A})$.

Пусть $\lambda > 0$, положим $y = (y_1; y_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}$, тогда уравнение $(-\mathcal{A} - \lambda I)y = z$, учитывая представление (17), можно переписать в векторно-матричной форме:

$$-\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} + \lambda \widehat{A}_{11}^{-1} & Q^* \\ -Q & \widehat{A}_{22} + \lambda I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что оператор $-\mathcal{A} - \lambda I$ будет иметь ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, если средний блок будет непрерывно обратим.

Действительно, несложно проверить, что следующий оператор положительно определен:

$$V := I_{\mathcal{H}_1} + \lambda \widehat{A}_{11}^{-1} + Q^*(\widehat{A}_{22} + \lambda I_{\mathcal{H}_2})^{-1} Q \gg 0,$$

где

$$Q^*(\widehat{A}_{22} + \lambda I_{\mathcal{H}_2})^{-1} Q = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} (\beta_k + \lambda)^{-1} \alpha_k & 0 \\ 0 & (\lambda\alpha)^{-1}\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $V^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} + \lambda \widehat{A}_{11}^{-1} & Q^* \\ -Q & \widehat{A}_{22} + \lambda I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}Q^*X \\ XQV^{-1} & X - XQV^{-1}Q^*X \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

где $X := (\widehat{A}_{22} + \lambda I_{\mathcal{H}_2})^{-1}$. □

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{C}$ из (15) является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. I этап. Покажем, что $\mathcal{C}$ является ограниченным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$. Для этого достаточно установить ограниченность оператора $C_{\mathcal{H}_1}$ в пространстве $\mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2$:

$$\|C_{\mathcal{H}_1} y_1\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\rho_1 \vec{u} + \rho_1(\vec{\omega} \times \vec{r})\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} +$$

$$+ \|\rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1 + \rho_0 \int_{\Omega_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_1\|^2_{\mathbb{C}^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \left| \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1 \right|^2 +$$

$$+ 2\rho_0^2 \left| \int_{\Omega_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_0 \right|^2 + 2\rho_1^2 \left| \int_{\Omega_1} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_1 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \, \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right) \left(\int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 d\Omega_1 \right) +$$

$$+ |\vec{\omega}|^2 \cdot \left(2\rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 + 2\rho_0^2 \left(\int_{\Omega_0} |\vec{r}|^2 d\Omega_0 \right)^2 + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \left(1 + (\max\nolimits_{\Omega_1} |\vec{r}|)^2\right) \cdot \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} +$$

$$+ |\vec{\omega}|^2 \cdot \left(2\rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 + 2\rho_0^2 \left(\int_{\Omega_0} |\vec{r}|^2 d\Omega_0 \right)^2 + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right)^2 \right) =$$

$$= c_1 \cdot \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + c_2 \cdot |\vec{\omega}|^2 \leqslant K \cdot \|y_1\|^2_{\mathcal{H}_1}, \quad K := \max(c_1, 1, c_2).$$

II этап. Докажем, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$. Для этого достаточно установить самосопряженность $C_{\mathcal{H}_1}$ в пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$(C_{\mathcal{H}_1} x_1, x_2)_{\mathcal{H}_1} := \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} =$$

$$= \rho_1 (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \cdot \overline{\vec{u}_2}\, d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u}_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_2}\, d\Omega_1 +$$

$$+ \rho_0 \int_{\Omega_0} (\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \overline{\vec{\omega}_2}\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \overline{\vec{\omega}_2}\, d\Omega_1 =$$

$$= \rho_1 (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{\omega}_1 \cdot \overline{(\vec{r} \times \vec{u}_2)}\, d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot \overline{(\vec{\omega}_2 \times \vec{r})}\, d\Omega_1 +$$

$$+ \rho_0 \int_{\Omega_0} \vec{\omega}_1 \cdot \overline{(\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}))}\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{\omega}_1 \cdot \overline{(\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}))}\, d\Omega_1 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = (x_1, C_{\mathcal{H}_1} x_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

III этап. Покажем, что $\mathcal{C}$ является положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $y = (\vec{u}; \vec{\omega}; \widehat{v}; \vec{\eta})^\tau$ — произвольный элемент из $\mathcal{H}$, тогда

$$(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} P_0(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \overline{\vec{u}}\, d\Omega_1 +$$

$$+ \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u}) \cdot \overline{\vec{\omega}}\, d\Omega_1 + J\, |\vec{\omega}|^2 + \|\widehat{v}\|^2_{\widehat{H}} + |\vec{\eta}|^2.$$

Известно (см., например, [7, с.173]), что тензор моментов инерции гидромеханической системы «тело + жидкость» допускает представление

$$J = J_b + J_l, \quad J_l\, |\vec{\omega}|^2 = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2\, d\Omega_1,$$

где $J_b > 0$ — момент инерции твердого тела, а J_l – приведенный момент инерции, учитывающий движение жидкости в полости Ω_1.

Подставляя эту связь в последнее равенство, получим

$$(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}|^2 \, d\Omega_1 + \|\widehat{v}\|^2_{\widehat{H}} + |\vec{\eta}|^2 + J_b|\vec{\omega}|^2 \geqslant 0,$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{C}$ является неотрицательным.

Пусть $(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = 0$, тогда $\widehat{v} = 0$, $\vec{\eta} = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{u} = \vec{0}$. Таким образом, оператор $\mathcal{C}$ положителен в $\mathcal{H}$. Наконец, из структуры (15) оператора следует, что он допускает представление

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_1 = \operatorname{diag}(\rho_1 I_0; J; \widehat{I}; 1) \gg 0, \tag{23}$$

где оператор $\mathcal{C}_2$ с ненулевыми элементами C_{12} и C_{21} является двумерным оператором. Отсюда следует, что $\mathcal{C}$ является не только положительным, но и положительно определенным оператором, заданным на всем $\mathcal{H}$. □

4 Теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи

Предварительно дадим следующие определение.

Определение 2. *Сильным решением задачи Коши* (14) *назовем функцию $y(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ такую, что $\mathcal{A}y(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальное условие и уравнение из* (14) *для любого $t \in \mathbb{R}_+$.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A),\ \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}^3,\ S_1 = \partial\Omega_1 \subset C^2, \tag{24}$$

а функция $\vec{f}(t) \in \vec{L}_2(G)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ удовлетворяет условию Гельдера: для каждого $\tau \in \mathbb{R}_+$ найдутся такие числа $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$, что

$$\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(G)} \leqslant K|t - s|^k, \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant s, t \leqslant \tau,$$

$$\|\vec{f}(t)\|^2_{\vec{L}_2(G)} := \int\limits_G |\vec{f}|^2 dG = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{f}|_{\Omega_0}|^2 d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{f}|_{\Omega_1}|^2 d\Omega_1 < \infty.$$

Тогда существует и единственно (в смысле замечания 1 и определения 1) сильное решение задачи (2) — (5).

Доказательство. Перепишем представление (18) оператора $\mathcal{A}$ в следующем виде (с очевидными обозначениями): $\mathcal{A} = (\mathcal{I} + \mathcal{S})\mathcal{A}_0(\mathcal{I} - \mathcal{S}^*)$. Осуществим в задаче Коши (14) замену: $(\mathcal{I} - \mathcal{S}^*)y(t) = \mathcal{C}_1^{-1/2} z(t)$ (см. (23)).

Так как $(\mathcal{I}-\mathcal{S}^*)^{-1}=\mathcal{I}+\mathcal{S}^*$, то операторный коэффициент при dz/dt можно записать в виде

$$\mathcal{C}_1^{1/2}(\mathcal{I}+\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1^{-1/2})\mathcal{C}_1^{1/2}(\mathcal{I}-\mathcal{S}^*)^{-1}\mathcal{C}_1^{-1/2}= \\ =\mathcal{C}_1^{1/2}(\mathcal{I}+\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1^{-1/2})(\mathcal{I}+\mathcal{C}_1^{1/2}\mathcal{S}^*\mathcal{C}_1^{-1/2})=:\mathcal{C}_1^{1/2}(\mathcal{I}+\Phi_1),$$

где, в силу компактности S и конечномерности $\mathcal{C}_2$ оператор Φ_1 является компактным, причем $\mathcal{I}+\Phi_1$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{I}+\Phi_2$, где Φ_2 компактен.

С учетом сказанного, задача (14) равносильна задаче

$$\frac{dz}{dt}=-(\mathcal{I}+\Phi)\,\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{C}_1^{-1/2}z=(\mathcal{I}+\Phi_2)\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{F}, \tag{25}$$

$$z(0)=\mathcal{C}_1^{1/2}(I-\mathcal{S}^*)y(0),$$

$$\mathcal{I}+\Phi:=(\mathcal{I}+\Phi_2)\mathcal{C}_1^{-1/2}(\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{C}_1^{1/2}=(\mathcal{I}+\Phi_2)(I+\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{S}\mathcal{C}_1^{1/2}).$$

Здесь Φ — компактный, а оператор $\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{C}_1^{-1/2}$, определенный на

$$\mathcal{D}(C_1^{-1/2}\mathcal{A}_0C_1^{-1/2})=\{z\in\mathcal{H}:\,\mathcal{C}_1^{-1/2}z=(\mathcal{I}-\mathcal{S}^*)y\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)\},$$

$$\mathcal{A}_0=\operatorname{diag}(\widehat{A}_{11};\widehat{A}_{22}+\widehat{Q}\widehat{Q}^*),\quad \widehat{A}_{22}+\widehat{Q}\widehat{Q}^*=\operatorname{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_q)+(\alpha_i\alpha_j)_{i,j=1}^q,$$

является самосопряженным и положительно определенным.

Следовательно, оператор $-(\mathcal{I}+\Phi)\,\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{C}_1^{-1/2}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов, голоморфной в некотором секторе, содержащем положительную полуось.

Из условий на $\vec{f}$ следует, что функция $(\mathcal{I}+\Phi_2)\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{F}$ локально гельдерова (см. определение $\mathcal{F}$ после (14), а также определение $\vec{M}(t)$ в (2)). Из условия (24), факторизации (18), представления (19) следует, что $y(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, а значит $z(0)\in\mathcal{D}(C_1^{-1/2}\mathcal{A}_0C_1^{-1/2})$. В силу [17, с.130, теорема 1.4] задача Коши (25) имеет единственное (в смысле определения 2) сильное решение.

Возвращаясь от задачи (25) к задаче (14) (все переходы можно обратить), приходим к выводу, что задача (14) имеет сильное решение. Таким образом, система уравнений (13) с соответствующими начальными условиями также имеет единственное сильное решение. При этом $\vec{u}(t)\in\mathcal{D}(A)$, $\vec{v}_k(t)\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $k=\overline{1,q}$, при любом t, а все слагаемые в уравнениях (13) непрерывны по t и являются функциями переменной t со значениями в соответствующих пространствах. Интегрируя третью группу уравнений в (13) по t в пределах от 0 до t и используя начальные условия для $\vec{v}_k(t)$, приходим к формулам (12), где $\vec{v}_k\in\mathcal{D}(A^{1/2})$ и

$$A^{1/2}\vec{v}_k(t)=\mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}A\vec{u}(s)ds\in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega_1)),\quad k=\overline{1,q},$$

так как $A\vec{u}(t)\in C(\mathbb{R}_+;\vec{J}_0(\Omega_1))$. Подставляя полученные функции в первое уравнение (13), получаем, что выполнено уравнение (9), причем все слагаемые в этом уравнении являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_1)$. Так как граница S_1 гладкая, то область определения оператора A есть множество $\vec{H}^2(\Omega_1) \cap \vec{J}_0^1(\Omega_1)$. Следовательно, $\Delta\vec{u} \in C(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega_1))$ и $\widehat{I}_0(t)P_G(\Delta\vec{u}) \in C(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_1))$. Из сказанного и из (8) получаем, что ∇p, определяемый однозначно по $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{f}$, является функцией переменной t со значениями в $C(\mathbb{R}_+; \vec{G}(\Omega_1))$. Согласно замечанию 1 и определению 1, установленные свойства решений означают, что набор функций $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$ и $\nabla p(t,x)$ является сильным решением исходной начально-краевой задачи. $\square$

5 Постановка задачи о нормальных колебаниях. Случай нулевого собственного значения

Рассмотрим нормальные колебания гидромеханической системы, то есть такие решения (14) при $\mathcal{F} \equiv 0$, для которых

$$y(t) = \exp(-\lambda t)y = \exp(-\lambda t)(\vec{u}; \vec{\omega}; \hat{v}; \vec{\eta})^\tau, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в однородное уравнение (14), приходим к следующей спектральной задаче:

$$\mathcal{A}y = \lambda\mathcal{C}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \tag{27}$$

Рассмотрим сначала вопрос о том, имеет ли задача (27) нулевое собственное значение. Пусть $\lambda = 0$, тогда задача (27) равносильна системе уравнений

$$A_{11}\vec{u} + A_{12}\widehat{v} = 0,\ \alpha P_2\vec{\omega} + \beta\vec{\eta} = 0,\ A_{21}\vec{u} + A_{22}\widehat{v} = 0,\ \beta P_2\vec{\omega} = 0.$$

С учетом связи $A_{21} = -A_{12}^*$ приходим к тому, что

$$\|A_{11}^{1/2}\vec{u}\|^2 + \|A_{22}^{1/2}\widehat{v}\|^2 = 0, \quad \vec{\eta} = 0, \quad P_2\vec{\omega} = 0.$$

Далее, дополнительное соотношение (5) приводит к связи $\lambda P_3\vec{\delta} = P_3\vec{\omega}$, из которой $P_3\vec{\omega} = 0$, а значит, и $y = 0$. Отметим при этом, что $P_3\vec{\delta}$ может быть произвольным.

Итогом проведенных рассуждений является следующая лемма.

Лемма 5. *Собственному значению $\lambda = 0$ отвечает новое состояние покоя гидромеханической системы, которое получается из исходного состояния путем поворота маятника на произвольный угол $P_3\vec{\delta}$.*

6 Нормальные движения, отличные от состояния покоя

Рассмотрим далее задачу (27) в случае $\lambda \neq 0$.

Для удобства дальнейшего исследования введем замены

$$\rho_1^{1/2}\vec{u} = \vec{u}_1, \quad C_{22}^{1/2}\vec{\omega} = \vec{\omega}_1. \tag{28}$$

Тогда с учетом ограниченности и ограниченной обратимости $C_{22}^{1/2}$ от спектральной задачи (27) приходим к равносильной задаче

$$\widetilde{\mathcal{A}}\, z = \lambda\, \widetilde{\mathcal{C}}\, z, \quad z \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{29}$$

где на главной диагонали $\widetilde{\mathcal{C}}$ стоят единичные операторы. Более конкретно, имеем

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix},$$

$$z_1 := (\vec{u}_1; \vec{\omega}_1)^\tau, \quad z_2 := (\widehat{v}; \vec{\eta})^\tau,$$

$$\widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} := \begin{pmatrix} I_0 & \rho_1^{-1/2} C_{12} C_{22}^{-1/2} \\ \rho_1^{-1/2} C_{22}^{-1/2} C_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{11} := \operatorname{diag}(\rho_1^{-1} A_{11};\, \alpha C_{22}^{-1}),$$

$$\widetilde{A}_{12} := \operatorname{diag}(\rho_1^{-1/2} A_{12};\, \beta C_{22}^{-1/2}), \quad \widetilde{A}_{21} = -\widetilde{A}_{12}^*, \quad \widetilde{A}_{22} := \operatorname{diag}(A_{22};\, 0).$$

Опишем структуру оператора $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$. Повторяя рассуждения, аналогичные проделанным в лемме 2 (см. (20)), получаем

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \widetilde{Q}^* \\ -\widetilde{Q} & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} (I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M \widetilde{Q}) \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & -\widetilde{A}_{11}^{-1/2} \widetilde{Q}^* M \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \\ \widetilde{A}_{22}^{-1/2} M \widetilde{Q} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} M \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(-1)} & \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(-1)} & \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q} := \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \widetilde{A}_{12}^* \widetilde{A}_{11}^{-1/2}, \quad M := (I_{\mathcal{H}_2} + \widetilde{Q}\widetilde{Q}^*)^{-1}, \quad 0 \leqslant \widetilde{A}_{11}^{(-1)} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1),$$

$$\widetilde{A}_{21}^{(-1)} = -(\widetilde{A}_{12}^{(-1)})^*, \quad \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2; \mathcal{H}_1), \quad 0 \ll \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2). \tag{30}$$

Дальнейшее исследование основывается на использовании фактов теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой (см., например, [18], [19, курс 3]).

Зададим в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_2$, оператор канонической симметрии $\mathcal{J} = \operatorname{diag}(I_{\mathcal{H}_1}; -I_{\mathcal{H}_2})$ и введем индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}}$. Также введем ортопроекторы P_+ и P_-: $P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Тогда, в силу бесконечномерности $\mathcal{H}_2$ пространство $\mathcal{H}$ является пространством Крейна.

Проверяется непосредственно, что операторные матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}$ (возникшие в задаче (29)) являются $\mathcal{J}$-самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$ (понятие $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора вводится стандартным образом, см., например, [18, с.106], [19, с.458]).

Лемма 6. *Спектр задачи* (29) *(а значит, и задачи* (27)*) расположен в замкнутой правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При этом все ненулевые собственные значения располагаются в открытой правой комплексной полуплоскости.*

Доказательство. I шаг. Так как $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}$ являются $\mathcal{J}$-самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$, значит, задача (29) равносильна задаче на собственные значения для линейного по λ самосопряженного в $\mathcal{H}$ операторного пучка

$$L(\lambda) := (\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{A}}) - \lambda(\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{C}}).$$

Таким образом, спектр задачи (29) симметричен относительно вещественной оси.

II шаг. Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение $[y, z] := (\widetilde{\mathcal{C}}y, z)_{\mathcal{H}}$, порождающее норму, эквивалентную исходной норме $\mathcal{H}$. Соответствующее энергетическое пространство для этой нормы обозначим через $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$. Оператор $-\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ и задан на области определения $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, оператор $\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}$ замкнут, и область его значений есть все пространство, так как $\widetilde{\mathcal{C}}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}$ ограничены, а оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ обладает этими свойствами (лемма 3) при переходе от задачи (14) после замен (28). Поэтому достаточно проверить свойство диссипативности для $\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}$. Пусть $y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}})$, тогда

$$-\mathrm{Re}[\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}y, y] = -\mathrm{Re}(\widetilde{\mathcal{C}}\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}y, y)_{\mathcal{H}} = -\mathrm{Re}(\widetilde{\mathcal{A}}y, y)_{\mathcal{H}} \leqslant 0.$$

Таким образом, оператор $-\widetilde{\mathcal{C}}^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$, а значит спектр задачи (29) расположен в замкнутой правой комплексной полуплоскости.

III шаг. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением задачи (29), а значит, и задачи (27) с собственной функцией $y \in D(\mathcal{A})$. Для этих элементов $0 \leqslant \mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y) = \mathrm{Re}\lambda \cdot (\mathcal{C}y, y)$. Отсюда, условие $\mathrm{Re}\lambda = 0$ возможно лишь при $\mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y) = 0$. Последнее равенство равносильно тому, что (см. (22))

$$(A_{11}\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + (A_{22}\widehat{v}, \widehat{v})_{\widehat{H}} + \alpha|\vec{\omega}|^2 = 0.$$

Учитывая положительную определенность компонент A_{11} и A_{22}, получаем, что $\vec{u} = \vec{0}$, $\widehat{v} = \widehat{0}$, $\vec{\omega} = \vec{0}$. Принимая во внимание связи (13) при $\vec{M}(t) = \vec{0}$, имеем $P_2\vec{\delta} = 0$, следовательно $\vec{\eta} = \vec{0}$. Таким образом, доказано, что задача не имеет ненулевых собственных значений на мнимой оси. Следовательно, все они располагаются в открытой правой комплексной полуплоскости. □

Осуществим далее в спектральной задаче (29) замену искомого элемента

$$\varphi := (\varphi_1; \varphi_2)^{\tau} := \mathrm{diag}(\widetilde{C}_{\mathcal{H}_1}^{1/2}; \mathcal{I}_{\mathcal{H}_2})z.$$

Получим следующую спектральную задачу

$$\mathcal{B}\varphi = \mu\varphi, \quad \mu = \lambda^{-1}, \tag{31}$$

$$\mathcal{B} := \widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(-1)} & \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(-1)} & \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно можно проверить, что $\mathcal{B}$ является $\mathcal{J}$-самосопряженным ограниченным оператором в $\mathcal{H}$ с той же самой симметрией $\mathcal{J}$.

Отметим ряд основных понятий и утверждений из теории пространств с индефинитной метрикой, которые будут использованы в дальнейшем.

Подпространство $\mathfrak{L}_+$ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi,\xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathfrak{L}_+$ и *максимальным неотрицательным* ($\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство $\mathfrak{L}_-$.

Известно (см. [18, с.70]), что $\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует угловой оператор $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что

$$\mathfrak{L}_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+,\ \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}.$$

Справедлива *теорема Г. Лангера* (доказательство см. в [19, с.460]). *Если оператор B является $\mathcal{J}$-самосопряженным оператором в пространстве Крейна, для которого найдется такое каноническое разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, что выполнено условие $P_+BP_- \in \mathfrak{S}_\infty$, то у оператора B существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство.*

Подпространство $\mathfrak{L}_+$ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой. Будем говорить, что $\mathfrak{L}_+$ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства (см., например, [19, с.434]) и равномерно положительного подпространства. В частности, $\mathfrak{L}_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [18, с.84], [19, с.501]).

Если $\mathfrak{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и $\mathfrak{L}_+$ $\mathcal{J}$-ортогонально $\mathfrak{L}_-$, то говорят, что они образуют дуальную пару $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$. Будем писать $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$, если $\mathfrak{L}_\pm \in h^\pm$.

Будем считать, что $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор B *принадлежит классу* (H), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ инвариантных подпространств и каждая B-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Лемма 7. *Невещественный спектр задачи* (31) *состоит из не более чем конечного числа комлексносопряженных пар собственных значений (с учетом кратности).*

Доказательство. I шаг. Представим оператор $\widetilde{\mathcal{C}}$ из (29) в виде суммы

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{S}}, \quad \widetilde{\mathcal{S}} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, оператор $S_{\mathcal{H}_1}$ двумерный, а потому компактный. Далее, оператор $\widetilde{\mathcal{C}}$ имеет $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}$, который положительно определен, ограничен и $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} = \mathcal{I} + \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\widetilde{\mathcal{C}} = (\mathcal{I}+\mathcal{N})(\mathcal{I}+\mathcal{N}) = \mathcal{I} + (2\mathcal{N}+\mathcal{N}^2) = \mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{S}}, \quad \widetilde{\mathcal{S}} = 2\mathcal{N}+\mathcal{N}^2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

отсюда $\mathcal{N} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Отметим следующий очевидный факт, что если оператор $\mathcal{N}$ имеет структуру

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix},$$

то $\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22} \gg 0$, так как $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} \gg 0$.

II шаг. Для оператора $\mathcal{B}$ из (31) имеет место представление

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\mathcal{H}_1} + N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22} \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(-1)} & \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(-1)} & \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\mathcal{H}_1} + N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & \mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

В силу компактности операторов $\widetilde{A}_{11}^{(-1)}$, $\widetilde{A}_{12}^{(-1)}$, $\widetilde{A}_{21}^{(-1)}$ приходим к тому, что

$$B_{11} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad B_{12} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1), \quad B_{21} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2);$$

оператор $\widetilde{A}_{22}^{(-1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, а значит

$$B_{22} = N_{21}\widetilde{A}_{11}^{(-1)}N_{12} + (\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22})\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22}) = B_{22}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2). \quad (33)$$

Докажем, что $B_{22} \gg 0$. Для любого $y_2 \in \mathcal{H}_2$, в силу свойств (30) и свойства $\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22} \gg 0$, имеем

$$(B_{22}y_2, y_2) = (\widetilde{A}_{11}^{(-1)}N_{12}y_2, N_{12}y_2) + (\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22})y_2, (\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22})y_2) \geqslant \\ \geqslant (\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22})y_2, (\mathcal{I}_{\mathcal{H}_2} + N_{22})y_2) \geqslant C \cdot \|y_2\|^2.$$

III шаг. По теореме Г. Лангера у оператора $\mathcal{B}$ есть хотя бы одно максимальное неотрицательное инвариантное подпространство

$$\mathfrak{L}_+ = \{(\varphi_1, \varphi_2)^\tau \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ (\varphi_1, \varphi_2)^\tau = (\varphi_1, K_+\varphi_1)^\tau, \ \varphi_1 \in \mathcal{H}_1\}$$

с угловым оператором $K_+ : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\|K_+\| \leqslant 1$.

Пусть $(\varphi_1, \varphi_2)^\tau = (\varphi_1, K_+\varphi_1)^\tau \in \mathfrak{L}_+$, тогда $\mathcal{B}(\varphi_1, K_+\varphi_1)^\tau = (\hat{\varphi}_1, K_+\hat{\varphi}_1)^\tau$. С учетом сказанного, а также из представления (32), следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$B_{22}K_+ = -B_{21} + K_+B_{11} + K_+B_{12}K_+.$$

Так как операторы B_{ij}, стоящие в правой части полученного уравнения, являются компактными операторами, а оператор B_{22} имеет ограниченный обратный, то $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$, и тогда оператор $\mathcal{B} \in (H)$. С учетом этого факта и следствия 5.21 из [18, с.245], следует утверждение леммы. □

Прежде, чем сформулировать следующий результат. Напомним, что существенным (предельным) спектром оператора называется совокупность точек непрерывного спектра, предельных точек точечного спектра и собственных значений бесконечной кратности.

Лемма 8. *Существенный (предельный) спектр задач* (29) *и* (27) *совпадает с множеством* $\{\infty\} \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q\}$, *где* $\{\gamma_k\}_{k=1}^{q}$ *являются нулями функции*

$$l(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}, \tag{34}$$

при этом выполнены неравенства $0 < \beta_1 < \gamma_1 < \ldots < \beta_q < \gamma_q < \infty$.

Доказательство. Согласно представлению (32) оператор $\mathcal{B}$ является компактным возмущением оператора $\mathrm{diag}(0; B_{22})$, где

$$\sigma_{ess}(\mathrm{diag}(0; B_{22})) = \{0\} \cup \sigma_{ess}(B_{22}).$$

Более того, из (33) оператор B_{22} представим в виде $B_{22} = \Phi_0 + \widetilde{A}_{22}^{(-1)}$, где $\Phi_0 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2)$, а потому, по теореме Вейля, $\sigma_{ess}(\mathcal{B}) = \{0\} \cup \sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22}^{(-1)})$.

Таким образом, с учетом проведенных построений, существенный спектр задачи (29) совпадает с множеством (см. (30))

$$\{\infty\} \cup \sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2}).$$

Из определений (17) следует, что

$$\widetilde{Q} = \widetilde{A}_{22}^{-1/2}\widetilde{A}_{12}^*\widetilde{A}_{11}^{-1/2} = (\beta_1^{-1/2}\alpha_1^{1/2}; \ldots; \beta_q^{-1/2}\alpha_q^{1/2})^\tau,$$

а поэтому

$$\widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2} = \mathrm{diag}(\beta_k)_{k=1}^{q} + (\alpha_i^{1/2}\alpha_j^{1/2})_{i,j=1}^{q}.$$

Таким образом, $\sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2})$ состоит из не более чем q различных (положительных) собственных значений. Дальнейший этап доказательства повторяет доказательства теоремы 2.8 из [13]. □

Итогом приведенных выше лемм является следующее утверждение.

Теорема 2. *Дискретный спектр задачи* (27) *состоит из не более чем конечного числа комплексно сопряженных пар невещественных собственных значений лежащих в открытой правой комплексной полуплоскости, а также* $q + 1$ *ветви положительных конечнократных изолированных собственных значений с предельными точками* $+\infty$ *и* $\{\gamma_k\}_{k=1}^{q}$. *При этом числа* $\gamma_k > 0$ *определяются константами* α_k *и* β_k *как нули функции* $l(\lambda)$ *(см.* (34)*) и формируют существенный спектр задачи.*

Замечание 2. *В случае классической вязкой жидкости (все* $\alpha_k = 0$*) существенный спектр задачи пуст, а все положительные собственные значения имеют единственную предельную точку* $+\infty$. *Этот результат ранее был доказан для системы сочлененных гиростатов с полостями, целиком заполненными вязкой жидкостью (см., например,* [2]*).*

7 Заключение

В работе исследована задача о малых движениях (вокруг сферического шарнира) пространственного маятника с полостью, целиком заполненной вязкоупругой жидкостью обобщенной модели Олдройта. Предполагается, что момент силы трения в сферическом шарнире пропорционален угловой скорости. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов доказана теорема о сильной разрешимости полученной задачи Коши. Найдены достаточные условия существования и единственности решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы.

На основе теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, изучается соответствующая спектральная задача. Доказано, что спектр располагается в открытой правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. Дискретная часть спектра содержит однократное нулевое собственное значение, счетное множество конечнократных положительных собственных значений, и (для произвольной вязкости μ) не более конечного числа невещественных комплексно сопряженных пар собственных значений. Положительные собственные значения разбиваются на $q+1$ ветвь с предельными точками $+\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{q}$, где γ_k — корни уравнения (34).

Далее предполагается провести исследование свойств полноты и базисности частей собственных элементов задачи, изучить асимптотическое поведение ветвей собственных значений, установить физический смысл полученных результатов.

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и полезные замечания.

References

[1] N.N. Moiseyev, V.V. Rumyantsev, *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*, Springer-Verlag New York, 1968.

[2] E.I. Batyr, N.D. Kopachevsky, *Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats*, J. Math. Sci., **211**:4 (2015), 441–530.

[3] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, *On Oscillations of Connected Pendulums with Cavities Filled by Homogeneous Fluids*, Journal of Mathematical Sciences, **265**:2 (2022), 236-312.

[4] F.L. Chernousko, *Movement of a solid body with cavities containing a viscous liquid*, Moscow, 1968.

[5] Yu. N. Kononov, *On movement of the system of connected bodies with cavities containeng liquids*, Mechanics of Solid Body, **30** (2000), 207–216. (In Russian)

[6] A.V. Alekseev, *Analytical solution of dynamic equations of motion of a solid body with a high-viscosity fluid*, Bulletin of BSU. Mathematics, computer science, **4** (2022), 30–37. (In Russian)

[7] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001.

[8] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2003.

[9] A.I. Miloslavskij, *Stability of a viscoelstic isotropic medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **299**:6 (1988), 1341–1343.

[10] A.I. Miloslavskij, *The spectrum of small oscillations of a viscoelastic hereditary medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **309**:3 (1990), 532–536.

[11] S.G. Kreyn, *On oscillations of a viscous fluid in a container*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **159**:2 (1964), 262–265. (In Russian)

[12] S.G. Kreyn, G.I. Laptev, *Motion of a viscous liquid in an open vessel*, Funct. Anal. Appl., **2** (1968), 38–47. (In Russian)

[13] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D. Orlova, *Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid*, American Mathematical Society Translations: Series 2, **199** (2000), 5–33.

[14] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D. Orlova, *An operator approach to the study of the Oldroyd hydrodynamic model*, Mathematical Notes. **65**:6 (1999), 773–776.

[15] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[16] G. Metivier, *Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationales a des souse spases*, J. Math. pures et appl., **57**:2 (1978), 133–156. (In French)

[17] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Higher School, Kiev, 1989. (In Russian)

[18] T.Ya Azizov, I.S. Iokhvidov, *Fundamentals of the theory of linear operators in spaces with indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986. (In Russian)

[19] N.D. Kopachevsky, T.Ya. Azizov, D.A. Zakora, D.O. Tsvetkov, *Operator methods in applied mathematics, vol. 2, Basic courses*, Simferopol, 2022. (In Russian)

Victor Ivanovich Voytitsky
Russian University of People Freandship,
ul. Ordzhonikidze, 3,
115419, Moscow, Russia
E-mail address: `voytitskiy_vi@rudn.ru`

Denis Olegovich Tsvetkov
Crimea Federal V.I. Vernadsky University,
pr. Vernadskogo, 4,
295007, Simferopol, Russia
E-mail address: `tsvetdo@gmail.com`