

О КВАЗИМНОГООБРАЗИИ, ПОРОЖДЕННОМ  
3-НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППОЙА.И. Будкин *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** In this paper we find a condition under which the completion of a torsion-free nilpotent group from the variety  $\mathcal{N}_3$  of nilpotent groups of class  $\leq 3$  is contained in the quasivariety generated by this group. We show that the completion of each group from a quasivariety  $qF(\mathcal{N}_3)$  generated by the free 3-nilpotent group  $F(\mathcal{N}_3)$  belongs to  $qF(\mathcal{N}_3)$ . We prove the theorem which allows us to extract roots from a commutant of groups from  $qF(\mathcal{N}_3)$  while remaining in  $qF(\mathcal{N}_3)$ . We find conditions under which the  $\mathcal{N}_3$ -free product of groups from  $qF(\mathcal{N}_3)$  is again contained in  $qF(\mathcal{N}_3)$ . We show that  $qF(\mathcal{N}_3)$  is not closed with respect to  $\mathcal{N}_3$ -free products.

**Keywords:** quasivariety, nilpotent group, completion,  $\mathcal{N}_3$ -free products.

## 1 Введение

Работа посвящена исследованию квазимногообразия  $qF(\mathcal{N}_3)$ , порождённого свободной 3-ступенно нильпотентной группой  $F(\mathcal{N}_3)$ .

Пополнением группы  $G$  называется всякая минимальная полная группа, содержащая  $G$ . А. И. Мальцев [1], используя методы теории групп и

алгебр Ли, доказал существование и единственность с точностью до изоморфизма локально нильпотентного пополнения для произвольной локально нильпотентной группы без кручения. М. И. Каргаполовым в [2] докано следующее обобщение сформулированной теоремы А. И. Мальцева: если множества  $\pi'$  и  $\pi$  простых чисел не пересекаются, то произвольная локально нильпотентная  $\pi'$ -группа обладает единственным локально нильпотентным  $\pi$ -пополнением, являющимся  $\pi'$ -группой. Методы, используемые в [2] при всех доказательствах, по существу принадлежат общей теории групп. В данной работе найдено условие, при котором пополнение 3-ступенно нильпотентной группы без кручения содержится в квазимногообразии, порождённом этой группой. В частности, доказано, что пополнение каждой группы из  $qF(\mathcal{N}_3)$  содержится в  $qF(\mathcal{N}_3)$ . Также установлено, что пополнение любой 2-ступенно нильпотентной группы без кручения  $G$  содержится в  $qG$ . Кроме того, доказана теорема, позволяющая извлекать корни из коммутанта групп из  $qF(\mathcal{N}_3)$ , оставаясь при этом в  $qF(\mathcal{N}_3)$ .

Пусть  $\mathcal{N}_c$  — это многообразие нильпотентных групп степени не выше  $c$ ,  $\mathcal{R}_p$  — многообразие нильпотентных групп степени не выше 2 экспоненты  $p$  ( $p$  — простое число,  $p \neq 2$ ). Замкнутость квазимногообразий групп относительно свободных  $\mathcal{N}_2$ -произведений и свободных  $\mathcal{R}_p$ -произведений рассматривалась в ([3] лемма 2) и ([4] лемма 3), соответственно (см. также [5], теорема 4.2.12). В данной работе найдены условия, при выполнении которых  $\mathcal{N}_3$ -свободное произведение групп из  $qF(\mathcal{N}_3)$  снова содержится в  $qF(\mathcal{N}_3)$ . Здесь показано, что квазимногообразии  $qF(\mathcal{N}_3)$  не замкнуто относительно  $\mathcal{N}_3$ -свободных произведений.

## 2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  — множества натуральных и целых чисел соответственно;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$ ,  $[x, y, z] = [[x, y], z]$ ;

$\mathcal{N}_{2,\infty}, \mathcal{N}_{3,\infty}$  — классы групп без кручения из  $\mathcal{N}_2$  и  $\mathcal{N}_3$  соответственно;

$uG$  — универсально аксиоматизируемый класс, порождённый группой  $G$ .

$F_X(\mathcal{N}_3)$  — свободная в  $\mathcal{N}_3$  группа с множеством свободных порождающих  $X$ ;  $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$  — свободная в  $\mathcal{N}_3$  группа со свободными порождающими  $a, b$ .

$\langle x, y, \dots \rangle$  — группа, порождённая элементами  $x, y, \dots$ ;  $\langle x \rangle$  — циклическая группа, порождённая  $x$ ;

$Z(G)$  — центр группы  $G$ ;

$\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = G' = [G, G], \gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G]$ .

Коммутаторы

$[x_3, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_3], [x_3, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_2], [x_3, x_1, x_3],$

$[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_3]$  составляют полный список базисных коммутаторов веса 3 от переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Хорошо известно, что этими коммутаторами порождается  $\gamma_3(F_3(\mathcal{N}_3))$ .

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются известные коммутаторные тождества ([8], теорема 33.33), истинные в каждой нильпотентной группе степени не выше 3:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c], \quad (1)$$

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c], \quad (2)$$

$$[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1 \quad (3)$$

(первые два тождества означают линейность коммутаторов по модулю  $\gamma_3(G)$  по соответствующим аргументам, третье — частный вариант тождества Витта).

Полезными окажутся следующие тождества, истинные в нильпотентной группе степени 3:

$$[y^n, x^k] = [y, x]^{nk} [y, x]^{nk \frac{k-1}{2}} [y, x, y]^{nk \frac{n-1}{2}}, \quad (4)$$

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}} [y, x, x]^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} [y, x, y]^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}, \quad (5)$$

которые легко доказываются по индукции.

Напомним определение свободного произведения групп в многообразии  $\mathcal{N}_3$ . Предположим, что группы  $A$  и  $B$  имеют в  $\mathcal{N}_3$  представления:

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I_1\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \rangle, B = \langle \{y_i \mid i \in I_2\}; \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle$$

Тогда группа  $G$ , имеющая в  $\mathcal{N}_3$  представление

$$G = \langle \{x_i \mid i \in I_1\} \cup \{y_i \mid i \in I_2\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \cup \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle,$$

обозначается через  $G = A *_{\mathcal{N}_3} B$  и называется свободным произведением групп  $A$  и  $B$  в многообразии  $\mathcal{N}_3$ . Часто вместо  $A *_{\mathcal{N}_3} B$  будем писать  $G = A * B$ , опуская индекс  $\mathcal{N}_3$ . Подгруппы группы  $G$ , порождённые множествами элементов  $\{x_i \mid i \in I_1\}$  и  $\{y_i \mid i \in I_2\}$ , изоморфны группам  $A$  и  $B$ . Их будем обозначать через  $A$  и  $B$  соответственно.

Пусть  $\{G_i \mid i \in I\}$  — произвольное множество групп,  $D$  — фильтр над  $I$ . Элементы фильтрованного произведения  $\prod_{i \in I} G_i / D$  обозначаются через  $fD$ , где  $f$  — элемент декартова произведения  $\overline{\prod_{i \in I} G_i}$ .

Скажем, что группа  $H$  вложима в группу  $G$ , если  $H$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $G$ .

Нам понадобится следующая теорема Дика ([9], с. 281, [6], с. 55).

**Лемма 1.** Пусть группа  $G$  имеет в данном квазимногообразии  $\mathcal{N}$  представление

$$G = \langle \{x_i \mid i \in I\} ; \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{i(j)}}) = 1 \mid j \in J\} \rangle.$$

Предположим, что  $H \in \mathcal{N}$  и группа  $H$  содержит множество элементов  $\{g_i \mid i \in I\}$  такое, что для всякого  $j \in J$  равенство  $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{i(j)}}) = 1$  истинно в  $H$ . Тогда отображение  $x_i \rightarrow g_i$  ( $i \in I$ ) продолжается до гомоморфизма  $G$  в  $H$ .

Будем пользоваться (частный случай теоремы 3 [10]) признаком принадлежности конечно определённой группы  $G$  квазимногообразию  $q\mathcal{R}$ .

**Лемма 2.** Конечно определённая в квазимногообразии  $\mathcal{M}$  группа  $G$  принадлежит квазимногообразию, порождённому классом групп  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ ), тогда и только тогда, когда для любого элемента  $g \in G, g \neq 1$ , существует гомоморфизм  $\varphi_g$  группы  $G$  в некоторую группу из класса  $\mathcal{R}$  такой, что  $g^{\varphi_g} \neq 1$ .

С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [6], теории квазимногообразий — в [5], [7].

### 3 Пополнения групп

Скажем, что группа  $G$  является  $(*)$ -группой, если

а)  $G$  является нильпотентной степени не выше трёх группой без кручения,

б)  $G$  обладает множеством порождающих  $a_1, a_2, \dots$ , удовлетворяющих условию: для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует вложение  $\beta_n : G \rightarrow G$  такое, что из элементов  $a_1^{\beta_n}, a_2^{\beta_n}, \dots$  извлекаются в  $G$  корни  $n$ -й степени.

**Лемма 3.** Пусть  $G$  —  $(*)$ -группа. Тогда при любом  $k$  из каждого элемента группы  $G^\beta$ , где  $\beta = \beta_{6k^2}$ , извлекается в  $G$  корень  $k$ -й степени.

**Доказательство.** Считаем, что  $k > 1$ . Берём произвольный неединичный элемент  $g \in G^\beta$ . Элемент  $g$  можно представить в следующем виде:

$$g = (a_{i_1}^\beta)^{u_1} \dots (a_{i_n}^\beta)^{u_n} = \sqrt[6k^2]{a_{i_1}^\beta}^{6k^2 u_1} \dots \sqrt[6k^2]{a_{i_n}^\beta}^{6k^2 u_n}$$

для подходящих целых чисел  $u_1, \dots, u_n$ . Лемма будет доказана, если покажем, что из любого элемента  $x^k y^{6k^2 v}$  ( $x, y \in G, v$  — целое число) извлекается в  $G$  корень  $k$ -й степени.

Из тождества (5) и линейности коммутаторов веса 3 выводим:

$$\begin{aligned} & x^k y^{6k^2 v} = \\ & = (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} [x, y^{6kv}, x]^{\frac{k(k-1)(k-2)}{6}} [x, y^{6kv}, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}} = \\ & = (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} c_1^k \end{aligned}$$

для некоторого  $c_1 \in \gamma_3(G)$ . Из (4) следует, что в  $G$  существует элемент  $[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}}$ . Из (5) и нильпотентности группы  $G$  степени не выше трёх вытекает, что

$$\begin{aligned} (xy^{6kv}[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}})^k &= (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} [[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}}, xy^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} = \\ &= (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} c_2^k \end{aligned}$$

для некоторого  $c_2 \in \gamma_3(G)$ . Из полученных равенств следует, что

$$x^k y^{6k^2v} = (xy^{6kv}[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}})^k c_2^{-k} c_1^k = a^k$$

для некоторого  $a \in G$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $G$  —  $(*)$ -группа. Тогда группа  $G$  вложима в полную группу из  $uG$ , т.е. универсальные теории групп  $G$  и её минимального пополнения совпадают.

**Доказательство.** Пусть  $\delta_i : G \rightarrow G_i$  — изоморфизм,  $\alpha_i = \beta_{6(i)2} \delta_i : G \rightarrow G_i$ . Отметим, что ввиду леммы 3 из элементов группы  $G^{\alpha_i}$  извлекаются в  $G_i$  корни степени  $i!$ .

Пусть  $D$  — произвольный неглавный ультрафильтр над  $\mathbb{N}$ ,  $H = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i/D$  — ультрапроизведение. Определим отображение  $\alpha : G \rightarrow H$  следующим образом:

$$g^\alpha = f_g D, \text{ где } f_g(i) = g^{\alpha_i} \text{ для каждого } i \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться, что  $\alpha : G \rightarrow H$  — вложение. Поскольку при  $i \geq k$  из элемента  $f_g(i)$  извлекается корень  $k$ -й степени, то из элемента  $f_g D$  также извлекается корень  $k$ -й степени. Положим

$$\sqrt{G^\alpha} = \{x \in H \mid x^k \in G^\alpha \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, что  $\sqrt{G^\alpha}$  — подгруппа. Возьмём любые элементы  $xD, yD \in \sqrt{G^\alpha}$ . Достаточно убедиться, что  $xDyD = xyD \in \sqrt{G^\alpha}$ . Ясно, что существует  $k \in \mathbb{N}$  такое, что  $x^k D, y^k D \in G^\alpha$ , т.е.  $x^k D = f_g D, y^k D = f_h D$  для некоторых  $g, h \in G$ . Из определения фильтрованного произведения следует, что

$$I = \{i \mid x(i)^k = f_g(i) = g^{\alpha_i}\} \cap \{i \mid y(i)^k = f_h(i) = h^{\alpha_i}\} \in D.$$

Пусть при  $i \in I$  и  $i > k^8$ ,  $g_i = \sqrt[k]{g^{\alpha_i}}$ ,  $h_i = \sqrt[k]{h^{\alpha_i}}$  (в частности,  $g_i = x(i), h_i = y(i)$ , поскольку извлечение корня в нильпотентной группе без кручения однозначно ([6], теорема 16.2.8)). По (4), (5)

$$(g_i h_i)^{k^8} = g_i^{k^8} h_i^{k^8} [h_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)}{2}} [h_i, g_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(k^8-2)}{6}} [h_i, g_i, h_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(2k^8-1)}{6}},$$

$$[h_i, g_i]^{k^4} = ([h_i^k, g_i^k][g_i, h_i, h_i]^{\frac{k^2(k-1)}{2}} [g_i, h_i, g_i]^{\frac{k^2(k-1)}{2}})^{k^2},$$

откуда

$$(g_i h_i)^{k^8} = g_i^{k^8} h_i^{k^8} ([h_i^k, g_i^k]^{k^2} [g_i, h_i, h_i]^{\frac{k^4(k-1)}{2}} [g_i, h_i, g_i]^{\frac{k^4(k-1)}{2}})^{\frac{k^2(k^8-1)}{2}}$$

$$[h_i, g_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(k^8-2)}{6}} [h_i, g_i, h_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(2k^8-1)}{6}}$$

$$= g_i^{k^8} h_i^{k^8} [h_i^k, g_i^k]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [g_i, h_i, h_i]^{k^3 s} [g_i, h_i, g_i]^{k^3 t},$$

где  $s = \frac{k^3(k^8-1)(k-1)}{4} - \frac{k^5(k^8-1)(2k^8-1)}{6}$ ,  $t = \frac{k^3(k^8-1)(k-1)}{4} - \frac{k^5(k^8-1)(k^8-2)}{6}$ .  
Отсюда

$$(g_i h_i)^{k^8} = (g^{\alpha_i})^{k^7} (h^{\alpha_i})^{k^7} [h^{\alpha_i}, g^{\alpha_i}]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [g^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}]^s [g^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}, g^{\alpha_i}]^t.$$

Так как это равенство истинно при всех  $i > k^8$  и при  $i \in I$

$$g_i = x(i), h_i = y(i), g_i^k = g^{\alpha_i} = f_g(i), h_i^k = h^{\alpha_i} = f_h(i),$$

то в группе  $H$  справедливо равенство

$$(xDyD)^{k^8} =$$

$$= (f_g D)^{k^7} (f_h D)^{k^7} [f_h D, f_g D]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [f_g D, f_h D, f_h D]^s [f_g D, f_h D, f_g D]^t.$$

Значит,  $(xDyD)^{k^8} \in G^\alpha$ , откуда  $x Dy D \in \sqrt{G^\alpha}$ . Таким образом,  $\sqrt{G^\alpha}$  — подгруппа. Ясно, что  $\sqrt{G^\alpha}$  — полная группа. Поскольку всякий универсально аксиоматизируемый класс замкнут относительно взятия подгрупп и ультразамкнут, то  $\sqrt{G^\alpha} \in uG$ . Лемма доказана.

**Теорема 1.** Пусть квазимногообразия  $\mathcal{M}$  порождается множеством  $(*)$ -групп. Тогда каждая группа  $A$  из  $\mathcal{M}$  вложима в полную группу из  $\mathcal{M}$ .

**Доказательство.** Предположим сначала, что  $A$  — конечно порождённая группа. По признаку принадлежности (лемма 2) группа  $A$  аппроксимируется множеством порождающих квазимногообразия  $\mathcal{M}$  групп, каждая из которых по лемме 4 вложима в полную группу из  $\mathcal{M}$ . Отсюда,  $A$  вложима в декартово произведение полных групп из  $\mathcal{M}$ , которое является полной группой из  $\mathcal{M}$ .

Рассмотрим общий случай. Хорошо известно (см, например, [9], §8.3, теорема 2), что всякая группа вложима в подходящее ультрапроизведение своих конечно порождённых подгрупп. По только что доказанному, всякая конечно порождённая подгруппа группы  $A$  вложима в полную группу из  $\mathcal{M}$ , значит,  $A$  вложима в ультрапроизведение полных групп из  $\mathcal{M}$ , которое является полной группой из  $\mathcal{M}$ . Теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно следует

**Следствие 1.** Всякая группа из  $qF_2(\mathcal{N}_3)$  вложима в полную группу из  $qF_2(\mathcal{N}_3)$ .

**Лемма 5.** Всякое квазимногообразие  $\mathcal{M}$  нильпотентных групп без кручения степени не выше двух порождается конечно порождёнными группами, в представлениях которых в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  в порождающих и определяющих соотношениях всякое определяющее соотношение есть произведение коммутаторов веса 2 (т.е. коммутаторное).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\mathcal{N}$  — квазимногообразие, порождённое всеми конечно порождёнными группами из  $\mathcal{M}$ , заданными в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  коммутаторными определяющими соотношениями. Предположим, что  $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$ .

В ([11], лемма 1]) (см. также [5], теорема 4.2.7) доказано, что всякое нетривиальное квазитождество (т.е. квазитождество, ложное в некоторой неабелевой группе из  $\mathcal{N}_{2,\infty}$ ) эквивалентно в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  коммутаторному квазитождеству. Поскольку  $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$ , то мы можем зафиксировать коммутаторное квазитождество

$$\Phi = t_1(x_1, \dots, x_n) = 1 \ \& \ \dots \ \& \ t_k(x_1, \dots, x_n) = 1 \rightarrow t(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

истинное в каждой группе из  $\mathcal{N}$  и ложное в некоторой группе  $G$  из  $\mathcal{M}$ . Пусть группа  $A$  имеет в  $\mathcal{M}$  следующее представление:

$$A = \langle a_1, \dots, a_n; t_1(a_1, \dots, a_n) = 1, \dots, t_k(a_1, \dots, a_n) = 1 \rangle.$$

Покажем, что  $t(a_1, \dots, a_n) \neq 1$ , откуда следует, что квазитождество  $\Phi$  ложно в  $A$ . Поскольку  $\Phi$  ложно в  $G$ , то существуют элементы  $g_1, \dots, g_n$  из  $G$  такие, что

$$t_1(g_1, \dots, g_n) = 1, \dots, t_k(g_1, \dots, g_n) = 1, t(g_1, \dots, g_n) \neq 1.$$

По теореме Дика существует гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow G$ , при котором  $a_1^\varphi = g_1, \dots, a_n^\varphi = g_n$ . Значит,  $t(a_1, \dots, a_n)^\varphi = t(g_1, \dots, g_n) \neq 1$ , откуда  $t(a_1, \dots, a_n) \neq 1$ .

Поскольку группа  $A$  задаётся в  $\mathcal{M}$  коммутаторными определяющими соотношениями, то  $A/A' = \langle a_1A' \rangle \times \dots \times \langle a_nA' \rangle$  — прямое произведение бесконечных циклических групп. Видим, что если в представлении группы  $A$  в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  в порождающих  $a_1, \dots, a_n$  присутствует некоммутаторное определяющее соотношение, например, соотношение

$$a_1^{s_1} \dots a_n^{s_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [a_i, a_j]^{k_{ij}} = 1,$$

то в  $A/A'$  истинно соотношение  $(a_1A')^{s_1} \dots (a_nA')^{s_n} = 1$ , и поэтому группа  $A/A'$  не является прямым произведением  $n$  бесконечных циклических групп, что не так.

Итак, группа  $A$  задаётся в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  в порождающих  $a_1, \dots, a_n$  коммутаторными определяющими соотношениями,  $A \in \mathcal{M}$ ,  $A \notin \mathcal{N}$ . Это противоречит определению квазимногообразия  $\mathcal{N}$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп степени не выше двух без кручения. Тогда любая группа  $A$  из  $\mathcal{M}$  вложима в полную группу из  $\mathcal{M}$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что всякая абелева группа без кручения вложима в полную абелеву группу без кручения. Следовательно, данная теорема справедлива для квазимногообразия  $\mathcal{M}$  абелевых групп без кручения.

Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп степени не выше двух без кручения. По лемме 5  $\mathcal{M}$  порождается конечно

порождёнными группами, в представлениях которых в  $\mathcal{N}_{2,\infty}$  всякое определяющее соотношение есть произведение коммутаторов веса 2. Возьмём любую группу  $G$  из этих групп, и пусть  $G$  в порождающих  $a_1, \dots, a_n$  группа  $G$  задаётся коммутаторными определяющими соотношениями. Тогда по теореме Дика для любого натурального числа  $m$  отображение  $a_1 \rightarrow a_1^m, \dots, a_n \rightarrow a_n^m$  продолжаемо до гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow G$ . Ясно, что  $\varphi$  — вложение. Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2. Теорема доказана.

Следующая теорема также позволяет присоединять к группе корни из элементов, при этом оставаясь в квазимногообразии  $qF_2$ .

**Лемма 6.** *Пусть  $B = \langle f, A \rangle$  — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения,  $f^k \in B'$  для некоторого ненулевого числа  $k$ . Если  $A \in qF_2$ , то  $B \in qF_2$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Считаем, что в качестве  $k$  взято наименьшее положительное число такое, что  $f^k \in B'$ . В случае  $k = 1$  видим, что  $f \in B'$ , следовательно, по теореме 16.2.5 [6]  $f$  содержится в подгруппе Фраттини группы  $B$ , поэтому  $f$  можно выбросить из множества порождающих группы  $B$ , откуда следует, что  $B = A \in qF_2$ . Итак, предполагаем, что  $k > 1$ .

Изучим определяющие соотношения группы  $B$ .

Возьмём сначала любой элемент вида  $[f, x, y]$  из  $B$ , где  $x, y \in B$ . Из линейности коммутаторов следует, что  $[f, x, y]^k = [f^k, x, y]$ . Поскольку  $f^k \in B'$ , то видим, что  $[f, x, y]^k = 1$ . Но  $B$  — группа без кручения, откуда  $[f, x, y] = 1$ . Итак, из  $f^k \in B'$  в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  следует, что  $[f, x, y] = 1$ . Аналогично из  $f^k \in B'$  в  $\mathcal{N}_{3,\infty}$  следует, что  $[x, f, y] = 1$ ,  $[x, y, f] = 1$ .

Рассмотрим теперь элемент вида  $[f, xy] \in B$ ,  $x, y \in B$ . Из вышесказанного и коммутаторных тождеств (1), (2) следует, что  $[f, xy] = [f, x][f, y]$ . Из доказанного получаем, что всякий элемент из  $B$  можно записать в виде  $f^h[f, x]\tilde{a}$ , где  $x, \tilde{a}$  — подходящие элементы из  $A$ ,  $h$  — некоторое целое число.

Фиксируем элементы  $x, c \in A$  такие, что  $f^k = [f, x]c$ . Ясно, что  $c \in A \cap B'$ . Покажем, что  $c^k \in A'$ .

Для любых  $a_1, a_2, c_1, c_2 \in A$  и целых  $u, v$  имеем:

$$\begin{aligned} [f^u[f, a_1]c_1, f^v[f, a_2]c_2]^k &= [f^u, c_2]^k [c_1, f^v]^k [c_1, c_2]^k = [f^k, c_2]^u [c_1, f^k]^v [c_1, c_2]^k = \\ &= [[f, x]c, c_2]^u [c_1, [f, x]c]^v [c_1, c_2]^k = [c, c_2]^u [c_1, c]^v [c_1, c_2]^k \in A'. \end{aligned}$$

Так как  $c \in B'$ , отсюда получаем, что  $c^k \in A'$ .

Среди соотношений группы  $B$  вида  $f^p = [f, y]c_1$  ( $p > 0$ ,  $y \in A$ ,  $c_1 \in A$ ) пусть выбрано соотношение с наименьшим положительным  $p$ . Ясно, что  $k \geq p$ .

Возьмём любое соотношение вида  $f^n = [f, y_1]c_2$  ( $n > 0$ ,  $y_1, c_2 \in A$ ). Ясно,  $n \geq p$ . Имеем:  $n = pq + l$ , где  $0 \leq l < p$ . Тогда  $f^n = f^{pq}f^l = [f, y]^q c_1^q f^l = [f, y_1]c_2$ , откуда  $f^l = c_1^{-q}c_2[f, y]^{-q}[f, y_1]$ . Итак,  $f^l = [f, x_2]c_3$ , где  $x_2 = y_1y^{-q}$ ,  $c_3 = c_1^{-q}c_2$ . Из выбора  $p$  получаем, что  $l = 0$  и  $f^n =$

$[f, y]^q c_1^q = [f, y_1] c_2$ . Отсюда соотношение  $f^n = [f, y_1] c_2$  следует из соотношений  $f^p = [f, y] c_1$  и  $[f, y]^q c_1^q = [f, y_1] c_2$  (которое можно переписать так:  $[f, y^q y_1^{-1}] c_1^q c_2^{-1} = 1$ ). В частности, доказано, что  $k$  делится на  $p$ .

Отметим ещё, что  $f^{pk} = ([f, y] c_1)^k = [f^k, y] c_1^k = [[f, x] c, y] c_1^k = [c, y] c_1^k$ . Откуда  $f^{pk}, f^{k^2} \in A'$ .

Итак, группа  $B$  задаётся в  $\mathcal{N}_{3, \infty}$  следующими определяющими соотношениями: определяющие соотношения группы  $A$ , некоторый набор соотношений вида  $[f, x_j] h_j = 1$  ( $x_j, h_j \in A, j \in J$ ),  $f^k = [f, x] c$  ( $c \in A, c^k \in A', x \in A$ ),  $f^p = [f, y] c_1$  ( $y, c_1 \in A$ ), причём  $k$  делится на  $p$ . Последние два определяющих соотношения могут совпадать.

Далее для доказательства того, что  $B \in qF_2$ , воспользуемся признаком принадлежности (лемма 2). Возьмём произвольный неединичный элемент  $g \in B$ . Надо построить гомоморфизм  $\varphi : B \rightarrow F_2$  такой, что  $g^\varphi \neq 1$ . Рассматривая вместо  $g$  элемент  $g^{k^2} \in A$ , можно и будем предполагать, что  $g \in A$ .

Так как  $A \in qF_2$ , то по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм  $\alpha : A \rightarrow F_2$ , при котором  $g^\alpha \neq 1$ . Поскольку  $(c^k)^\alpha \in (A')^\alpha \subseteq F_2'$ , то  $c^\alpha \in F_2'$ .

Пусть  $\beta : F_2 \rightarrow F_2$  — изоморфное вложение, при котором  $a^\beta = a^{2k}$ ,  $b^\beta = b^{2k}$ . Пусть

$$\begin{aligned} x^\alpha &= a^{k_1} b^{k_2} [b, a]^{k_3} [b, a, a]^{k_4} [b, a, b]^{k_5}, \\ c^\alpha &= [b, a]^{u_1} [b, a, a]^{u_2} [b, a, b]^{u_3}. \end{aligned}$$

Наша ближайшая цель — найти в  $F_2$  такой элемент  $z \in F_2'$ , что

$$z^k = [z, x^{\alpha\beta}] c^{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Для  $z \in F_2'$ , это равенство эквивалентно следующему:

$$z^k = [z, a^{2kk_1} b^{2kk_2}] [b^{2k}, a^{2k}]^{u_1} [b, a, a]^{8u_2 k^3} [b, a, b]^{8u_3 k^3}. \quad (7)$$

Из коммутаторных тождеств и тождества (4) следует, что (учитывая, что  $z \in F_2'$ )

$$\begin{aligned} [z, a^{2kk_1} b^{2kk_2}] &= [z, a^{2kk_1}] [z, b^{2kk_2}] = [z, a]^{2kk_1} [z, b]^{2kk_2}, \\ [b^{2k}, a^{2k}] &= [b, a]^{4k^2} [b, a, a]^{2k^2(2k-1)} [b, a, b]^{2k^2(2k-1)}. \end{aligned}$$

Итак, равенство (7) переписывается в виде:

$$z^k = [z, a]^{2kk_1} [z, b]^{2kk_2} [b, a]^{4k^2 u_1} f_1,$$

где  $f_1 = [b, a, a]^{2k^2(2k-1)u_1 + 8u_2 k^3} [b, a, b]^{2k^2(2k-1)u_1 + 8u_3 k^3}$ .

Ищем  $z$  в виде  $z = [b, a]^w [b, a, a]^{w_1} [b, a, b]^{w_2}$  ( $w, w_1, w_2$  пока неизвестные целые числа). Имеем:

$$\begin{aligned} z^k &= [b, a]^{kw} [b, a, a]^{kw_1} [b, a, b]^{kw_2}, \\ [z, a] &= [[b, a]^w, a] = [b, a, a]^w, \\ [z, b] &= [b, a, b]^w. \end{aligned}$$

Суммируя полученное, замечаем, что равенство (6) преобразуется в равенство

$$[b, a]^{kw} [b, a, a]^{kw_1} [b, a, b]^{kw_2} = [b, a, a]^{2kk_1 w} [b, a, b]^{2kk_2 w} [b, a]^{4k^2 u_1} f_1.$$

Это равенство сводится к разрешимости в целых числах следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} w &= 4ku_1 \\ w_1 &= 2k_1w + 2k(2k-1)u_1 + 8u_2k^2, \\ w_2 &= 2k_2w + 2k(2k-1)u_1 + 8u_3k^2, \end{aligned}$$

что очевидно.

Рассмотрим следующее отображение  $\rho$  порождающих группы  $B$  в  $F_2$ . Полагаем, что  $t^\rho = t^{\alpha\beta}$  для каждого  $t \in A$ ,  $f^\rho = z$ ,  $(f^k)^\rho = z^k$ . Чтобы воспользоваться леммой 1, надо убедиться, что  $(f^\rho)^p = [f^\rho, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$  (т.е.  $z^p = [z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$ ),  $[f^\rho, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1$  (т.е.  $[z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1, j \in J$ ).

Видим, что  $z^{k^2} = [z^k, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta} = [[z, x^{\alpha\beta}]c^{\alpha\beta}, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta} = [c^{\alpha\beta}, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta}$ ,  $f^{k^2} = [f^k, x]c^k = [[f, x]c, x]c^k = [c, x]c^k$ . Следовательно,  $z^{k^2} = (f^{k^2})^{\alpha\beta}$ .

Учитывая, что  $f^{pk} \in A$ ,  $f^{k^2} \in A$ , получаем, что  $z^{pk^2} = ((f^{k^2})^{\alpha\beta})^p = (f^{k^2p})^{\alpha\beta} = ((f^{pk})^{\alpha\beta})^k = (([f, y]c_1)^k)^{\alpha\beta} = ((f^{k^2})^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta})(c_1^{k^2})^{\alpha\beta} = [z^{k^2}, y^{\alpha\beta}](c_1^{k^2})^{\alpha\beta} = ([z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta})^{k^2}$ .

Из однозначности извлечения корней в нильпотентной группе без кручения следует, что  $z^p = [z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$ .

Рассмотрим теперь соотношение  $[f, x_j]h_j = 1$ . Замечаем, что  $1 = [f^{k^2}, x_j]h_j^{k^2}$ , отсюда  $1 = [(f^{k^2})^{\alpha\beta}, x_j^{\alpha\beta}](h_j^{k^2})^{\alpha\beta} = [z^{k^2}, x_j^{\alpha\beta}](h_j^{k^2})^{\alpha\beta} = ([z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta})^{k^2}$ . Следовательно,  $[z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1$ .

По лемме 1 отображение  $\rho$  продолжается до гомоморфизма  $\rho_1 : B \rightarrow F_2$ , при этом  $g^{\rho_1} = g^\rho = g^{\alpha\beta} \neq 1$ . Лемма доказана.

Следующая теорема позволяет извлекать корни из коммутанта группы из  $qF_2$ , оставаясь при этом в  $qF_2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $B = \langle b_1, \dots, b_n, A \rangle$  — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения и  $b_i^{k_i} \in B'$  для некоторого ненулевого  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Если  $A \in qF_2$ , то  $B \in qF_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $1 = [b_i^{k_i}, b_j^{k_j}, b_s^{k_s}] = [b_i, b_j, b_s]^{k_i k_j k_s}$  при любых  $i, j, s$ , то  $[b_i, b_j, b_s] = 1$ . По (4)

$$1 = [b_i^{k_i}, b_j^{k_j}] = [b_i, b_j]^{k_i k_j} [b_i, b_j, b_j]^{k_i k_j \frac{k_j-1}{2}} [b_i, b_j, b_i]^{k_i k_j \frac{k_i-1}{2}},$$

отсюда  $[b_i, b_j]^{k_i k_j} = 1$ , следовательно  $[b_i, b_j] = 1$ . Из линейности коммутаторов веса 3 получаем, что

$$b_i^{k_i} = \prod_l [b_l, a_{il}] \prod_{l,k} [b_l, c_{lk}, b_k] \prod_{l,s,k} [b_l, d_s, g_k] \prod_{s,k,l} [f_s, f_k, b_l] h_i$$

для подходящих  $a_{il}, c_{lk}, d_s, g_k, f_l \in A$ ,  $h_i \in A'$ . Как и при доказательстве леммы 6 замечаем, что коммутаторы  $[b_l, c_{lk}, b_k]$ ,  $[b_l, d_s, d_k]$ ,  $[f_s, f_k, b_l]$  в некоторых степенях равны единице, следовательно, все коммутаторы веса 3, в запись которых входит некоторое  $b_l$ , равны единице. Итак,

$b_i^{k_i} = \prod_l [b_l, a_{il}] h_i$ . Отсюда для подходящих целых чисел  $s_l$  имеем:

$$\begin{aligned} b_i^{k_i k_1 \dots k_n} &= \prod_l [b_l^{k_l}, a_{il}]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \dots k_n} = \\ &= \prod_l \left[ \prod_j [b_j, a_{lj}] h_l, a_{il} \right]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \dots k_n} = \prod_l [h_l, a_{il}]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \dots k_n} \in A'. \end{aligned}$$

Итак,  $b_i^{k_i k_1 \dots k_n} \in A'$ . Требуемое теперь в силу индукции следует из леммы 6. Теорема доказана.

#### 4 Замкнутость относительно свободных произведений

Покажем сначала, что квазимногообразии  $qF_2(\mathcal{N}_3)$  не замкнуто относительно  $\mathcal{N}_3$ -свободных произведений.

**Предложение 1.** Пусть группа  $G$  имеет в  $\mathcal{N}_3$  представление

$$G = \langle x_1, x_2, x_3; [x_1, x_2, x_1] = 1, [x_1, x_2, x_2] = 1 \rangle \quad (\text{т.е. } G = F_2(\mathcal{N}_2) * Z).$$

Тогда  $G \notin qF_2(\mathcal{N}_3)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$  и  $G \in qF_2$ . Поскольку  $[x_1, x_2, x_3] \neq 1$  в  $G$ , по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$  такой, что  $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$ . Пусть  $x_i^\varphi = a^{k_i} b^{m_i} c_i$ ,  $c_i \in F_2'$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда

$$[x_1, x_2]^\varphi = [a^{k_1} b^{m_1} c_1, a^{k_2} b^{m_2} c_2] = [a, b]^{k_1 m_2 - k_2 m_1} d$$

для некоторого  $d \in \gamma_3(F_2)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_i]^\varphi &= [[a, b]^{k_1 m_2 - k_2 m_1}, a^{k_i} b^{m_i}] = \\ &= [a, b, a]^{k_i (k_1 m_2 - k_2 m_1)} [a, b, b]^{m_i (k_1 m_2 - k_2 m_1)}. \end{aligned}$$

Так как  $[x_1, x_2, x_i]^\varphi = 1$  при  $i = 1, 2$ , то

$$k_i (k_1 m_2 - k_2 m_1) = 0, m_i (k_1 m_2 - k_2 m_1) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Но  $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$ , поэтому  $k_1 m_2 - k_2 m_1 \neq 0$ . Итак, получаем, что  $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 0$ , значит  $[x_1, x_2]^\varphi = [c_1, c_2] = 1$ . Это противоречит тому, что  $[x_1, x_2, x_3] \neq 1$ . Утверждение доказано.

**Теорема 4.** Пусть  $\mathcal{M} = qF_2(\mathcal{N}_3)$ . Предположим, что группы  $G_1$  и  $G_2$  имеют в  $\mathcal{N}_3$  представления

$$G_1 = \langle x_1, x_2, \dots; \Sigma_1 \rangle, G_2 = \langle y_1, y_2, \dots; \Sigma_2 \rangle,$$

определяющие соотношения в которых — произведения коммутаторов веса 3 от трёх переменных либо коммутаторы видов  $[x_i, x_j]$ ,  $[y_i, y_j]$ . Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G_1 * G_2$ , порождённая некоторыми коммутаторами  $[x_i, y_j]$  (возможно единичная). Если  $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ , то  $G = (G_1 * G_2)/N \in \mathcal{M}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём произвольный неединичный элемент  $g$  из  $G$ . Ввиду признака принадлежности (лемма 2) надо установить существование гомоморфизма  $\varphi$  группы  $G$  в подходящую группу  $M \in \mathcal{M}$ , при котором образ  $g$  не равен единице.

Заметим, что  $G/\gamma_3(G)$  задаётся в  $\mathcal{N}_2$  определяющими соотношениями, являющимися коммутаторами от порождающих. Из теоремы 4.2.12 [5] следует, что  $G/\gamma_3(G) \in qF_2(\mathcal{N}_2) \subseteq \mathcal{M}$ . Если  $g \notin \gamma_3(G)$ , то в качестве  $\varphi$  берём естественный гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow G/\gamma_3(G)$ .

Поскольку  $G/[G_1, G_2] \cong G_1 \times G_2 \in \mathcal{M}$ , то при  $g \notin [G_1, G_2]$  в качестве  $\varphi$  берём естественный гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow G/[G_1, G_2]$ .

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что  $g \in \gamma_3(G) \cap [G_1, G_2]$ . Зафиксируем запись элемента  $g$  в виде произведения наименьшего числа неединичных коммутаторов веса 3. Так как  $g \in \gamma_3(G) \cap [G_1, G_2]$ , то в этой записи отсутствуют коммутаторы видов  $[x_i, x_j, x_k], [y_i, y_j, y_k]$ . Из тождества (3) следует, что  $[y_j, x_i, x_i] = [x_i, y_j, x_i]^{-1}$ ,  $[y_j, x_i, y_j] = [x_i, y_j, y_j]^{-1}$ , поэтому можно и будем считать, что коммутаторы видов  $[y_j, x_i, x_i], [y_j, x_i, y_j]$  не входят в запись  $g$ .

СЛУЧАЙ 1. Коммутатор вида  $[x_i, y_j, x_i]$  либо  $[x_i, y_j, y_j]$  входит в запись  $g$  в ненулевой степени (пусть они входят в запись  $g$  в степенях  $k_i, m_i$  соответственно).

По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$ , при котором  $x_i^\varphi = a, y_j^\varphi = b$ , образы остальных порождающих группы  $G$  равны 1. Тогда  $g^\varphi = [a, b, a]^{k_i} [a, b, b]^{m_i} \neq 1$ . Следовательно  $\varphi$  — требуемый гомоморфизм.

Считаем, что коммутаторы из случая 1 (т.е. коммутаторы веса 3 от любых двух переменных  $x_i, y_j$ ) не входят в запись  $g$ . Исходя из равенств  $[y_k, x_i, x_j] = [x_i, y_k, x_j]^{-1}$ ,  $[y_k, x_j, x_i] = [x_j, y_k, x_i]^{-1}$ , можно и будем считать, что коммутаторы видов  $[y_k, x_i, x_j], [y_k, x_j, x_i]$  не входят в запись  $g$ .

СЛУЧАЙ 2. В запись  $g$  входит  $[x_i, x_j, y_k]^t$  ( $t \neq 0$ ) и не входят коммутаторы  $[x_i, y_k, x_j], [x_j, y_k, x_i]$ . Видим, что  $[x_i, x_j] \neq 1$  в  $G$  (иначе  $[x_i, x_j, y_k]^t$  можно удалить из записи  $g$ ). Отметим, что если  $[x_i, y_k] \in N$  и  $[x_j, y_k] \in N$ , то  $[x_i, x_j, y_k]^t = [x_j, y_k, x_i]^{-t} [y_k, x_i, x_j]^{-t} = 1$ , поэтому  $[x_i, x_j, y_k]^t$  элемент можно удалить из записи  $g$ . Итак,  $[x_i, y_k] \notin N$  либо  $[x_j, y_k] \notin N$ .

Пусть сначала  $[x_j, y_k] \notin N$ . По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$ , при котором  $x_i^\varphi = a, x_j^\varphi = b, y_k^\varphi = a$ , образы остальных порождающих группы  $G$  равны 1. Тогда  $g^\varphi = [a, b, a]^t \neq 1$ . Следовательно,  $\varphi$  — требуемый гомоморфизм.

Случай  $[x_i, y_k] \notin N$  аналогичен.

СЛУЧАЙ 3. В запись  $g$  входит выражение вида  $[x_i, y_k, x_j]^s [x_j, y_k, x_i]^l$ , где  $i, j, k$  попарно различные,  $s \neq 0$  либо  $l \neq 0$ . В этом случае  $[x_i, y_k] \notin N$  либо  $[x_j, y_k] \notin N$ .

Предположим сначала, что  $[x_i, y_k] \notin N$  и  $[x_j, y_k] \notin N$ . По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$ , при котором  $x_i^\varphi = a, x_j^\varphi = a, y_k^\varphi = b$ , образы остальных порождающих группы  $G$  равны 1. Тогда  $g^\varphi = [a, b, a]^{s+l}$ .

Следовательно, при  $s+l \neq 0$   $\varphi$  — требуемый гомоморфизм. Если  $l = -s$ , то ввиду тождества (3),

$$[x_i, y_k, x_j]^s [x_j, y_k, x_i]^l = [y_k, x_j, x_i]^{-s} [x_j, x_i, y_k]^{-s} [x_j, y_k, x_i]^l = [x_j, x_i, y_k]^{-s}.$$

В этом случае заменяем  $[x_i, y_k, x_j]^s [x_j, y_k, x_i]^s$  на  $[x_j, x_i, y_k]^{-s}$  и видим, что количество коммутаторов в записи  $g$  можно уменьшить, что не так.

Пусть теперь  $[x_i, y_k] \in N$  и  $[x_j, y_k] \notin N$ . Тогда  $g = [x_j, y_k, x_i]^l [x_i, x_j, y_k]^t \dots$  для некоторого  $t$ . Если соотношение  $[x_i, x_j] = 1$  следует из определяющих соотношений группы  $G$ , то ввиду  $[x_i, y_k] \in N$  и тождества (3), имеем:  $[x_j, y_k, x_i]^l [x_i, x_j, y_k]^t = [y_k, x_i, x_j]^{-l} [x_i, x_j, y_k]^{-l} = 1$ . Это означает, что выражение  $[x_j, y_k, x_i]^l [x_i, x_j, y_k]^t$  можно исключить из записи  $g$ , уменьшив при этом число коммутаторов в записи  $g$ . Итак, соотношение  $[x_i, x_j] = 1$  не следует из определяющих соотношений группы  $G$ . По лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow F_2$ , при котором  $x_i^\varphi = a, x_j^\varphi = b, y_k^\varphi = a$ , образы остальных порождающих группы  $G$  равны 1. Тогда  $g^\varphi = [b, a, a]^l [a, b, a]^t = [a, b, a]^{t-l}$ . Следовательно, при  $t \neq l$   $\varphi$  — требуемый гомоморфизм. Если  $t = l$ , то  $[x_j, y_k, x_i]^l [x_i, x_j, y_k]^t = [y_k, x_i, x_j]^{-l} [x_i, x_j, y_k]^{-l} [x_i, x_j, y_k]^l = 1$ , так как  $[x_i, y_k] \in N$ . В этом случае  $[x_j, y_k, x_i]^l [x_i, x_j, y_k]^t$  можно удалить из записи элемента  $g$ , уменьшив в записи  $g$  число коммутаторов.

Случай  $[x_i, y_k] \notin N$  и  $[x_j, y_k] \in N$  аналогичен предыдущему.

Случаи, когда в записи  $g$  участвуют коммутаторы видов  $[x_i, y_j, y_k]$ ,  $[y_j, x_i, y_k]$ ,  $[y_j, y_k, x_i]$  аналогичны рассмотренным. Теорема доказана.

Группа  $G$  из следствия 2 называется частично коммутативной в многообразии  $\mathcal{N}_3$ . Отметим, что квазимногообразия, порождённые частично коммутативными группами в классе метабелевых групп, исследовались в [?]. Индукцией по числу порождающих получаем

**Следствие 2.** *Предположим, что группа  $G$  имеет в  $\mathcal{N}_3$  представление*

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n; \Sigma \rangle,$$

где  $\Sigma$  — любое множество определяющих соотношений вида  $[x_i, x_j]$ . Тогда  $G \in qF_2(\mathcal{N}_3)$ .

Примерами применения теоремы 4 служат утверждения 2 и 3.

**Предложение 2.** *Пусть группа  $A_m$  имеет в  $\mathcal{N}_3$  следующее представление:*

$$A_m = \langle \{x_i, y_i, z_i \mid i = 1, \dots, m\}; \prod_{i=1}^m [x_i, y_i, z_i] = 1 \rangle.$$

Тогда  $A_m \in qF_2$ .

Доказательство индукцией по  $m$ . Вводя удобные обозначения, считаем, что  $A_1 = \langle x_1, x_2, x_3; [x_3, x_1, x_2] = 1 \rangle$  в  $\mathcal{N}_3$ . Возьмём произвольный неединичный элемент  $g$  из  $A_1$ .

Ввиду признака принадлежности (лемма 2) надо установить существование гомоморфизма  $\varphi$  группы  $A_1$  в подходящую группу  $M \in qF_2$ ,

при котором образ  $g$  не равен единице. Заметим, что  $A_1/\gamma_3(A_1) \cong F_{3m}(\mathcal{N}_2) \in qF_2(\mathcal{N}_2) \subseteq qF_2$ . Если  $g \notin \gamma_3(A_1)$ , то в качестве  $\varphi$  берём естественный гомоморфизм  $\varphi : A_1 \rightarrow A_1/\gamma_3(A_1)$ .

Пусть  $g \in \gamma_3(A_1)$ . Тогда  $g$  можно записать в виде произведения базисных коммутаторов. Считаем, что

$$g = [x_3, x_1, x_1]^{k_1} [x_3, x_1, x_3]^{k_2} [x_3, x_2, x_2]^{k_3} \times \\ \times [x_3, x_2, x_3]^{k_4} [x_2, x_1, x_1]^{k_5} [x_2, x_1, x_2]^{k_6} [x_2, x_1, x_3]^{k_7}.$$

Если  $k_3 \neq 0$  либо  $k_4 \neq 0$ , то по лемме 1 существует гомоморфизм  $\varphi : A_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^\varphi = 1, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$ , при этом  $g^\varphi = [b, a, a]^{k_3} [b, a, b]^{k_4} \neq 1$ . Следовательно, при  $k_3 \neq 0$  либо  $k_4 \neq 0$   $\varphi$  — требуемый гомоморфизм.

Аналогично, существует гомоморфизм  $\varphi_2 : A_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^{\varphi_2} = a, x_2^{\varphi_2} = 1, x_3^{\varphi_2} = b$ , при этом  $g^{\varphi_2} = [b, a, a]^{k_1} [b, a, b]^{k_2} \neq 1$ . Значит, при  $k_1 \neq 0$  либо  $k_2 \neq 0$   $\varphi_2$  — искомый гомоморфизм.

Аналогично рассматриваем гомоморфизм  $\varphi_3 : A_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^{\varphi_3} = a, x_2^{\varphi_3} = b, x_3^{\varphi_3} = 1$ , при нём  $g^{\varphi_3} = [b, a, a]^{k_5} [b, a, b]^{k_6} \neq 1$ . Значит, при  $k_5 \neq 0$  либо  $k_6 \neq 0$   $\varphi_3$  — искомый гомоморфизм.

Можно и будем предполагать, что  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$ . В этом случае рассматриваем гомоморфизм  $\varphi_4 : A_1 \rightarrow F_2$ , при котором  $x_1^{\varphi_4} = a, x_2^{\varphi_4} = b, x_3^{\varphi_4} = a$ , при нём  $g^{\varphi_4} = [b, a, a]^{k_7} \neq 1$ . Значит,  $\varphi_4$  — нужный гомоморфизм. Итак,  $A_1 \in qF_2$ .

$A_m/\langle [x_1, y_1, z_1] \rangle \cong A_1 * A_{m-1}$ . Ввиду индукции и теоремы 4  $A_m/\langle [x_1, y_1, z_1] \rangle \in qF_2$ . По признаку принадлежности (лемма 2) достаточно построить гомоморфизм  $\varphi : A_m \rightarrow F_2$  такой, что  $[x_1, y_1, z_1]^\varphi \neq 1$ . Таким гомоморфизмом является, например, гомоморфизм  $\varphi$ , при котором  $x_1^\varphi = a, y_1^\varphi = b, z_1^\varphi = b, x_2^\varphi = a^{-1}, y_2^\varphi = b, z_2^\varphi = b$ , образы остальных порождающих группы  $A_m$  равны 1. Существование этого гомоморфизма следует из леммы 1. Утверждение доказано.

**Предложение 3.** Пусть группа  $A_{rm}$  ( $r \geq 2$ ) задана в  $\mathcal{N}_3$  порождающими

$$\{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r\}$$

и определяющими соотношениями

$$[a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] = \dots = [a_r, b_r, d_r] \prod_{i=1}^m [x_{ir}, y_{ir}, z_{ir}],$$

и всеми соотношениями вида

$$[f_u, f_v] = 1 \text{ при } u \neq v,$$

где  $f_l$  пробегает множество  $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \dots, m\}$ . Тогда  $A_{rm} \in qF_2$  и  $A_{rm}/\langle [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] \rangle \in qF_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 2  $A_t \in qF_2$  при каждом  $t$ . Пусть  $c = [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^m [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] \in A_{rm}$ . Группа  $A_{rm}/\langle c \rangle$  может быть собрана из групп, изоморфных  $A_{m+1}$ , при помощи свободных произведений и фактор-групп. При этом условия теоремы 4 будут выполнены. Итак, по теореме 4  $A_{rm}/\langle c \rangle \in qF_2$ . По признаку принадлежности (лемма 2) достаточно построить гомоморфизм  $\varphi : A_{rm} \rightarrow F_2$  такой, что  $c^\varphi \neq 1$ . Таким гомоморфизмом является, например, гомоморфизм  $\varphi$ , при котором  $a_i^\varphi = b, b_i^\varphi = a, d_i^\varphi = a (i = 1, \dots, r)$ , образы остальных порождающих группы  $A_{rm}$  равны 1. Существование этого гомоморфизма следует из леммы 1. Утверждение доказано.

В заключение хочу выразить благодарность Шаховой Светлане за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

## References

- [1] A. I. Mal'tsev, *Nilpotent torsion-free groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **13**:3 (1949), 201–212.
- [2] M. I. Kargapolov, *On the  $\pi$ -completion of locally nilpotent groups*, Algebra i Logika. Seminar, **1**:1 (1962), 5–13.  
Алгебра и логика. Семинар, **1**:1 (1962), 5–13.
- [3] A. I. Budkin, *A lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra and Logic, **33**:1 (1994), 14–21.
- [4] A. N. Fedorov, *Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties*, Sib. Math. J., **21**:6 (1980), 840–850.
- [5] A. I. Budkin, *Quasivarieties of groups*, Barnaul, Altay State University, 2002.
- [6] M. I. Kargapolov and Yu. I. Merzlyakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1979).
- [7] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Consultants Bureau, New York (1998).
- [8] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1967).
- [9] A. I. Malcev, *Algebraic Systems*, Springer and Akademie, Berlin, Heidelberg, and New York (1973).
- [10] A. I. Budkin, V. A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra and Logic, **14**:2 (1975), 73–84.
- [11] A. N. Fedorov, *Quasi-identities of a free 2-nilpotent group*, Math. Notes, **40**:5 (1986), 837–841.
- [12] E. I. Timoshenko, *Quasivarieties generated by partially commutative groups*, Sib. Math. J., 2013, **54**:4 (2013), 722–730.

ALEXANDR IVANOVICH BUDKIN  
 ALTAI STATE UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 61,  
 656049, BARNAUL, RUSSIA  
 E-mail address: [budkin@math.asu.ru](mailto:budkin@math.asu.ru)