S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.98
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 70E55,
35M33

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В.И. ВОЙТИЦКИЙ AND Д.О. ЦВЕТКОВ

Abstract: We consider a linear initial-boundary-value problem generated by the problem of small motions of a spital pendulum (around a spherical hinge) with a cavity entirely filled with a viscoelastic fluid. Using theory of operators acting in Hilbert space we formulated the problem as a Cauchy problem for differential-operator equation of first order, prove theorem on strong solvability of the problem on the finite time segment. We study also the corresponding spectrum problem. Using theory of operators acting in spaces with indefinite metrics we study localization and structure of spectrum, determine limit points of eigenvalues and the basis property of parts of the eigen and associated elements .

Keywords: viscoelastic fluid, boundary value problem, operator-differential equation in Hilbert space, spectral problem, discrete and essential spectrum, Riesz basis.

Voytitsky, V.I., Tsvetkov, D.O., On small motions and normal oscillations of a pendulum with cavity completely filled with a viscoelastic fluid.

1 Введение

Проблемы движения систем твердых тел, содержащих полости с жидкостью, не теряют свою актуальность, несмотря на долгую историю (подробная библиография по этому вопросу можно найти в работах [1]–[6]). Одним из наиболее распространенных приложений данной проблемы является необходимость учета влияния жидкого топлива на движение ракетно-космических систем. Возмущения движения твердого тела с жидким наполнением вызваны другими возможными типами нормальных движений системы, порожденными трением между слоями жидкости, наличием свободной поверхности, взаимодействием между жидкостью и стенками контейнера.

К настоящему времени разработаны различные аналитические и численные подходы к изучению таких систем (см., например, [7, 8, 9]). Также исследование многих гидромеханических систем (начиная с работ Н. Н. Моисеева и С. Г. Крейна) проводятся методами функционального анализа, с помощью которых удается установить ряд общих и тонких результатов для различных классов задач математической физики. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в монографиях [10, 11].

Отметим, что колебания маятника с жидкостью существенно отличаются в случае полного или частичного заполнения полости, также существенно отличаются моды свободных колебаний в случае пренебрежимо малого (идеальная) или значительного (вязкая) трения между слоями жидкости (см., например, [4]). В данной работе рассматривается новая задача из этого класса, когда физический маятник с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью (жидкостью с памятью), совершает пространственные колебания около сферического шарнира. Заметим, что одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию колебаний вязкоупругой жидкости, являются работы А. И. Милославского [12, 13]. В них для обобщенной модели Олдройта применен подход, развивающий построения, проведенные ранее С.Г. Крейном и его учениками [14, 15, 11] применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Дальнейшее развитие данной модели отражено в работеах [16, 17], обобщение которых, выраженное в усложнении итогового операторного уравнения и соответствующей спектральной задачи, нашло свое отражение в данном исследовании.

2 Основные уравнения, краевые и начальные условия

Пусть в пространстве расположен физический маятник, состоящий из твердого тела Ω_0 (плотности ρ_0) с внутренней полостью Ω_1, целиком заполненной несжимаемой вязкоупругой жидкостью (плотности ρ_1) модели Олдройта (см., например, [11, глава 11]). Маятник закреплен в неподвижной точке O. Считаем, что жидкость в полости Ω_1 касается твёрдого тела вдоль твердой стенки S_1, которую считаем кусочно гладкой.

Будем предполагать, что на данную систему действует однородное гравитационное поле постоянной интенсивности. Тогда в состоянии покоя точка подвеса O и центр масс маятника находятся на одной вертикальной оси, параллельной действию силы тяжести.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях данной гидромеханической системы, близких к состоянию равновесия. Для этого введем неподвижную систему координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ с ортами $\vec{e}_1^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы ускорение гравитационного поля $\vec{g}=-g\vec{e}_1^{\,3}$, $g>0$. Кроме того, введем подвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$, жестко связанную с телом Ω_0, с единичными векторами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$. В состоянии покоя подвижная система координат совпадает с неподвижной системой.

Положение подвижной системы координат относительно неподвижной системы в процессе малых движений маятника будет задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}(t)=\sum_{j=1}^{3}\delta^j(t)\vec{e}^{\,j}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}(t)$ системы будет равна $\vec{\omega}=d\vec{\delta}/dt$, а угловое ускорение равно $d^2\vec{\delta}/dt^2=d\vec{\omega}/dt$.

Уравнение изменения кинетического момента системы относительно точки O после линеаризации (см. подробнее, например, [11, часть 7], [18]) приводит к соотношению

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\rho_1\int_{\Omega_1}\vec{r}\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,d\Omega_1+\alpha\vec{\omega}+gmlP_2\vec{\delta}=\vec{M}(t), \tag{1}$$

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt}:=\int_G\vec{r}\times\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\Big)\,dm,\quad P_2\vec{\delta}:=\sum_{j=1}^{2}\delta^j\vec{e}^{\,j},\quad \vec{M}(t):=\int_G\vec{r}\times\vec{f}\,dm,$$

$$\int_G(\dots)\,dm:=\rho_0\int_{\Omega_0}(\dots)\,d\Omega_0+\rho_1\int_{\Omega_1}(\dots)\,d\Omega_1.$$

Здесь $G=\Omega_0\cup\Omega_1$ — область занятая твердым телом с жидкостью, $J\vec{\omega}$ — центральный момент инерции маятника с жидкостью G, $\vec{r}$ — радиус-вектор, идущий из точки O в любую точку C, $\vec{u}(t,x)$ — поле относительной скорости жидкости в области Ω_1, m — масса системы, $l=|\overrightarrow{OC}|$, $\vec{f}$ — малое поле внешних сил, $\alpha\vec{\omega}$ — момент сил трения в шарнире. Далее задача будет изучаться в предположении $\alpha>0$ (учитывается, что трение в шарнире пропорционально угловой скорости).

Малые движения жидкости в полости описываются линеаризованным уравнением Навье-Стокса, которое в модели Олдройта содержит дополнительные интегральные слагаемые (см., например, [11, глава 7, 11])

$$\rho_1\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\Big)=-\nabla p+\mu\Delta\vec{v}+\rho_1\vec{f},\quad \operatorname{div}\vec{u}=0\quad(\text{в}\,\Omega_1),\tag{2}$$

$$\vec{v}(t,x)=\vec{u}(t,x)+\sum_{k=1}^{q}\alpha_k\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}(s,x)\,ds=:I_0(t)\vec{u}(t,x).$$

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости; Δ — трехмерный оператор Лапласа; $\alpha_k\geqslant 0,\ \beta_k>0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщенной модели Олдройта. Отметим, что этими уравнениями описывается также модель классической вязкой жидкости, что соответствует случаю $\alpha_k=0$ $(k=\overline{1,q})$. Задача для маятника, целиком заполненного вязкой жидкостью изучалась ранее многими авторами (см., например, [19]–[21]).

Также считаем заданными краевое и начальные условия:

$$\vec{u}=\vec{0}\quad(\text{на }S_1),\quad \vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x),\quad \vec{w}(0)=\vec{w}^0,\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\tag{3}$$

а также дополнительные очевидные соотношения:

$$\frac{d(P_2\vec{\delta})}{dt}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d(P_3\vec{\delta})}{dt}=P_3\vec{\omega},\quad P_3:=I-P_2.\tag{4}$$

3 Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве

Начально-краевую задачу (1) — (4) приведем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. С этой целью для области Ω_1 воспользуемся известным разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [10, с.118]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}(\Omega_1),\tag{5}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1):=\{\,\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_1)\mid\operatorname{div}\vec{u}=0\ (\text{в }\Omega_1),\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на }S_1\},$$

$$\vec{G}(\Omega_1):=\{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_1)\mid\vec{v}=\nabla p,\ p\in H^1(\Omega_1)\}.$$

Здесь $H^1(\Omega_1)=W_2^1(\Omega_1)$ — пространство С.Л. Соболева (для скалярных функций), $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к S_1, операции $\operatorname{div}\vec{u}$ и $\vec{u}\cdot\vec{n}$ понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Пусть P_0 и P_G — ортопроекторы из $\vec{L}_2(\Omega_1)$ на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{G}(\Omega_1)$ соответственно. Тогда действуя на обе части уравнения (2) этими проекторами, получим соотношения

$$\rho_1P_G\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\Big)=-\nabla p+\mu I_0(t)P_G(\Delta\vec{u})+\rho_1P_G\vec{f},\tag{6}$$

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho_1P_0\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\Big)=-\mu I_0(t)A\vec{u}+\rho_1P_0\vec{f},\tag{7}$$

где оператор A определим по закону $A\vec{u} := -P_0\Delta\vec{u}$ на области определения

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega_1) : \vec{u} \in \vec{C}^2(\Omega_1),\ \operatorname{div}\ \vec{u} = 0\,(\text{в } \Omega_1),\ \vec{u} = \vec{0}\,(\text{на } \partial\Omega_1)\Big\},$$

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_0(\Omega_1).$$

Свойства введенного оператора хорошо изучены, сформулируем их без доказательства в виде следующей леммы (см. доказательство в [10, с.131]).

Лемма 1. *Оператор A является симметричным положительно определенным оператором на $\mathcal{D}(A)$. Его расширение по Фридрихсу A_0, называемое оператором Стокса, является самосопряженным положительно определенным оператором, заданным на области определения $\mathcal{D}(A_0)$: $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_0) \subset \vec{J}_0^1(\Omega_1)$, где $\vec{J}_0^1(\Omega_1)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$(\vec{u},\vec{v})_{1,\Omega_1} := \int_{\Omega_1} rot\,\vec{u} \cdot \overline{rot\,\vec{v}}\, d\Omega_1.$$

Если граница S_1 области Ω_1 достаточно гладкая (например, дважды непрерывно дифференцируема), то

$$\mathcal{D}(A_0) = \vec{H}^2(\Omega_1) \cap \vec{J}_0^1(\Omega_1), \quad \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \vec{J}_0^1(\Omega_1).$$

Обратный оператор A_0^{-1} является компактным положительным оператором и потому оператор A_0 имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $+\infty$. Имеет место асимптотическое поведение [22]:

$$\lambda_k(A_0) = c_{A_0} k^{2/3}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{8}$$

Далее с учетом леммы 1 будем считать, что симметричный оператор A расширен по Фридрихсу до самосопряженного оператора, который для простоты снова обозначим через A.

Отметим, что если задача (1) – (4), (7) решена и ее решение $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$, тогда $\Delta\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1)$ и $P_G\Delta\vec{u} \in \vec{G}(\Omega_1)$. В этом случае из (6) по известным $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{f}$ можно найти $\nabla p \in \vec{G}(\Omega_1)$. Таким образом, далее достаточно ограничиться рассмотрением задачи (1) – (4), (7).

Цель дальнейших построений состоит в переходе к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Предварительно дадим следующее определение.

Определение 1. *Назовем набор функций $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$, $\nabla p(t,x)$ сильным решением задачи (1), (3), (7) на промежутке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:*

1) $\vec{u}(t,x) \in \mathcal{D}(A)$ *при любом* $t \in [0,T]$ *и* $Au(t) \in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega_1))$*;*

2) $\vec{u}(t,x) \in C^1([0,T];\vec{J}_0(\Omega_1))$, $\nabla p(t,x) \in C([0,T];\vec{G}(\Omega_1))$, $\vec{\omega}(t) \in C^1([0,T];\mathbb{C}^3)$, $\vec{\delta}(t) \in C^2([0,T];\mathbb{C}^3)$;

3) *выполнены уравнения* (1) *и* (7), *где все слагаемые являются элементами* $C([0,T];\mathbb{C}^3)$ *и* $C([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$ *соответственно;*

4) *выполнены начальные условия* (2) *и соотношения* (4).

Будем считать, что задача (1) – (4), (7) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Введем новые искомые функции $\vec{v}_k(t)$, $k=\overline{1,q}$, согласно формулам

$$\vec{v}_k(t) := \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}A^{1/2}\vec{u}(s)ds, \quad k=\overline{1,q}. \tag{9}$$

Так как $\vec{u}(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в $\mathcal{D}(A)$, то функции $\vec{v}_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{u}(t) - \beta_k\vec{v}_k(t), \quad k=\overline{1,q}.$$

С учетом сказанного, перепишем систему уравнений и начальных условий (1) – (4), (7) в виде задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}
\rho_1\frac{d\vec{u}}{dt} + \rho_1 P_0\Big(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\Big) + \mu A\vec{u} + \mu^{1/2}\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{v}_k = \rho_1 P_0\vec{f}, \quad \vec{u}(0)=\vec{u}^0,\\
J\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho_1\int_{\Omega_1}\vec{r}\times\frac{d\vec{u}}{dt}\,d\Omega_1 + \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{\eta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\\
\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + \beta_k\vec{v}_k = 0, \quad \vec{v}_k(0)=\vec{0}, \quad k=\overline{1,q},\\
\frac{d\vec{\eta}}{dt} - \beta P_2\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{\eta}(0) = \beta P_2\vec{\delta}^0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь с целью симметризации введены замены:

$$\vec{\eta} := \beta P_2\vec{\delta}, \quad \beta := (gml)^{1/2}.$$

Перепишем задачу (10) в виде одного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{C}\,\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{F}, \quad y(0)=y^0. \tag{11}$$

Здесь и далее введены обозначения

$$\mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^2, \quad \mathcal{H}_2 = \widehat{H}\oplus\mathbb{C}^2, \quad \widehat{H} = \bigoplus_{k=1}^{q} H_k, \quad H_k = \vec{J}_0(\Omega_1),$$

$$y = (y_1;y_2)^\tau, \quad y_1 = (\vec{u};\vec{\omega})^\tau, \quad y_2 = (\widehat{v};\vec{\eta})^\tau,$$

$$\widehat{v} := (\vec{v}_1;\ldots;\vec{v}_q)^\tau, \quad F = (f_1;0)^\tau, \quad f_1 = (\rho_1 P_0\vec{f};\vec{M})^\tau;$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad I_{\mathcal{H}_2} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$C_{11}\vec{u} = \rho_1 I_0 \vec{u}, \qquad C_{12}\vec{\omega} = \rho_1 P_0(\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{13}$$

$$C_{21}\vec{u} = \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1, \qquad C_{22}\vec{\omega} = J\vec{\omega},$$

где I_0 и $\widehat{I}$ — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\widehat{H}$ соответственно;

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{11} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\widehat{A}_{12} = \begin{pmatrix} A_{12} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{21} = \begin{pmatrix} A_{21} & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{22} = \begin{pmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \mu A,$$

$$A_{12} = \mu^{1/2}(\alpha_1^{1/2}A^{1/2}; \ldots; \alpha_q^{1/2}A^{1/2}), \quad A_{21} = -A_{12}^*, \tag{15}$$

$$A_{22} = \operatorname{diag}(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_q).$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1) – (4) распадается на уравнение (6), тривиальную связь $d(P^3\vec{\delta})/dt = P^3\vec{\omega}$ и задачу Коши (11) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

4 Свойства операторных коэффициентов

Исследуем свойства операторных матриц $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ задачи Коши (11).

Лемма 2. *Оператор $\mathcal{C}$ из (12) является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. I этап. Докажем, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$. Для этого достаточно установить самосопряженность $C_{\mathcal{H}_1}$ в пространстве $\mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
(C_{\mathcal{H}_1}x_1, x_2)_{\mathcal{H}_1} &:= \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = \\
&= \rho_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + (C_{12}\vec{\omega}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + C_{21}\vec{u}_1 \cdot \vec{\omega}_2 + C_{22}\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = \\
&= \rho_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \cdot \vec{u}_2\, d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u}_1) \cdot \vec{\omega}_2\, d\Omega_1 + \\
&+ \rho_0 \int_{\Omega_0} (\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega}_2\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega}_2\, d\Omega_1 = \\
&= \rho_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{r} \times \vec{u}_2)\, d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})\, d\Omega_1 + \\
&+ \rho_0 \int_{\Omega_0} \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}))\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}))\, d\Omega_1 = \\
&= \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \vec{\omega}_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = (x_1, C_{\mathcal{H}_1}x_2)_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

II этап. Покажем, что $\mathcal{C}$ является положительно определенным оператором действующим в пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $y = (\vec{u}; \vec{\omega}; \widehat{v}; \vec{\eta})^{\tau}$ — произвольный элемент из $\mathcal{H}$, тогда

$$(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} P_0(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{u}\, d\Omega_1 + \\ + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u}) \cdot \vec{\omega}\, d\Omega_1 + J\,|\vec{\omega}|^2 + \|\widehat{v}\|^2_{\widehat{H}} + |\vec{\eta}|^2.$$

Известно (см., например, [10, с.173]), что тензор моментов инерции гидромеханической системы «тело + жидкость» допускает представление

$$J = J_b + J_l, \quad J_l\,|\vec{\omega}|^2 = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2\, d\Omega_1,$$

где $J_b > 0$ — момент инерции твердого тела, а J_l – приведенный момент инерции, учитывающий движение жидкости в полости Ω_1.

Подставляя эту связь в последнее равенство, получим

$$(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}|^2\, d\Omega_1 + \|\widehat{v}\|^2_{\widehat{H}} + |\vec{\eta}|^2 + J_b|\vec{\omega}|^2 \geqslant 0,$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{C}$ является неотрицательным.

Пусть $(\mathcal{C}y, y)_{\mathcal{H}} = 0$, тогда $\widehat{v} = 0$, $\vec{\eta} = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{u} = \vec{0}$. Таким образом, оператор $\mathcal{C}$ положителен в $\mathcal{H}$. Наконец, из структуры (12) оператора следует, что он допускает представление

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_1 = \mathrm{diag}(\rho_1 I_0; J; \widehat{I}; 1) > 0, \tag{16}$$

где оператор $\mathcal{C}_2$ с ненулевыми элементами C_{12} и C_{21} является двумерным оператором. Отсюда следует, что $\mathcal{C}$ является не только положительным, но и положительно определенным оператором, заданным на всем $\mathcal{H}$.

III этап. Покажем, что $\mathcal{C}$ является ограниченным оператором действующим в пространстве $\mathcal{H}$. Для этого достаточно установить ограниченность оператора $C_{\mathcal{H}_1}$ в пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$\|C_{\mathcal{H}_1} y_1\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\rho_1 \vec{u} + \rho_1 (\vec{\omega} \times \vec{r})\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} +$$

$$+ \|\rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1 + \rho_0 \int_{\Omega_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_1 \|^2_{\mathbb{C}^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \,\|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \,\|\vec{\omega} \times \vec{r}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \left| \int_{\Omega_1} (\vec{r} \times \vec{u})\, d\Omega_1 \right|^2 +$$

$$+ 2\rho_0^2 \left| \int_{\Omega_0} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_0 \right|^2 + 2\rho_1^2 \left| \int_{\Omega_1} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\Omega_1 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \,\|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right) \left(\int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 d\Omega_1 \right) +$$

$$+ |\vec{\omega}|^2 \cdot \left(2\rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 + 2\rho_0^2 \left(\int_{\Omega_0} |\vec{r}|^2 d\Omega_0 \right)^2 + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho_1^2 \left(1 + (\max_{\Omega_1} |\vec{r}|)^2\right) \cdot \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} +$$

$$+ |\vec{\omega}|^2 \cdot \left(2\rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 + 2\rho_0^2 \left(\int_{\Omega_0} |\vec{r}|^2 d\Omega_0 \right)^2 + 2\rho_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |\vec{r}|^2 d\Omega_1 \right)^2 \right) =$$

$$= c_1 \cdot \|\vec{u}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + c_2 \cdot |\vec{\omega}|^2 \leqslant K \cdot \|y_1\|^2_{\mathcal{H}_1}, \quad K := \max(c_1, 1, c_2).$$

$\square$

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором, заданным на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) := \bigoplus_{k=1}^{q} \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда в силу формулы (14) и связи $A_{21} = -A_{12}^*$ получаем свойство аккретивности оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = (A_{11}\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + (A_{22}\widehat{v}, \widehat{v})_{\widehat{H}} + \alpha |\vec{\omega}|^2 \geqslant 0.$$

Действительно, по условию $\alpha > 0$, а операторы A_{11} и A_{22} согласно их определениям и свойствам $A \gg 0$, $\beta_k > 0$ $(k = \overline{1,q})$, являются положительно определенными в $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\widehat{H}$ соответственно.

Докажем теперь, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором. В силу определения (14) оператора $\mathcal{A}$, достаточно доказать, что

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

является максимальным аккретивным оператором (т.е. является замкнутым). Непосредственно проверяется, что оператор $\mathcal{A}_0$ представим в виде

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & A_{22}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & Q^* \\ -Q & \widehat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & A_{22}^{1/2} \end{pmatrix},$$

где $Q := A_{22}^{-1/2} A_{12}^* A_{11}^{-1/2} = \mu(\beta_1^{-1/2}\alpha_1^{1/2}; \ldots ; \beta_q^{-1/2}\alpha_q^{1/2})^\tau$. Крайние сомножители ограниченно обратимы (см. лемму 1 и обозначения после (14)), средний сомножитель является ограниченным оператором согласно его представлению. Докажем, что он имеет ограниченный обратный (отсюда будет следовать, что оператор $\mathcal{A}_0$ замкнут).

Действительно, для этого рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix} I_0 & Q^* \\ -Q & \widehat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \widehat{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \vec{u}_1 + Q^*\widehat{v}_1 = \vec{u}_2, \\ -Q\vec{u}_1 + \widehat{v}_1 = \widehat{v}_2, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 - Q^*\widehat{v}_1, \\ (\widehat{I} + QQ^*)\widehat{v}_1 = \widehat{v}_2 + Q\vec{u}_2. \end{cases}$$

Так как оператор $(\widehat{I} + QQ^*)$ является положительно определенным, то существует ограниченный обратный к нему оператор $M := (\widehat{I} + QQ^*)^{-1}$. Таким образом, $\widehat{v}_1 = M\widehat{v}_2 + MQ\vec{u}_2$. Далее, подставляя $\widehat{v}_1$ в первое уравнение, получим что

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \widehat{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 - Q^*MQ & -Q^*M \\ MQ & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix},$$

где все элементы обратной матрицы являются ограниченными операторами. □

5 Теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \vec{f}(t) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_1)),$$
$$\vec{M}(t) \in C^1([0,T]; \mathbb{C}^3), \quad \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}^3, \tag{17}$$

причем поверхность $S_1 = \partial\Omega_1$ дважды непрерывно дифференцируема, тогда существует единственное сильное решение задачи (1) — (4) (в смысле определения 1).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (11). Согласно лемме 2 оператор $\mathcal{C}$ ограничен и имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{C}^{-1}$, таким образом, задача (11) равносильна задаче

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}, \quad y(0) = y^0. \tag{18}$$

Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение $[y,z]:=(\mathcal{C}y,z)_{\mathcal{H}}$, порождающее норму, эквивалентную исходной норме $\mathcal{H}$. Соответствующее энергетическое пространство для этой нормы обозначим через $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ и задан на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})=\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ замкнут и область его значений есть все пространство, так как $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^{-1}$ ограничены, а оператор $\mathcal{A}$ обладает этими свойствами (лемма 3). Поэтому достаточно проверить свойство аккретивности для $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$. Действительно, если $y\in\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$, то

$$\mathrm{Re}[\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y]=\mathrm{Re}(\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}}=\mathrm{Re}(\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}}\geqslant 0.$$

Таким образом, оператор $-\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ и потому порождает (см. [23, с.110]) сжимающую полугруппу $U(t)=\exp(-t\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$ операторов, действующих в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Если выполнены условия (17), то согласно введенным обозначениям, функция $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}\in C^1([0,T];\mathcal{H})$ и $y^0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, потому (см. [23, с.166]) задача Коши (18), а значит и задача (11), имеет сильное решение, выражаемое формулой

$$y(t)=U(t)y^0+\int_0^t U(t-s)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}(s)\,ds.$$

Напомним, что под сильным решением на отрезке $[0,T]$ мы понимаем такую функцию $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой $y(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t\in[0,T]$, $\mathcal{A}y(t)\in C([0,T];\mathcal{H})$, $dy/dt\in C([0,T];\mathcal{H})$ и выполнено уравнение (11). Отметим, что так как нормы в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ эквивалентны, то общие свойства решений $y(t)$ в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ совпадают.

Из сказанного следует, что начально-краевая задача (10) также имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение. При этом $\vec{u}(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\vec{v}_k(t)\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $k=\overline{1,q}$, при любом $t\in[0,T]$, а все слагаемые в уравнениях (10) непрерывны по $t\in[0,T]$ и являются функциями переменной t со значениями в соответствующих пространствах. Интегрируя третью группу уравнений в (10) по t в пределах от 0 до t и используя начальные условия для $\vec{v}_k(t)$, приходим к формулам (9), где $\vec{v}_k\in\mathcal{D}(A^{1/2})$ и

$$A^{1/2}\vec{v}_k(t)=\mu^{1/2}\alpha_k^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}A\vec{u}(s)ds\in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega_1)),\quad k=\overline{1,q},$$

так как $A\vec{u}(t)\in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega_1))$.

Подставляя полученные функции в первое уравнение (10), получаем, что выполнено уравнение (7), причем все слагаемые в этом уравнении являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_1)$. Так как граница S_1 гладкая, то согласно лемме 1 приходим к тому, что область определения оператора A есть множество $\vec{H}^2(\Omega_1)\cap\vec{J}_0^1(\Omega_1)$. Следовательно, $\Delta\vec{u}\in C([0,T];\vec{L}_2(\Omega_1))$ и $\widehat{I}_0(t)P_G(\Delta\vec{u})\in C([0,T];\vec{G}(\Omega_1))$. Из сказанного и из (6) получаем, что ∇p, определяемый однозначно по $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{f}$, является функцией переменной t со значениями в $C([0,T];\vec{G}(\Omega_1))$. Согласно определению 1, установленные свойства решений означают, что набор функций $\vec{u}(t,x)$, $\vec{\omega}(t)$, $\vec{\delta}(t)$ и $\nabla p(t,x)$ является сильным решением исходной начально-краевой задачи на отрезке $[0,T]$. $\square$

Замечание 1. *Если граница S_1 области Ω_1 не является достаточно гладкой, то сильное решение обладает свойством $\vec{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \vec{J}_0^1(\Omega_1)$, при этом ∇p является обобщенной функцией (распределением).*

Полученный результат в теореме 1 допускает усиление, для этого предварительно отметим следующую теорему. Её доказательство следует из леммы 7.4. [23, с.180], теоремы 5.10 [23, с.183], а также из теоремы 1.4 [24, с.130].

Теорема 2. *Пусть в задаче*

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0 \tag{19}$$

оператор A имеет вид $A = -(I+T)B$, где $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ (компактный), $B \gg 0$ (положительно определенный), и выполнены следующие условия:

1) $u^0 \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$;

2) функция $f(t) \in C^k([0,T];\mathcal{H})$ (удовлетворяет условию Гельдера), т.е. для каждого $\tau \in \mathbb{R}_+$ найдутся числа $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0,1]$, такие что

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant K|t-s|^k \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s,t \leqslant \tau.$$

Тогда уравнение (19) является абстрактным параболическим уравнением, решение $u(t)$ задачи (19) выражается формулой

$$y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds,$$

где $U(t)$ — аналитическая полугруппа с генератором A, кроме того

$$u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A)),$$

т.е. задача (19) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \vec{f} \in C^k([0,T];\vec{L}_2(\Omega_1)),$$
$$\vec{M} \in C^k([0,T];\mathbb{C}^3) \quad \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}^3,$$

тогда существует единственное сильное решение задачи (1) — (4).

Доказательство. I этап. Оператор $\mathcal{A}$ из (11) допускает представление

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ -G_0^* & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & G_0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} =: (I+W_1)W(I+W_2),$$

где I — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, $G_0 = \mathrm{diag}(G;\alpha^{-1}\beta)$,

$G = A_{11}^{-1}A_{12} = \mu^{1/2}(\alpha_1^{1/2}A^{-1/2};\ldots;\alpha_q^{1/2}A^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty$, $\mathcal{F} = \mathrm{diag}(F;\alpha^{-1}\beta^2)$,

$$F = A_{22} + A_{12}^* A_{11}^{-1} A_{12} = \mathrm{diag}(\beta_1; \ldots; \beta_q) + M, \quad M = (\alpha_i \alpha_j)_{i,j=1}^q.$$

Учитывая данные формулы, а также (16), перепишем задачу (11) в виде

$$(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\frac{dy}{dt} + (I + W_1)W(I + W_2)y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0.$$

Далее, введем новую искомую функцию $z(t)$ из соотношения

$$(I + W_2)y(t) = \mathcal{C}_1^{-1/2} z(t).$$

В результате придем к следующей задаче Коши

$$\mathcal{C}_1^{1/2}(I + \mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1^{-1/2})\mathcal{C}_1^{1/2}(I + W_2)^{-1}\mathcal{C}_1^{-1/2}\frac{dz}{dt} + (I + W_1)W\mathcal{C}_1^{-1/2}z = \mathcal{F},$$

$$z(0) = \mathcal{C}_1^{1/2}(I + W_2)y(0). \tag{20}$$

Оператор $I + W_2$ – положительно определенный оператор, следовательно существует ограниченный обратный, который имеет структуру

$$(I + W_2)^{-1} = I + S_1, \quad S_1 \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Действительно, из соотношения $(I+S_1)(I+W_2) = (I+W_2)^{-1}(I+W_2) = I$ следует, что

$$S_1 = -(I + S_1)W_2 \in \mathfrak{S}_\infty,$$

так как $I + S_1$ – ограниченный оператор, а W_2 – компактный.

Таким образом, $\mathcal{C}_1^{1/2}(I + W_2)^{-1}\mathcal{C}_1^{-1/2} = I + \mathcal{C}_1^{1/2}S_1\mathcal{C}_1^{-1/2}$, а значит операторный коэффициент при dz/dt можно переписать в виде $\mathcal{C}_1^{1/2}(I + S_2)$, где S_2 – компактный оператор, а $I + S_2$ имеет ограниченный обратный

$$(I + S_2)^{-1} = I + S_3, \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Поэтому задача (20) равносильна задаче

$$\frac{dz}{dt} + (I + S)\mathcal{C}_1^{-1/2}W\mathcal{C}_1^{-1/2}z = (I + S_3)\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{F}, \tag{21}$$

$$z(0) = \mathcal{C}_1^{1/2}(I + W_2)y(0), \quad I + S := (I + S_3)(I + \mathcal{C}_1^{-1/2}W_1\mathcal{C}_1^{1/2}).$$

С учетом проведенных построений оператор S — компактный, а оператор $\mathcal{C}_1^{-1/2}W\mathcal{C}_1^{-1/2}$ самосопряжен и положительно определен в пространстве $\mathcal{H}$. Следовательно уравнение (21) является абстрактным параболическим уравнением (см. теорему 2). Если выполнены условия (3), то непосредственно проверяется, что

$$\mathcal{F} \in C^k([0,T];\mathcal{H}), \quad y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Отсюда следует, что $(I + S_3)\mathcal{C}_1^{-1/2}\mathcal{F} \in C^k([0,T];\mathcal{H})$,

$$z(0) = \mathcal{C}_1^{1/2}(I + W_2)y(0) \in \mathcal{D}(C_1^{-1/2}WB_1^{-1/2}).$$

Таким образом, из теоремы 2, задача (21) имеет сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$. Возвращаясь от задачи (21) к задаче (11) (все переходы можно обратить), приходим к выводу, что задача (11) имеет сильное решение на отрезке $[0, T]$. Для завершения доказательства следует повторить ход доказательства теоремы 1. $\square$

6 Свойства собственных значений

Рассмотрим нормальные колебания гидромеханической системы, то есть такие решения (11) при $\mathcal{F} \equiv 0$, для которых

$$y(t) = \exp(-\lambda t) y = \exp(-\lambda t)(\vec{u}; \vec{\omega}; \hat{v}; \vec{\eta})^{\tau}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в однородное уравнение (11), приходим к следующей спектральной задаче:

$$\mathcal{A} y = \lambda \mathcal{C} y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \tag{23}$$

Далее будем изучать совместно общую спектральную задачу (23) и тривиальную проблему

$$P_3 \vec{\omega} = -\lambda P_3 \vec{\delta}. \tag{24}$$

Для этого представим элемент задачи (23) в виде $\vec{\omega} = P_2\vec{\omega} + P_3\vec{\omega}$, подействуем ортопроекторами P_2 и P_3 на соответствующую строку (уравнение) связанное с элементом $\vec{\omega}$. В результате приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ P_2\vec{\omega} \\ P_3\vec{\omega} \\ \widehat{v} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}P_2 & C_{12}P_3 & 0 & 0 \\ P_2C_{21} & P_2C_{22}P_2 & P_2C_{22}P_3 & 0 & 0 \\ P_3C_{21} & P_3C_{22}P_2 & P_3C_{22}P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ P_2\vec{\omega} \\ P_3\vec{\omega} \\ \widehat{v} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Лемма 4. *Число $\lambda = 0$ является однократным собственным значением задачи (24), (25). Отвечающее ему решение таково:*

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \vec{0}, \quad \widehat{v} = 0, \quad \vec{\eta} = \beta P_2 \vec{\delta} = \vec{0}, \quad P_3\vec{\delta} \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$, тогда (25) равносильна системе уравнений:

$$A_{11}\vec{u} + A_{12}\widehat{v} = 0, \ \alpha P_2\vec{\omega} + \beta\vec{\eta} = 0, \ \alpha P_3\vec{\omega} = 0, \ A_{21}\vec{u} + A_{22}\widehat{v} = 0, \ -\beta P_2\vec{\omega} = 0.$$

С учетом связи $A_{21} = -A_{12}^*$ приходим к тому, что $\|A_{11}^{1/2}\vec{u}\|^2 + \|A_{22}^{1/2}\widehat{v}\|^2 = 0$, $\vec{\eta} = 0, \vec{\omega} = 0$. Откуда, $y = (\vec{u}; P_2\vec{\omega}; P_3\vec{\omega}; \widehat{v}; \vec{\eta})^{\tau} = 0$. Далее, тривиальная связь (24) приводит к тому, что $P_3\vec{\delta}$ может быть произвольным. $\square$

Замечание 2. *Физический смысл леммы состоит в том, что собственному значению* $\lambda = 0$ *отвечает переход к новому состоянию равновесия гидромеханической системы, которое получается из исходного состояния путем поворота маятника на произвольный угол* $P_3\vec{\delta}$.

Преобразуем задачу (25) к такому виду, чтобы на главной диагонали блок-матрицы справа стояли единичные операторы. Для этого осуществим замены

$$\begin{gathered} \rho_1^{1/2}\vec{u} = \vec{u}_1, \quad P_{2,C}^{1/2}P_2\vec{\omega} = \vec{\omega}_{1,2}, \quad P_{3,C}^{1/2}P_3\vec{\omega} = \vec{\omega}_{1,3}; \\ P_2C_{22}P_2 := P_{2,C}, \quad P_3C_{22}P_2 := P_{3,C}. \end{gathered} \tag{26}$$

В результате приходим задаче

$$\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{y} = \lambda\widetilde{\mathcal{C}}\widetilde{y}, \tag{27}$$

являющейся краткой записью матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\widetilde{y}_1 = (\vec{u}_1; \vec{\omega}_{1,2}; \vec{\omega}_{1,3})^{\tau} \in \mathcal{H}_1, \quad y_2 = (\widehat{v}; \vec{\eta})^{\tau} \in \mathcal{H}_2;$$

$$\widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} I_0 & \rho_1^{-1/2}C_{12}P_{2,C}^{-1/2} & \rho_1^{-1/2}C_{12}P_{3,C}^{-1/2} \\ \rho_1^{-1/2}P_{2,C}^{-1/2}C_{21} & 1 & P_{2,C}^{-1/2}(P_2C_{22}P_3)P_{3,C}^{-1/2} \\ \rho_1^{-1/2}P_{3,C}^{-1/2}C_{21} & P_{3,C}^{-1/2}(P_3C_{22}P_2)P_{2,C}^{-1/2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} \rho_1^{-1/2}A_{12} & 0 \\ 0 & \beta P_{2,C}^{-1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{11} = \operatorname{diag}(\rho_1^{-1}A_{11};\, \alpha P_{2,C}^{-1};\, \alpha P_{3,C}^{-1}), \quad \widetilde{A}_{21} = -\widetilde{A}_{12}^{*}, \quad \widetilde{A}_{22} = \operatorname{diag}(A_{22};\, 0).$$

Здесь оператор $\widetilde{\mathcal{C}}$ (согласно его структуре и лемме 2) ограничен и положительно определен в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Свойства оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ сохраняются при переходе от задачи (11) после замен (26). А именно, повторяя рассуждения леммы 3, можно установить, что $\widetilde{\mathcal{A}}$ является максимальным аккретивным оператором.

Найдем структуру обратного оператора, для этого будем использовать факторизацию

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \widetilde{Q}^{*} \\ -\widetilde{Q} & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{1/2} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{Q} := \widetilde{A}_{22}^{-1/2}\widetilde{A}_{12}^{*}\widetilde{A}_{11}^{-1/2}$. Отсюда приходим к соотношениям

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \widetilde{Q}^* \\ -\widetilde{Q} & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M \widetilde{Q} & -\widetilde{Q}^* M \\ M\widetilde{Q} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1/2}(I_{\mathcal{H}_1} - \widetilde{Q}^* M\widetilde{Q})\widetilde{A}_{11}^{-1/2} & -\widetilde{A}_{11}^{-1/2}\widetilde{Q}^* M\widetilde{A}_{22}^{-1/2} \\ \widetilde{A}_{22}^{-1/2} M\widetilde{Q}\widetilde{A}_{11}^{-1/2} & \widetilde{A}_{22}^{-1/2} M\widetilde{A}_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(-1)} & \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(-1)} & \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \end{pmatrix},$$
$$M := (I_{\mathcal{H}_2} + \widetilde{Q}\widetilde{Q}^*)^{-1}, \quad 0 \leqslant \widetilde{A}_{11}^{(-1)} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad \widetilde{A}_{21}^{(-1)} = -(\widetilde{A}_{12}^{(-1)})^*,$$
$$\widetilde{A}_{12}^{(-1)} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2;\mathcal{H}_1), \quad 0 \ll \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2), \tag{29}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначено пространство линейных ограниченных операторов.

Дальнейшее исследование основывается на использовании фактов теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой (см., например, [25], [26, курс 3]).

Зададим в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_2$, оператор канонической симметрии $\mathcal{J} = \operatorname{diag}(I_{\mathcal{H}_1}; -I_{\mathcal{H}_2})$ и введем индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}}$. Также введём ортопроекторы P_+ и P_-: $P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Тогда в силу бесконечномерности $\mathcal{H}_2$ пространство $\mathcal{H}$ является пространством Крейна.

Проверяется непосредственно, что операторные матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}$ (возникшие в задаче (27)) являются $\mathcal{J}$-самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$. Понятие $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора вводятся стандартным путем (см. подробнее [25, с.107], [26, с.458]). В силу $\mathcal{J}$-самосопряженности спектры этих операторов симметричны относительно вещественной оси. Учитывая дополнительно аккретивность оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ и положительную определенность оператора $\widetilde{\mathcal{C}}$ приходим к следующему утверждению.

Лемма 5. *Спектр задачи* (27) *расположен в замкнутой правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси.*

Доказательство. Действительно, при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ имеем

$$\operatorname{Re}((\widetilde{\mathcal{A}} - \lambda\widetilde{\mathcal{C}})y, y)_{\mathcal{H}} \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\,(\widetilde{\mathcal{C}}y, y)_{\mathcal{H}} \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\,K\,\|y\|^2_{\mathcal{H}}, \quad K = \mathrm{const} > 0,$$

таким образом, указанные значения λ принадлежат резольвентному множеству оператор-функции $\widetilde{\mathcal{A}} - \lambda\widetilde{\mathcal{C}}$. □

Отметим ряд понятий и фактов из теории пространств с индефинитной метрикой, необходимых для дальнейших построений.

Подпространство $\mathfrak{L}_+$ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется неотрицательным, если $[\xi,\xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathfrak{L}_+$ и максимальным неотрицательным ($\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется неположительное подпространство $\mathfrak{L}_-$. Известно (см. [25, с.70]), что $\mathfrak{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует угловой оператор $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что $\mathfrak{L}_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+,\ \xi \in \mathcal{H}_+\}$. Справедливо следующее важное утверждение (доказательство см. в [26, с.460]).

Теорема 4 (Г. Лангера)**.** *Если оператор B является $\mathcal{J}$-самосопряженным в пространстве Крейна, где найдется такое каноническое разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, что выполнено условие $P_+BP_- \in \mathfrak{S}_\infty$, то у оператора B существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство.*

Определение 2. *Подпространство $\mathfrak{L}_+$ называется равномерно положительным, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой. Будем говорить, что $\mathfrak{L}_+$ принадлежит классу h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $\mathfrak{L}_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см.* [25, с.84], [26, с.501]*).*

Если $\mathfrak{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и $\mathfrak{L}_+$ $\mathcal{J}$-ортогонально $\mathfrak{L}_-$, то говорят, что они образуют дуальную пару $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$. Будем писать $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$, если $\mathfrak{L}_\pm \in h^\pm$.

Определение 3. *Будем считать, что $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор B принадлежит классу (H), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ инвариантных подпространств и каждая B-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.*

Лемма 6. *Задача* (27) *при $\lambda \neq 0$ равносильна задаче*

$$\mathcal{B}x := \widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}x = \mu x, \quad x = \widetilde{\mathcal{C}}^{-1/2}\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{y}, \quad \mu = \lambda^{-1}, \tag{30}$$

причем $\mathcal{B}$ является $\mathcal{J}$-самосопряженным ограниченным оператором.

Доказательство. С учетом сказанного выше, достаточно проверить, что ограниченный оператор $\mathcal{B}$ является $\mathcal{J}$-самосопряженным с той же самой симметрией $\mathcal{J}$. Так как оператор $\widetilde{\mathcal{C}}$ является $\mathcal{J}$- и просто самосопряженным (и ограниченным), то

$$(\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{C}})^* = \widetilde{\mathcal{C}}\mathcal{J} = \mathcal{J}\widetilde{\mathcal{C}}.$$

Далее, как следует из [27], спектральные функции этих самосопряженных операторов коммутируют, а значит функции оператора $\widetilde{\mathcal{C}}$ также коммутирует с $\mathcal{J}$. В частности, $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}\mathcal{J} = \mathcal{J}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}$, а потому

$$\mathcal{J}\mathcal{B} = (\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2})\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} = \widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}(\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1})\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} = (\mathcal{J}\mathcal{B})^*,$$

так как $(\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1})^* = (\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1})$ в силу $\mathcal{J}$-самосопряженности оператора $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$. □

Лемма 7. *Невещественный спектр задачи* (30) *состоит из не более чем конечного числа комлексносопряженных собственных значений (с учетом кратности).*

Доказательство. I шаг. Представим оператор $\mathcal{C}$ из (27) в виде

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: I + \mathcal{S}, \quad S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1),$$

где I — единичный оператор в $\mathcal{H}$, оператор $S_{\mathcal{H}_1}$ двумерный, а потому компактный. Далее, оператор $\widetilde{\mathcal{C}}$ имеет $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}$ который положительно определен, ограничен и $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} = I + M$, $M \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Действительно,

$$(I+M)(I+M) = I+(2M+M^2) = \widetilde{\mathcal{C}} = I+\mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = 2M+M^2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1),$$

отсюда $M \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Отметим следующий очевидный факт, что если оператор M имеет структуру

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

то $I_{\mathcal{H}_2} + M_{22} \gg 0$, так как $\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2} \gg 0$.

II шаг. Для оператора $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}^{1/2}$ имеет место представление

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} + M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & I_{\mathcal{H}_2} + M_{22} \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(-1)} & \widetilde{A}_{12}^{(-1)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(-1)} & \widetilde{A}_{22}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} + M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & I_{\mathcal{H}_2} + M_{22} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В силу компактности операторов $\widetilde{A}_{11}^{(-1)}$, $\widetilde{A}_{12}^{(-1)}$, $\widetilde{A}_{21}^{(-1)}$ приходим к тому, что

$$B_{11} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad B_{12} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1), \quad B_{21} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2);$$

оператор $\widetilde{A}_{22}^{(-1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, а значит

$$B_{22} = M_{21}\widetilde{A}_{11}^{(-1)}M_{12} + (I_{\mathcal{H}_2} + M_{22})\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(I_{\mathcal{H}_2} + M_{22}) = B_{22}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2). \quad (32)$$

Докажем, что $B_{22} \gg 0$. Для любого $y_2 \in \mathcal{H}_2$, в силу свойств (29) и свойства $I_{\mathcal{H}_2} + M_{22} \gg 0$, имеем

$$(B_{22}y_2, y_2) = (\widetilde{A}_{11}^{(-1)}M_{12}y_2, M_{12}y_2) + (\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(I_{\mathcal{H}_2}+M_{22})y_2, (I_{\mathcal{H}_2}+M_{22})y_2) \geqslant$$
$$\geqslant (\widetilde{A}_{22}^{(-1)}(I_{\mathcal{H}_2} + M_{22})y_2, (I_{\mathcal{H}_2} + M_{22})y_2) \geqslant C \cdot \|y_2\|^2.$$

III шаг. По теореме 4 у оператора $\mathcal{B}$ есть хотя бы одно максимальное неотрицательное инвариантное подпространство

$$\mathfrak{L}_+ = \{y = (y_1, y_2)^\tau \in \mathcal{H} : \ y_2 = K_+y_1, \ y_1 \in \mathcal{H}_1, \ y_2 \in \mathcal{H}_2\} \quad (33)$$

с угловым оператором $K_+ : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\|K_+\| \leqslant 1$.

Для произвольного $y = (y_1; K_+y_2)^\tau \in \mathfrak{L}_+$ имеем

$$\mathcal{B}y = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ K_+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}y_1 + B_{12}K_+y_1 \\ B_{21}y_1 + B_{22}K_+y_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}_+,$$

поэтому

$$B_{22}K_+ = -B_{21} + K_+B_{11} + K_+B_{12}K_+, \tag{34}$$

так как B_{22} имеет ограниченный обратный, то $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$, а тогда оператор $\mathcal{B} \in (H)$. С учетом этого факта и следствия 5.21 из [25, c.245], следует утверждение леммы. □

Замечание 3. *Методами теории оператор-функций можно найти оценки на вещественную часть и модуль собственных значений не лежащих на действительной оси. Ожидается, что в данной задаче невещественный спектр расположен в открытой правой комплексной полуплоскости. Это исследование планируется провести в дальнейшем.*

Лемма 8. *Существенный (предельный) спектр задачи (27) совпадает с множеством*

$$\{\infty\} \cup \sigma_{ess}(\Phi), \quad \Phi = \widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2}.$$

Доказательство. Согласно лемме 6 задача (27) равносильна задаче (30), а потому для доказательства утверждения леммы достаточно установить, что $\sigma_{ess}(\mathcal{B}) = \{0\} \cup \sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22}^{(-1)})$.

Действительно, согласно представлению (31) оператор $\mathcal{B}$ является компактным возмущением оператора $\Phi_0 = \operatorname{diag}(0; B_{22})$, следовательно, по теореме Вейля $\sigma_{ess}(\Phi_0) = \{0\} \cup \sigma_{ess}(B_{22})$. Из (32) оператор B_{22} представим в виде $B_{22} = \Phi_1 + \widetilde{A}_{22}^{(-1)}$, где $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2)$, а потому

$$\sigma_{ess}(B_{22}) = \sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22}^{(-1)}).$$

□

Лемма 9. *Существенный спектр оператора* $\Phi = \widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2}$ *состоит из* q *положительных собственных значений* $\{\gamma_k\}_{k=1}^q$, *которые являются нулями функции*

$$l(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}, \tag{35}$$

при этом выполнены неравенства $0 < \beta_1 < \gamma_1 < \ldots < \beta_q < \gamma_q < \infty$.

Доказательство. Из леммы 3 и определений (14) и (27) следует, что

$$\widetilde{Q} = \widetilde{A}_{22}^{-1/2}\widetilde{A}_{12}^*\widetilde{A}_{11}^{-1/2} = (\beta_1^{-1/2}\alpha_1^{1/2}; \ldots; \beta_q^{-1/2}\alpha_q^{1/2})^\tau,$$

поэтому

$$\Phi = \widetilde{A}_{22} + \widetilde{A}_{22}^{1/2}\widetilde{Q}\widetilde{Q}^*\widetilde{A}_{22}^{1/2} = \operatorname{diag}(\beta_k)_{k=1}^q + (\alpha_i^{1/2}\alpha_j^{1/2})_{i,j=1}^q.$$

Таким образом, $\sigma_{ess}(\Phi)$ состоит из не более чем q различных (положительных) собственных значений.

Далее, заметим, что для нахождения точек $\sigma_{ess}(\Phi)$ достаточно найти конечные точки множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_1)$ для операторной матрицы (см. обозначения после формулы (14), а также замену (26))

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1^{-1}A_{11} & \rho_1^{-1/2}A_{12} \\ -\rho_1^{-1/2}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

С этой целью рассмотрим задачу на собственные значения

$$\rho_1^{-1}\mu A\vec{u}_1 + \rho_1^{-1/2}\mu^{1/2}\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{v}_k = \lambda\vec{u}_1, \tag{36}$$
$$-\rho_1^{-1/2}\mu^{1/2}\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_j\vec{v}_j = \lambda\vec{v}_j, \quad j=\overline{1,q}.$$

Проверим, что числа $\lambda = \beta_j$, $j=\overline{1,q}$, являются регулярными для оператора $\mathcal{A}_1$. Спектр этого оператора вещественный, за исключением, быть может, конечного числа собственных значений (данный факт проверяется по аналогично с рассуждениями леммы 7). Поэтому достаточно проверить, что числа β_j, $j=\overline{1,q}$, не являются граничными точками спектра $\mathcal{A}_1$.

Пусть $y^{(n)} = (\vec{u}_1^{(n)}, \vec{v}_1^{(n)}, \ldots, \vec{v}_q^{(n)})^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ и $(\mathcal{A}_1 - \beta_j\mathcal{I})y^{(n)} \to 0$, $n\to\infty$. Последнее равносильно системе

$$\rho_1^{-1}\mu A\vec{u}_1^{(n)} + \rho_1^{-1/2}\mu^{1/2}\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^{1/2}A^{1/2}\vec{v}_k^{(n)} - \beta_j\vec{u}_1^{(n)} \to 0,$$
$$-\rho_1^{-1/2}\mu^{1/2}\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}_1^{(n)} + \beta_j\vec{v}_j^{(n)} - \beta_j\vec{v}_j^{(n)} \to 0, \quad j=\overline{1,q}.$$

Из второго уравнения получаем $A^{1/2}\vec{u}_1^{(n)} \to 0$, а значит $\vec{u}_1^{(n)} \to 0$. Применяя слева к первому уравнению $A^{-1/2}$, получаем, что $\vec{v}_k^{(n)} \to 0$. Следовательно, $y^{(n)} \to 0$. Таким образом, точки $\lambda = \beta_j$ не являются граничными точками спектра, т.е. они регулярные.

Исключая в (36) элементы $\vec{v}_j$ (при $\lambda \neq \beta_j$), получаем задачу

$$\mu\rho_1^{-1}l(\lambda)A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \quad \vec{u}\in\mathcal{D}(A), \tag{37}$$

где $l(\lambda)$ определена по формуле (35). Отсюда следует, что собственные элементы задачи (37) совпадают с собственными элементами $\{\vec{u}_k(A)\}_{k=1}^\infty$ оператора A, а собственные значения λ являются решениями серии характеристических уравнений

$$l(\lambda) = \rho_1\lambda/(\mu\lambda_k(A)), \quad k=1,2,\ldots, \tag{38}$$

где $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ — собственные значения оператора A (выписанные с учетом их кратности, см. подробнее лемму 1).

Задача (36) и характеристическое уравнение (38) подробно изучались в работах [11, с.335], [16]. Приведем итоговые результаты этих исследований. Уравнение (38) при любом k имеет $q-1$ вещественный (положительный) корень, а начиная с некоторого $k = k_0$ — ровно $q+1$ вещественных корней. При $k \geqslant k_0$ все корни (38) разбиваются на q серий с предельными точками $\{\gamma_k\}_{k=1}^q$, $l(\gamma_k) = 0$ $(k = \overline{1,q})$, а также серию собственных значений с предельной точкой $+\infty$. Нули γ_k функции $l(\lambda)$ удовлетворяют неравенствам леммы, а соответствующие серии собственных значения стремятся монотонно к этим нулям. Следовательно, множество $\{\gamma_k\}_{k=1}^q$ входят в предельный (существенный) спектр оператора $\mathcal{A}_1$, а значит

$$\sigma_{ess}(\Phi) = \{\gamma_k\}_{k=1}^q, \quad l(\gamma_k) = 0, \quad k = \overline{1,q}.$$

□

Итогом приведенных выше лемм является следующее утверждение.

Теорема 5. *Дискретный спектр исходной спектральной задачи (24), (25) состоит однократного нулевого собственного значения, не более чем из конечного числа комплексно сопряженных пар невещественных собственных значений и $q+1$ ветви положительных конечнократных изолированных собственных значений с предельными точками $+\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^q$. Причём числа $\gamma_k > 0$ определяются константами α_k и β_k как нули функции $l(\lambda)$ (см. (35)) и формируют существенный спектр задачи.*

Замечание 4. *В случае классической вязкой жидкости (все $\alpha_k = 0$) существенный спектр задачи пуст, а все положительные собственные значения имеют единственную предельную точку $+\infty$. Этот результат ранее был доказан для системы сочлененных гиростатов, с полостями заполненными вязкой жидкостью (см., например, [2]).*

7 Базисность частей системы корневых элементов задачи

Определим, какие части системы собственных и присоединенных элементов спектральной задачи (23) после проектирования образуют базисы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Теорема 6. *Задача (30) имеет (в качестве части спектра) счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$ и собственными элементами*

$$x_k^+ = \mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{A}\widetilde{y}_k^+, \tag{39}$$

$$\widetilde{y}_k^+ = (\rho_1^{1/2}\vec{u}_k^+; P_{2,C}^{1/2}P_2\vec{w}_k^+; P_{3,C}^{1/2}P_3\vec{w}_k^+; \widehat{v}_k^+; \vec{\eta}_k^+)^\tau \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

которые после проектирования на $\mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\mathcal{H}_1$. Указанный базис Рисса является также p-базисом с конечным дефектом в $\mathcal{H}_1$ при $p > p_0 = 3/2$.

Доказательство. От задачи (24), (25) перейдем посредством замены (26) к задаче (27), которая согласно лемме 6 и обозначениям (31) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \lambda^{-1}, \tag{40}$$

$$B_{11} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad B_{12} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1), \quad B_{21} = -B_{12}^*, \quad B_{22},\, B_{22}^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_2).$$

Дальнейший этап доказательства построен по плану доказательства теоремы 3.12 из [28]. Рассмотрим максимальное неотрицательное подпространство $\mathfrak{L}_+$, введенное выше в доказательстве леммы 7. Подпространство $\mathfrak{L}_+$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$ и имеет соответствующий угловой оператор K_+. Докажем, что сужение $\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+$ оператора $\mathcal{B}$ на подпространство $\mathfrak{L}_+$ есть компактный оператор, действующий в $\mathfrak{L}_+$. Действительно, оператор $\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+$ действует на любой элемент $x = (x_1; K_+x_1)^\tau \in \mathfrak{L}_+$ по закону

$$(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)x = ((B_{11} + B_{12}K_+)x_1, (B_{21} + B_{22}K_+)x_1)^\tau. \tag{41}$$

Пусть $(P_+|\mathfrak{L}_+)$ — сужение на $\mathfrak{L}_+$ ортопроектора P_+, действующего по закону $P_+x := (x_1; 0)^\tau$ для любого $x = (x_1; x_2)^\tau \in \mathcal{H}$. Тогда с учетом следующей связи $x_1 = (P_+|\mathfrak{L}_+)x$ из (41), в силу произвольности элемента $x \in \mathcal{H}$, получим

$$(P_+|\mathfrak{L}_+)(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) = (B_{11} + B_{12}K_+)(P_+|\mathfrak{L}_+).$$

Так как оператор $(P_+|\mathfrak{L}_+)$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{L}_+$ на $\mathcal{H}_1$ (см. [25, с. 37]), то оператор $(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)$ подобен оператору $(B_{11} + B_{12}K_+)$

$$(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) = (P_+|\mathfrak{L}_+)^{-1}(B_{11} + B_{12}K_+)(P_+|\mathfrak{L}_+),$$

где операторы B_{11}, B_{12} — компактные, а угловой оператор K_+ ограничен, следовательно, оператор $B_{11} + B_{12}K_+$ компактен. Поэтому оператор $(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)$ также компактен и $\mathfrak{L}_+$ есть неотрицательное инвариантное подпространство класса h^+. В частности, из этого следует, что нейтральное подпространство $\mathfrak{L}_+^0 \subset \mathfrak{L}_+$ конечномерно и также инвариантно относительно $\mathcal{B}$. Пусть спектр $\sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+^0) = \{\nu_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда $\mathfrak{L}_+$ может быть представлено как прямая сумма двух инвариантных относительно $\mathcal{B}$ подпространств:

$$\mathfrak{L}_+ = \mathrm{lin}\{\mathfrak{L}_\nu(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) :\, \nu \in \sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+^0)\} \dotplus \mathfrak{L},$$
$$\sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}) = \sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) \setminus \sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+^0).$$

Здесь $\mathfrak{L}_\nu(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)$ — корневое подпространство оператора $(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)$ соответствующее собственному значению ν; под символом lin понимаем линейную оболочку соответствующих элементов.

Так как $\mathfrak{L}_+^0 \subset \mathrm{lin}\{\mathfrak{L}_\nu(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) : \nu \in \sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+^0)\}$, то $\mathfrak{L}$ — равномерно положительное подпространство, имеющее конечную коразмерность

$$\mathrm{dimlin}\{\mathfrak{L}_\nu(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+) : \nu \in \sigma(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+^0\}$$

в подпространстве $\mathfrak{L}_+$. То есть в $\mathfrak{L}$ существует базис Рисса $\{x_k^+\}_{k=1}^\infty$, $x_k^+ = ((x_1)_k^+; (x_2)_k^+)^\tau$, этот базис состоит из собственных элементов оператора $\mathcal{B}$ и имеет ту же самую конечную коразмерность в подпространстве $\mathfrak{L}_+$. Проекции $\{(x_1)_k^+\}_{k=1}^\infty$ на $\mathcal{H}_1$ также образуют базис Рисса с конечным дефектом в $\mathcal{H}_1$, так как оператор $(P_+|\mathfrak{L}_+)$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{L}_+$ на $\mathcal{H}_1$.

Докажем теперь, что вышеупомянутый базис Рисса есть p_0-базис. С этой целью рассмотрим уравнение (34) для углового оператора K_+. Коэффициенты B_{ij} в правой части уравнения выражаются через операторы $\widetilde{A}_{ij}^{(-1)}$ по формулам из (31), которые в свою очередь согласно обозначениям (29) принадлежат классу $\mathfrak{S}_p$ для $p > 3/2$ (см. также (8)). Таким образом, $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$. Поэтому после проектирования на пространство $\mathcal{H}_1$ свойство p-базисности проекций элементов (39) имеет место при $p > p_0 = 3/2$ (см. [29, с.55]). □

Теорема 7. *Пусть* $x_k^- = \mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{A}\widetilde{y}_k^-$,

$$\widetilde{y}_k^- = (\rho_1^{1/2}\vec{u}_k^-; P_{2,C}^{1/2}P_2\vec{w}_k^-; P_{3,C}^{1/2}P_3\vec{w}_k^-; \widehat{v}_k^-; \vec{\eta}_k^-)^\tau \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

— собственные элементы задачи (30)*, отвечающие той части* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ *точек положительного дискретного спектра, которые не вошли в ветвь* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ *из теоремы* 6*. Тогда после проектирования на* $\mathcal{H}_2 = \widehat{H} \oplus \mathbb{C}^2$ *они образует базис Рисса с конечным дефектом в пространстве* $\mathcal{H}_2$*. Указанный базис Рисса является также* p*-базисом с конечным дефектом в* $\mathcal{H}_2$ *при* $p > p_0 = 3/2$*.*

Доказательство. Доказательство теоремы осуществляется по тому же плану, что и доказательство теоремы 6, но уже для максимального неположительного подпространства $\mathfrak{L}_-$, которое инвариантно относительно оператора $\mathcal{B}$. Для соответствующего сужения $\mathcal{B}|_{\mathfrak{L}_-}$ оператора $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{L}_-$ получаем представление ($P_-|_{\mathfrak{L}_-}$ — сужение на $\mathfrak{L}_-$ ортопроектора P_-)

$$\mathcal{B}|_{\mathfrak{L}_-} = (P_-|_{\mathfrak{L}_-})^{-1}(B_{21}K_- + B_{22})(P_-|_{\mathfrak{L}_-}),$$

откуда следует, что сужение $\mathcal{B}|_{\mathfrak{L}_-}$ есть оператор подобный $B_{21}K_- + B_{22}$. Отметим, что $B_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$, $\|K_-\| \leqslant 1$, а оператор B_{22} имеет следующую структуру (лемма 8) $B_{22} = \Phi_1 + \widetilde{A}_{22}^{(-1)}$, $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2)$, причем

$$\sigma_{ess}(B_{22}) = \sigma_{ess}(\widetilde{A}_{22}^{(-1)}) = \{\gamma_k^{-1}\}_{k=1}^q,$$

а значит $\sigma_{ess}(\mathcal{B}|_{\mathfrak{L}_-}) = \{\gamma_k^{-1}\}_{k=1}^q$.

Отсюда следует, что для оператора $(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_-)$ можно применить те же самые рассуждения, что и для оператора $(\mathcal{B}|\mathfrak{L}_+)$ из предыдущей теоремы, но с тем различием, что здесь последовательности положительных собственных значений $\{\mu_k^-\}_{k=1}^\infty$ соответствует базис Рисса $\{x_k^-\}_{k=1}^\infty$ в новом подпространстве $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_-$, $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{L}_-^0$, и с конечным числом точек $\{\gamma_k^{-1}\}_{k=1}^q$ существенного спектра. Дальнейшая схема доказательства теоремы полностью повторяется. □

Замечание 5. *Результаты, полученные в этом пункте, повторяют идеи доказательства свойств базисности частей системы собственных и присоединенных элементов в задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд, приведенные в статье* [28]. *Там установлено также наличие двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками* 0 *и* $+\infty$. *Для задачи с классической вязкой жидкостью имеет место более сильное утверждение, а именно вся совокупность корневых элементов задачи формирует почти* J*-ортонормированный базис в пространстве* $\mathcal{H}$ *(см.* [2]*).*

8 Заключение

В работе исследована задача о малых движениях (вокруг сферического шарнира) пространственного маятника с полостью, целиком заполненной вязкоупругой жидкостью, которая удовлетворяет обобщенной модели Олдройта. Предполагается, что момент силы трения в сферическом шарнире пропорционален угловой скорости. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов доказана теорема о разрешимости полученной задачи Коши. Найдены достаточные условия существования решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы.

На основе теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, изучается соответствующая спектральная задача. Доказано, что спектр располагается в правой комплексной полуплоскости. Дискретная часть спектра содержит однократное нулевое собственное значение и счетное множество конечнократных положительных собственных значений, а также (для произвольной вязкости μ) не более конечного числа невещественных комплексно сопряженных пар собственных значений. Положительные собственные значения разбиваются на $q+1$ ветвь с предельными точками $+\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{q}$ — корни уравнения (35). Установлена базисность Рисса в основных гильбертовых пространствах (после проектирования) частей системы собственных и присоединенных (корневых) элементов спектральной задачи.

References

[1] N.N. Moiseyev, V.V. Rumyantsev, *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*, Springer-Verlag New York, 1968.

[2] E.I. Batyr, N.D. Kopachevsky, *Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats*, J. Math. Sci., **211**:4 (2015), 441–530.

[3] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, Z.Z. Sitshaeva, *On oscillations of two connected pendulums containing cavities partially filled with incompressible fluid*, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, **63**:4 (2017), 627–677. (In Russian)

[4] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, Z.Z. Sitshayeva *On two hydromechanical problems generated by works of S. Krein*, Contemporary Mathematics, AMS (Differential Equations, Mathematical Physics, and Applications: Selim Grigorievich Krein Centennial) **734** (2019), 219-238.

[5] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, *On Oscillations of Connected Pendulums with Cavities Filled by Homogeneous Fluids*, Journal of Mathematical Sciences, **265**:2 (2022).

[6] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky, *On small oscillations of three joined pendulums with cavities filled with homogeneous ideal fluids*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **17** (2020), 260–299.

[7] F.L. Chernousko, *Movement of a solid body with cavities containing a viscous liquid*, Moscow, 1968.

[8] Yu. N. Kononov *On movement of the system of connected bodies with cavities containeng liquids*, Mechanics of Solid Body, **30** (2000), 207–216. (In Russian)

[9] A.V. Alekseev, *Analytical solution of dynamic equations of motion of a solid body with a high-viscosity fluid*, Bulletin of BSU. Mathematics, computer science, **4** (2022), 30–37. (In Russian)

[10] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001.

[11] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2003.

[12] A.I. Miloslavskij, *Stability of a viscoelstic isotropic medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **299**:6 (1988), 1341–1343.

[13] A.I. Miloslavskij, *The spectrum of small oscillations of a viscoelastic hereditary medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **309**:3 (1990), 532–536.

[14] S.G. Kreyn, *On oscillations of a viscous fluid in a container*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **159**:2 (1964), 262–265. (In Russian)

[15] S.G. Kreyn, G.I. Laptev, *Motion of a viscous liquid in an open vessel*, Funct. Anal. Appl., **2** (1968), 38–47. (In Russian)

[16] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D. Orlova, *Evolution and spectral problems related to small motions of viscoelastic fluid*, American Mathematical Society Translations: Series 2, **199** (2000), 5–33.

[17] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D. Orlova, *An operator approach to the study of the Oldroyd hydrodynamic model*, Mathematical Notes. **65**:6 (1999), 773–776.

[18] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky, *On small motions of a two joined bodies system with cavities partially filled with a heavy viscous fluid*, TVIM, **35**:2 (2017), 7–32. (In Russian)

[19] P.S. Krasnoshchekov, *Oscillations of a physical pendulum with a cavity filled with a viscous liquid*, PMM, **27:2** (1963).

[20] O.B. Ievleva, *Oscillations of a body filled with a viscous fluid*, J. Appl Mech Tech Phys, **7** (1966), 18–22.

[21] E.I. Batyr, O.A. Dudik, N.D. Kopachevsky *Small oscillations of bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid* Izv. vuzov. North-Caucasus region. Actual problems of mathematical hydrodynamics, **49** (2009), 15-29.

[22] G. Metivier, *Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationales a des souse spases*, J. Math. pures et appl., **57**:2 (1978), 133–156. (In French)

[23] S.G. Krein, *Linear differential equations in Banach spaces*, M.: Nauka, 1967. (In Russian)

[24] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, K: Higher School, 1989. (In Russian)

[25] T.Ya Azizov, I.S. Iokhvidov, *Fundamentals of the theory of linear operators in spaces with indefinite metric*, M.: Nauka, 1986. (In Russian)

[26] N.D. Kopachevsky, T.Ya. Azizov, D.A. Zakora, D.O. Tsvetkov, *Operator methods in applied mathematics, vol. 2, Basic courses*, Simferopol, 2022. (In Russian)

[27] Yu.M. Berezansky, G.F. Us, Z.G. Sheftel, *Functional analysis. Course of lectures*, K: Higher School, 1990. (In Russian)

[28] T.Ya. Azizov, V. Hardt, N.D. Kopachevsky, R. Mennicken, *To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container*, Math. Nachr., **248-249** (2003), 3–39.

[29] T.Ya. Azizov *Spectral theory and theory of expansion of operators in spaces with indefinite metric. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences*, Kiev, Institut matematiki, 1988. (In Russian)

Victor Ivanovich Voytitsky
Russian University of People Freandship,
ul. Ordzhonikidze, 3,
115419, Moscow, Russia
E-mail address: voytitskiy_vi@rudn.ru

Denis Olegovich Tsvetkov
Crimea Federal V.I. Vernadsky University,
pr. Vernadskogo, 4,
295007, Simferopol, Russia
E-mail address: tsvetdo@gmail.com