

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
АНТИПЛОСКОГО СДВИГА
АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТАЭ.И. ЛЕОНОВА *Представлено* Е.М. Рудым

Abstract: The static problem of anti-plane shear of a thermoelastic composite, stitched with reinforcing threads, is considered. The original formulation contains a small positive parameter ε , which characterizes the distance between neighboring threads. It is also assumed that the thermomechanical characteristics of the composite body depend on ε . The asymptotic behavior of solutions as the parameter ε tends to zero is investigated. The limiting transition as $\varepsilon \rightarrow 0+$ is mathematically rigorously justified and represents a homogenization procedure. This transition is based on the application of the standard Allaire–Nguetseng two-scale convergence method and its version by G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung for homogenization on thin inclusions. The result consists of the construction of a limit averaged model of anti-plane shear of the composite material. Using the newly obtained model, numerical

LEONOVA, E.I., HOMOGENIZATION OF THE STATIC ANTI-PLANE SHEAR MODEL FOR THE REINFORCED COMPOSITE.

© 2024 ЛЕОНОВА Э.И.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием Министерства науки и высшего образования Российской Федерации "Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики" (2024-26 гг.) (контракт: FZMW-2024-0003). Численный эксперимент выполнен на вычислительном кластере ЦКП «Сибирский суперкомпьютерный центр» (Вычислительный комплекс РСК «Торнадо»), согласно Плану мероприятий по реализации соглашения между ИГиЛ СО РАН и АлтГУ от 12.10.2009 г.

Поступила 15 апреля 2024 г., опубликована 8 ноября 2024 г.

experiments are performed, which show consistency of the theoretical conclusions.

Keywords: composite material, thin inclusion, anti-plane shear, homogenization, numerical experiment.

1 Введение

Композитные материалы применяются в строительстве, медицине, автомобильной и авиационной промышленности. Эти материалы состоят из нескольких компонентов с различными свойствами, что позволяет создавать материалы с новыми характеристиками. Простые примеры композитов — это железобетон, углепластик, стеклопластик. Важно правильно уметь строить математические модели для таких материалов, поскольку они обладают сильной неоднородностью, что усложняет задачу.

Вопросам математического моделирования композитных материалов посвящено множество работ. Сравнительно подробный обзор можно найти, например, в [1, Введение]. В настоящей статье изучается волокнистый композит, который представляет собой термоупругую связующую матрицу, прошитую прямолинейными термоупругими параллельными друг другу нитями нулевой толщины. Речь идёт о бесконечно тонких включениях, поскольку в данной работе включения — это отрезки прямых на плоскости (т. е. сингулярные объекты с точки зрения двумерной теории упругости [2]). Для композита ставится стационарная задача антиплоского сдвига, которая представляет собой краевую задачу для системы, состоящей из эллиптического уравнения равновесия, эллиптического уравнения баланса тепла, снабженной однородными условиями Дирихле для смещения и температуры на внешней границе композитного тела и условиями на тонких включениях (см. далее задачу V_ε -diff в главе 2). Условия на тонких включениях являются результатом апскейлинга модели-прототипа: в модели прототипе армирующие нити имели конечную ненулевую толщину δ , а апскейлинг состоял в предельном переходе при $\delta \rightarrow 0+$. Строгие обоснования предельных переходов при $\delta \rightarrow 0+$, касающихся изучаемого и схожих случаев, изложены в [1, 3–5]. Имеются работы, в которых предельный переход по толщине включения проведен формальными методами (см., например, [6–8]). В настоящей статье исходная задача, в которой композит содержит несколько тонких включений, называется задачей V_ε . Эта задача содержит малый параметр $\varepsilon > 0$, который характеризует расстояние между двумя соседними включениями и от которого также определенным образом зависят термомеханические характеристики связующей матрицы и армирующих нитей.

Данная статья обобщает результат работы [1], в которой была изучена постановка с постоянными термомеханическими характеристиками

матрицы и нитей, что механически соответствует случаю, когда отдельные компоненты композитного материала, то есть связующая матрица и множество нитей, являются однородными. Отличие данной работы от [1] заключается в том, что теперь учтен эффект неоднородности, т. е. коэффициенты задачи в каждой из компонент являются переменными величинами, а так же в том, что учтены распределенные силы и источники тепла на нитях. Статья служит дополнением обширного исследования [1, 9, 10], посвященного вопросу гомогенизации краевых задач динамики и статики для армированных композитных материалов. В задаче совершается предельный переход по параметру ε , который математически строго обосновывается с помощью метода двухмасштабной сходимости. Кроме того, проводится численное исследование вопроса о сходимости решений исходной модели к решению усредненной модели.

Завершим настоящее введение изложением дальнейшего содержания работы. В главе 2 поставлена задача, в которой композитный материал состоит из связующей матрицы, прошитой несколькими термоупругими нитями (задача V_ε -diff и ее вариационная постановка — задача V_ε). В процессе исследования данная задача усредняется методом двухмасштабной сходимости, инструментарий которого изложен в главе 3. В результате процедуры гомогенизации выводится корректная усредненная модель в интегральной и дифференциальной форме, которая называется задачей H и H -diff, соответственно (глава 4). В последней главе — главе 5 — приведены результаты численных экспериментов, которые дают некоторое представление о скорости сходимости решений исходной задачи к решению усредненной задачи, см. таблицу 1.

2 Модель плоского композита, прошитого конечным числом нитей

Сопоставим композитному телу множество $\Omega \subset \mathbb{R}_x^2$ — ограниченную область с липшицевой границей $\partial\Omega$. Зададим тонкие включения в композитном материале формулой

$$\gamma^\varepsilon = \Omega \cap \{x_2 = (\xi_2^* + j)\varepsilon, j \in \mathbb{Z}\}, \varepsilon > 0,$$

где значение $\xi_2^* \in (0, 1)$ задано. Предполагаем, что значение ε достаточно мало ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ фиксировано), так что γ^ε непусто.

Через $L^2(\gamma^\varepsilon)$ определим стандартное пространство Лебега функций $w: \gamma^\varepsilon \mapsto \mathbb{R}$. Через dv^ε обозначим одномерную меру Лебега на γ^ε , т. е. $dv^\varepsilon(\mathbf{x}) = dx_1$ на каждом отрезке $\{x_* < x_1 < x_{**}, x_2 = (\xi_2^* + j)\varepsilon, j \in \mathbb{Z}\} \subset \gamma^\varepsilon$. Говорим, что функция $w: \gamma^\varepsilon \mapsto \mathbb{R}$ принадлежит пространству $H_0^1(\gamma^\varepsilon)$, если $w, \partial_{x_1} w \in L^2(\gamma^\varepsilon)$ и w обращается в нуль на $\partial\gamma^\varepsilon = \bar{\gamma}^\varepsilon \cap \partial\Omega$ в смысле следа.

Наиболее детализированное определение пространств $L^2(\gamma^\varepsilon)$ и $H_0^1(\gamma^\varepsilon)$ можно найти в [1, стр. 296].

Введем в рассмотрение банахово пространство

$$V^\varepsilon = \{(u, \theta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : u|_{\gamma^\varepsilon} \in H_0^1(\gamma^\varepsilon), \theta|_{\gamma^\varepsilon} \in H_0^1(\gamma^\varepsilon)\},$$

снабженное нормой

$$\|(u, \theta)\|_{V^\varepsilon} = (\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\gamma^\varepsilon)}^2 + \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta\|_{H_0^1(\gamma^\varepsilon)}^2)^{1/2}.$$

Связующая матрица $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$ и множество включений γ^ε подчиняются фундаментальным законам линейной теории термоупругости [11]. В описании связующей матрицы $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$ имеем: a — это положительный коэффициент упругости, β — коэффициент линейного теплового расширения, λ — положительный коэффициент теплопроводности, f — объемная сила, приложенная к $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$, и g — распределенный источник тепла в $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$. В описании множества включений γ^ε имеем: a_{in} — положительный коэффициент упругости, β_{in} — коэффициент линейного теплового расширения, λ_{in} — положительный коэффициент теплопроводности, h^ε — объемная сила, приложенная к γ^ε , и w^ε — распределенный источник тепла на γ^ε .

Предполагается, что коэффициенты a , β , λ , объемная сила f и распределенный источник тепла g в общем случае зависят от ε и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a^\varepsilon &:= a\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \beta^\varepsilon := \beta\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \lambda^\varepsilon := \lambda\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \\ f^\varepsilon &:= f\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad g^\varepsilon := g\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (1a)$$

где функции $a = a(\mathbf{x}, \xi_2)$, $\beta = \beta(\mathbf{x}, \xi_2)$, $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \xi_2)$, $f = f(\mathbf{x}, \xi_2)$ и $g = g(\mathbf{x}, \xi_2)$ — это заданные 1-периодические по ξ_2 функции и параметр $p \in \mathbb{Z}$ также задан.

Относительно термомеханических характеристик включений предполагаем, что

$$\begin{aligned} a_{in}^\varepsilon &:= \varepsilon^p a_{in}(x_1), \quad \beta_{in} := \beta_{in}(x_1), \quad \lambda_{in}^\varepsilon := \varepsilon^p \lambda_{in}(x_1), \\ h^\varepsilon &:= \varepsilon^p h(x_1), \quad w^\varepsilon := \varepsilon^p w(x_1) \text{ на } \gamma^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1b)$$

где $a_{in} = a_{in}(x_1)$, $\beta_{in} = \beta_{in}(x_1)$, $\lambda_{in} = \lambda_{in}(x_1)$, $h = h(x_1)$ и $w = w(x_1)$ — заданные функции.

Через $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\theta^\varepsilon = \theta^\varepsilon(\mathbf{x})$ обозначим соответственно распределения смещений и температуры в Ω . Функции u^ε и θ^ε являются искомыми.

Теперь с учетом введенных обозначений и предположений формулируем следующую вариационную постановку статической задачи антиплоского сдвига для термоупругого композита, прошитого конечным множеством тонких нитей.

Задача B_ε . Для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при фиксированном $p \in \mathbb{Z}$ требуется найти пару функций $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in V^\varepsilon$, удовлетворяющих интегральным равенствам

$$\int_{\Omega} \left\{ a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x v - a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \beta \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \theta^\varepsilon \mathbf{I} \cdot \nabla_x v \right\} d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon^p \int_{\gamma^\varepsilon} a_{in}(x_1) (\partial_{x_1} u^\varepsilon - \beta_{in}(x_1) \theta^\varepsilon) \partial_{x_1} v d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \quad (2a)$$

$$= \int_{\Omega} f \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \varepsilon^p \int_{\gamma^\varepsilon} h(x_1) v(\mathbf{x}) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} \lambda \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \nabla_x \vartheta d\mathbf{x} + \varepsilon^p \int_{\gamma^\varepsilon} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^\varepsilon \cdot \partial_{x_1} \vartheta d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \quad (2b) \\ = \int_{\Omega} g \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \vartheta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \varepsilon^p \int_{\gamma^\varepsilon} w(x_1) \vartheta(\mathbf{x}) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

для любых пар пробных функций $(v, \vartheta) \in V$.

В постановке задачи B_ε и далее используется обозначение $\mathbf{I} = (1, 1)^T$ для вектора в \mathbb{R}_x^2 с обеими компонентами, равными единице.

Заметим, что в смысле теории распределений задача B_ε эквивалентна следующей краевой задаче для системы дифференциальных уравнений. Иными словами, *слабое обобщенное* решение нижеследующей задачи понимается в смысле решения задачи B_ε .

Задача B_ε -diff. Для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при фиксированных $p \in \mathbb{Z}$ требуется найти пару функций $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in V^\varepsilon$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и граничных условий:

$$- \operatorname{div}_x \left\{ a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \left(\nabla_x u^\varepsilon - \beta \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \theta^\varepsilon \mathbf{I} \right) \right\} = f \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma^\varepsilon, \quad (3a)$$

$$- \operatorname{div}_x \left\{ \lambda \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x \theta^\varepsilon \right\} = g \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma^\varepsilon, \quad (3b)$$

$$u = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \quad (3c)$$

$$\varepsilon^p h + [a(\nabla_x u^\varepsilon - \beta \theta^\varepsilon \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\nu}] = -\varepsilon^p \partial_{x_1} (a_{in}(\partial_{x_1} u^\varepsilon - \beta_{in} \theta^\varepsilon)) \quad \text{на } \gamma^\varepsilon, \quad (3d)$$

$$\varepsilon^p w + [\lambda \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}] = -\varepsilon^p \partial_{x_1} (\lambda_{in} \partial_{x_1} \theta^\varepsilon) \quad \text{на } \gamma^\varepsilon, \quad (3e)$$

где $\boldsymbol{\nu} = (0, 1)$ — единичный вектор в \mathbb{R}^2 и через $[\phi]$ обозначены скачки всевозможных функций ϕ на γ^ε .

В формулировке задачи B_ε -diff, (3a) — это уравнение равновесия термоупругого тела, (3b) — уравнение баланса тепла (стационарное уравнение теплопроводности), (3c) — условия жесткого закрепления и равенства нулю температуры на внешней границе тела, условия (3d) и (3e) — это соответственно уравнения равновесия и баланса тепла армирующих нитей, находящихся под действием термомеханических реакций со

стороны связующей матрицы $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$ и подверженных распределенному механическому и тепловому воздействию извне за счет сил $h^\varepsilon = \varepsilon^p h$ и источников $w^\varepsilon = \varepsilon^p w$.

Как очевидно из формулировки задачи V_ε -diff (и V_ε), параметр p отражает контрастность термомеханических свойств связующей матрицы и тонких включений [9]. Исходя из обширного объема результатов в теории усреднения, следует ожидать, что различные значения параметра p приведут к различным (возможно, к существенно различным) усредненным моделям. В статье подробно рассматривается только случай $p = 1$. При таком выборе параметра p вклад термоупругих свойств нитей и связующей матрицы оказывается равноправным, что соответствует тому случаю, когда нити оказывают реальный армирующий эффект в композитном материале. В свою очередь, из дальнейших рассмотрений в статье станет очевидно, что если $p > 1$, то в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0+$ вклад коэффициентов $a_{in}, \beta_{in}, \lambda_{in}$ и правых частей h и w окажется нулевым. Физически это означает, что нити слишком мягкие, имеют очень низкую теплопроводность и теплоемкость, а значит их армирующий эффект весьма незначителен. В случае $p < 1$ следует ожидать, что свойства нитей будут доминировать над свойствами связующей матрицы, но рассмотрение этого случая лежит за пределами настоящей статьи.

Прежде, чем приступить к изучению задачи V_ε , уточним условия на ее данные в следующем виде.

Условия W. 1. Функции a, β, λ дифференцируемы по (\mathbf{x}, ξ_2) и 1-периодические по ξ_2 . Функции $a_{in}, \beta_{in}, \lambda_{in}$ дифференцируемы по x_1 .

2. Существуют положительные постоянные a_*, a^*, λ_* и λ^* такие, что

$$a_* \leq a(\mathbf{x}, \xi_2) \leq a^*, \quad \lambda_* \leq \lambda(\mathbf{x}, \xi_2) \leq \lambda^* \quad \forall (\mathbf{x}, \xi_2) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R},$$

$$a_* \leq a_{in}(x_1) \leq a^*, \quad \lambda_* \leq \lambda_{in}(x_1) \leq \lambda^* \quad \forall x_1 \in [-l_1, l_1],$$

где

$$l_1 = \max_{(x'_1, x'_2) \in \bar{\Omega}} |x'_1|. \quad (4)$$

3. Функции f и g непрерывны по ξ_2 на $[0, 1]$ и 1-периодичны по ξ_2 на \mathbb{R} при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ и выполняются требования

$$f \in C([0, 1]; L^2(\Omega)), \quad g \in C([0, 1]; L^2(\Omega)).$$

Функции h и w определены и непрерывны на отрезке $[-l_1, l_1]$.

При фиксированных значениях ε и p задача V_ε корректна. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия W. Тогда при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $p \in \mathbb{Z}$ задача V_ε имеет единственное решение. При этом имеют место равномерные по ε оценки

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \quad \|\theta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{p/2} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\gamma^\varepsilon)} \leq C_1, \quad \varepsilon^{p/2} \|\theta^\varepsilon\|_{H^1(\gamma^\varepsilon)} \leq C_1, \quad (6)$$

в которых положительная постоянная C_1 не зависит от ε , а зависит только от a_* , λ_* , $\|\beta\|_{C(\bar{\Omega} \times [0,1])}$, $\|\beta_{in}\|_{C[-l_1, l_1]}$, $\|f\|_{C([0,1]; L^2(\Omega))}$, $\|g\|_{C([0,1]; L^2(\Omega))}$, $\|h\|_{C[-l_1, l_1]}$ и $\|w\|_{C[-l_1, l_1]}$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении теоремы Лакса–Мильграма и стандартной техники вывода априорных оценок в теории обобщенных решений эллиптических уравнений и принципиально проводится точно так же, как обоснование теоремы 1 в [1].

Дальнейшей целью статьи является проведение и обоснование предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в семействе решений задачи V_ε .

3 Инструментарий метода двухмасштабной сходимости

Процедура гомогенизации задачи V_ε при $\varepsilon \rightarrow 0+$, т. е. предельный переход в интегральных равенствах (2a) и (2b), основана на применении стандартного метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуэтсенга и его модификации для усреднения на многообразиях малой размерности, предложенной Г. Аллером, А. Дамламяном и У. Хорнунгом [12]. Чтобы сформулировать необходимые для дальнейших рассуждений положения этого метода, введем сначала некоторые пространства периодических функций.

Обозначение 1. В пространстве \mathbb{R}_ξ^2 переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, через Ξ обозначим единичный квадрат $[0, 1)^2$. Следуя общепринятой в теории гомогенизации терминологии, называем Ξ ячейкой периодичности и говорим, что переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ являются быстрыми (или микроскопическими) переменными.

Определение 1. Функция $f = f(\xi)$, определенная на \mathbb{R}_ξ^2 и удовлетворяющая равенствам

$$f(\xi + e_1) = f(\xi), \quad f(\xi + e_2) = f(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_\xi^2,$$

называется Ξ -периодической или 1-периодической по ξ .

Здесь и далее, $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ — векторы стандартного декартова базиса в \mathbb{R}^2 . Используя это определение, можно ввести пространства периодических функций следующим общепринятым образом.

Определение 2. Пусть $C_\#^\infty(\Xi)$ — подмножество $C^\infty(\mathbb{R}_\xi^2)$, состоящее из Ξ -периодических функций. Через $C_\#^1(\Xi)$, $C_\#^1(\Xi)$, и $H_\#^1(\Xi)$ обозначим замыкание $C_\#^\infty(\Xi)$ в нормах пространств $C(\Xi)$, $C^1(\Xi)$, и $H^1(\Xi)$, соответственно.

Изложим понятие двухмасштабной сходимости и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей, следуя работам [13, 14].

Определение 3. Пусть $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ — последовательность в $L^2(\Omega)$. Говорим, что $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ двухмасштабно сходится к функции $v_0 \in L^2(\Omega \times \Xi)$,

если для всех пробных функций $\varphi \in C(\bar{\Omega}; C_{\sharp}(\Xi))$ выполняется предельное соотношение

$$\int_{\Omega} v^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\Xi} v_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}.$$

Предложение 1. (Существование двухмасштабно сходящихся последовательностей.) *Предположим, что $\{v^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — ограниченное семейство в $L^2(\Omega)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{v^{\varepsilon'}\}$ и функция $v_0 \in L^2(\Omega \times \Xi)$, такие, что $\{v^{\varepsilon'}\}$ сходится двухмасштабно к v_0 при $\varepsilon' \rightarrow 0+$ в смысле определения 3.*

Предложение 2. (Двухмасштабная сходимост ь градиентов.) *Предположим, что последовательность $\{v^{\varepsilon}\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ слабо сходится в $H^1(\Omega)$ к некоторой функции $v_0 \in H^1(\Omega)$. Тогда*

(i) $\{v^{\varepsilon}\}$ двухмасштабно сходится к v_0 в смысле определения 3;

(ii) существуют подпоследовательность $\{\varepsilon' \rightarrow 0+\}$ и функция $v_1 = v_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, принадлежащая $L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(\Xi))$, такие, что

$$\nabla v^{\varepsilon'} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0+} \nabla_x v_0 + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} v_1 \text{ двухмасштабно в смысле определения 3.}$$

Также далее будем использовать понятие и ряд свойств двухмасштабной сходимости для последовательностей функций, заданных на тонких включениях, которые в задаче представляют собой отрезки прямых на плоскости. Сначала дадим описание тонких включений в форме, удобной для использования инструментария двухмасштабной сходимости, а затем изложим необходимые понятия и результаты по двухмасштабной сходимости на тонких включениях.

Зададим структуру шаблонной ячейки периодичности Ξ , как показано на рисунке 1(b). Описание этой структуры состоит в том, что внутри Ξ тонким включением γ_* является отрезок, параллельный оси абсцисс $O\xi_1$ и отстоящий от этой оси на расстояние $\xi_2^* = \text{const} \in (0, 1)$, т. е.

$$\gamma_* = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \Xi: \xi_2 = \xi_2^*\}.$$

Построим периодическое повторение Ξ на все \mathbb{R}_{ξ}^2 и положим $\gamma_*^k := \gamma_* + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\xi}^2$. Очевидно, что объединение включений $\gamma_{\text{utd}} = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \gamma_*^k$ представ-

ляет собой бесконечное число прямых в \mathbb{R}_{ξ}^2 , параллельных оси $O\xi_1$ и находящихся на расстоянии друг от друга, равном единице:

$$\gamma_{\text{utd}} = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2: -\infty < \xi_1 < +\infty, \xi_2 = \xi_2^* + k_2, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

На основе этой конструкции введем в рассмотрение регулярную ε -сеть, покрывающую Ω (см. рис. 1(a)). Каждая ячейка сети представляет собой квадрат Ξ_i^{ε} со стороной ε . Каждый квадрат Ξ_i^{ε} , $i = 1, 2, \dots, N$

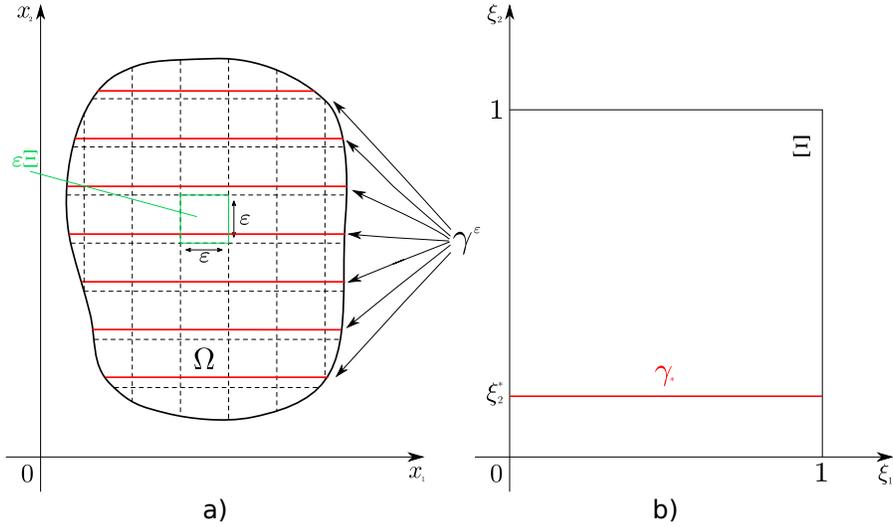


Рис. 1. (а) Покрытие области Ω регулярной ε -сетью.
 (б) Шаблонная ячейка периодичности.

($N = N(\varepsilon) = O(1/\varepsilon^2)$ для $\varepsilon \ll 1$), получается из Ξ посредством линейного гомеоморфизма Π_i^ε , состоящего из сжатия в $1/\varepsilon$ раз и параллельного переноса вектора $\varepsilon \mathbf{k}$, где \mathbf{k} пробегает все значения из \mathbb{Z}^2 такие, что $\Xi_i^\varepsilon \cap \Omega \neq \emptyset$. Таким образом, множество γ_{intd} сжимается в $1/\varepsilon$ раз, и пересечение этого сжатия с Ω в точности образует множество γ^ε .

Следующие основные понятия и результаты о двухмасштабной сходимости на тонких включениях изложены в работе [12].

Определение 4. Пусть $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ — последовательность из $L^2(\gamma^\varepsilon)$. Она называется *двухмасштабно сходящейся* к функции $w_0 \in L^2(\Omega \times \gamma_*)$ ($w_0 = w_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*)$), если для всех $\varphi \in C(\Omega; C_\#(\Xi))$ выполняется предельное соотношение

$$\varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} w^\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\gamma_*} w_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*) \varphi(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*) d\xi_1 d\mathbf{x}.$$

Очевидно, что в этом определении и далее интеграл по множеству γ_* — это интеграл по $d\xi_1$ на интервале $\{0 < \xi_1 < 1\}$.

Справедлив следующий фундаментальный результат о существовании двухмасштабных сходящихся последовательностей.

Предложение 3. Пусть $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ — последовательность в $L^2(\gamma^\varepsilon)$, такая, что

$$\varepsilon^{1/2} \|w^\varepsilon\|_{L^2(\gamma^\varepsilon)} \leq C_2,$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от ε . Тогда существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon \rightarrow 0+\}$, по-прежнему обозначаемая через ε , и

предельная функция $w_0 \in L^2(\Omega \times \gamma_*)$ ($w_0 = w_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*)$), такие, что

$$w^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} w_0 \quad \text{двухмасштабно в смысле определения 4.}$$

Следующие утверждения позволяют при наличии необходимых оценок перейти к пределу в интегралах, содержащих производные и следы на γ^ε .

Предложение 4. (i) Пусть $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ — последовательность в $H^1(\Omega)$, такая, что

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla_x w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3,$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от ε . Тогда при $\varepsilon > 0$ след w^ε на γ^ε существует и удовлетворяет оценке

$$\varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} |w^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) \leq C_4,$$

где постоянная $C_4 > 0$ не зависит от ε .

(ii) Пусть в дополнение к условиям пункта (i) в соответствии с предложением 1 выполняется предельное соотношение

$$\int_{\Omega} w^\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\Xi} w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C(\bar{\Omega}; C_{\#}(\Xi)),$$

с некоторой функцией $w_0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Xi))$. Другими словами, пусть $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ сходится к w_0 двухмасштабно в обычном смысле, т. е. в смысле определения 3.

Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon' \rightarrow 0+\}$ при $\{\varepsilon \rightarrow 0+\}$ такая, что последовательность следов $w^{\varepsilon'}$ на $\gamma^{\varepsilon'}$ сходится к следу w_0 на γ двухмасштабно в смысле определения 4 при $\varepsilon' \rightarrow 0+$:

$$\varepsilon' \int_{\gamma^{\varepsilon'}} w^{\varepsilon'}(\mathbf{x}) \varphi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon'}\right) d\sigma^{\varepsilon'}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\gamma_*} w_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*) \varphi(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2^*) d\xi_1 d\mathbf{x},$$

$$\forall \varphi \in C(\bar{\Omega}; C_{\#}(\Xi)).$$

(iii) Кроме того, в предположении пунктов (i) и (ii) справедливо предельное соотношение для градиентов:

$$\varepsilon' \int_{\Omega} \nabla_x w^{\varepsilon'}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon'}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\Xi} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x},$$

$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in C(\bar{\Omega}; C_{\#}(\Xi))^2.$$

4 Гомогенизация задачи B_ε

4.1. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$: формулировка основного результата и вывод двухмасштабной модели. В начале этого параграфа сформулируем основной результат настоящей статьи — теорему о гомогенизации и предельную усредненную модель.

Теорема 2. Пусть $p = 1$ и данные задачи B_ε подчиняются условиям W . Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0+$ семейство $\{(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ решений задачи B_ε слабо сходится в $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ к решению (u^*, θ^*) задачи H , сформулированной ниже. Более того, (u^*, θ^*) является единственным решением задачи H .

Задача H . (Предельная усредненная модель — вариационная постановка.) Требуется найти предельные эффективные распределения смещений $u^* \in H_0^1(\Omega)$ и температур $\theta^* \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющих вариационному уравнению равновесия

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x})(\nabla_x u^*(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})\theta^*(\mathbf{x})) \cdot \nabla_x v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\hat{f}(\mathbf{x}) + h(x_1))v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7a)$$

для всевозможных пробных функций $v \in H_0^1(\Omega)$ и вариационному уравнению баланса тепла

$$\int_{\Omega} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\nabla_x \theta^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla_x \vartheta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\hat{g}(\mathbf{x}) + w(x_1))\vartheta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7b)$$

для всевозможных пробных функций $\vartheta \in H_0^1(\Omega)$.

В уравнениях (7a) и (7b), $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — это матрица эффективных модулей упругости, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ — вектор эффективных коэффициентов линейного теплового расширения, $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$ — матрица эффективных коэффициентов теплопроводности, $\hat{f}(\mathbf{x})$ — средняя объемная сила и $\hat{g}(\mathbf{x})$ — средний распределенный источник тепла. В постановке задачи H все эти термомеханические характеристики являются заданными и однозначно определяются микроструктурой, т. е. данными задачи B_ε . Для их точного описания сначала введем следующее обозначение.

Обозначение 2. Для любой 1-периодической по ξ_2 функции $\phi = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ через $\hat{\phi}$ обозначим ее среднее значение по периоду $0 \leq \xi_2 < 1$:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \xi_1) = \int_0^1 \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi_2.$$

Аналогично, для любой 1-периодической по ξ_1 функции $\phi = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ через $\tilde{\phi}$ обозначим ее среднее значение по периоду $0 \leq \xi_1 < 1$:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, \xi_2) = \int_0^1 \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi_1.$$

С учетом этого обозначения теперь запишем представления эффективных характеристик в задаче Н:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \widehat{a}(\mathbf{x}) + a_{in}(x_1) & 0 \\ 0 & (\widehat{a^{-1}}(\mathbf{x}))^{-1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\widehat{a}(\mathbf{x})\widehat{\beta}(\mathbf{x}) + a_{in}(x_1)\beta_{in}(x_1)}{\widehat{a}(\mathbf{x}) + a_{in}(x_1)} \\ \widehat{\beta}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \widehat{\lambda}(\mathbf{x}) + \lambda_{in}(x_1) & 0 \\ 0 & (\widehat{\lambda^{-1}}(\mathbf{x}))^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 f(\mathbf{x}, \xi_2) d\xi_2, \quad \widehat{g}(\mathbf{x}) = \int_0^1 g(\mathbf{x}, \xi_2) d\xi_2. \quad (11)$$

В смысле теории распределений задача Н эквивалентна следующей краевой задаче для системы двух эллиптических уравнений. Другими словами, *слабое обобщенное* решение нижеследующей краевой задачи понимается в смысле решения задачи Н.

Задача Н-diff. (Предельная усредненная модель — дифференциальная постановка.) Требуется найти предельные эффективные распределения смещений $u^* = u^*(\mathbf{x})$ и температур $\theta^* = \theta^*(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнению равновесия

$$- \operatorname{div}_x(\mathbf{A}(\mathbf{x})(\nabla_x u^*(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})\theta^*(\mathbf{x}))) = \widehat{f}(\mathbf{x}) + h(x_1), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12a)$$

уравнению баланса тепла

$$- \operatorname{div}_x(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\nabla_x \theta^*(\mathbf{x})) = \widehat{g}(\mathbf{x}) + w(x_1), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12b)$$

и однородным условиям Дирихле

$$\theta^*|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^*|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12c)$$

Доказательство теоремы 2 проведем в два этапа. Сначала выведем двухмасштабную модель следуя, в целом, изложению из [1, 10]. Затем с помощью стандартной техники проведем асимптотическую декомпозицию, т. е. разделим микроскопический и макроскопический масштабы, соответствующие переменным $\boldsymbol{\xi}$ и \mathbf{x} .

Введем предварительно одно полезное обозначение. Далее, через $\widetilde{\nabla}_x$ и $\widetilde{\partial}_{x_1}$ обозначаем полный градиент и полную производную, соответственно. То есть, для любой достаточно гладкой функции $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ положим

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_x \Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) &= \left(\nabla_x \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}/\varepsilon}, \\ \nabla_x \Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) &= (\nabla_x \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}/\varepsilon}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \Phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = (\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}/\varepsilon}, \end{aligned}$$

в краткой форме:

$$\tilde{\nabla}_x = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_\xi, \quad \tilde{\partial}_{x_1} = \partial_{x_1} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\xi_1}.$$

Теперь возьмем пробные функции в интегральных равенствах (2a) и (2b) в следующем виде:

$$v(\mathbf{x}) = v_\varepsilon(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad (13a)$$

$$\vartheta(\mathbf{x}) = \vartheta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right). \quad (13b)$$

Подставляя (13b) в (2b), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \lambda\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \tilde{\nabla}_x \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x} + \\ & + \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^\varepsilon \tilde{\partial}_{x_1} \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Omega} g\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x} + \\ & + \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} w(x_1) \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (14)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ для первого слагаемого в правой части (14) в силу предложения 1 и используя обозначение 2, получаем

$$\int_{\Omega} g\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \hat{g}(\mathbf{x}) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (15)$$

Для второго слагаемого в правой части (14) применим предложения 3 и 4.

$$\varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} w(x_1) \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} w(x_1) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (16)$$

Рассмотрим первый интеграл в левой части (14). Запишем подробно полный градиент и используем предложение 2. В итоге имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \lambda\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \tilde{\nabla}_x \left(\vartheta^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \vartheta^1\left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\Xi} \lambda(\mathbf{x}, \xi_2) (\nabla_x \theta^*(\mathbf{x}) + \nabla_\xi \theta^1(\mathbf{x}, \xi)) \cdot \\ & \cdot (\nabla_x \vartheta^0(\mathbf{x}) + \nabla_\xi \vartheta^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для второго интеграла в левой части (14) раскроем полную производную, используем формулу интегрирования по частям и предложения 3, 4:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^\varepsilon \tilde{\partial}_{x_1} \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Комбинируя (15)–(18), выводим двухмасштабное усредненное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Xi} \lambda(\mathbf{x}, \xi_2) (\nabla_x \theta^*(\mathbf{x}) + \nabla_\xi \theta^1(\mathbf{x}, \xi)) \cdot (\nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \nabla_\xi v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{g}(\mathbf{x}) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega} w(x_1) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь рассмотрим уравнение равновесия. Подставим (13a) в (2a), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x u^\varepsilon \cdot \tilde{\nabla}_x \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \beta \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \theta^\varepsilon \mathbf{I} \cdot \tilde{\nabla}_x \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \right\} d\mathbf{x} + \\ & + \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} a_{in}(x_1) (\partial_{x_1} u^\varepsilon - \beta_{in}(x_1) \theta^\varepsilon) \cdot \\ & \quad \cdot \tilde{\partial}_{x_1} \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Omega} f \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\mathbf{x} + \\ & + \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} h(x_1) \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (20)$$

Совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в каждом интеграле (20) по отдельности. Для первого слагаемого в правой части (20), получим

$$\int_{\Omega} f \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \hat{f}(\mathbf{x}) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (21)$$

Во втором слагаемом в правой части (20) используем предложение 3.

$$\varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} h(x_1) \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} h(x_1) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Запишем подробно интеграл по области Ω в левой части (20). Для этого раскроем полный градиент и воспользуемся предложением 2. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x u^\varepsilon \cdot \tilde{\nabla}_x \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - a \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \beta \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \theta^\varepsilon \mathbf{I} \cdot \tilde{\nabla}_x \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \right\} d\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega} \int_{\Xi} a(\mathbf{x}, \xi_2) (\nabla_x u^*(\mathbf{x}) + \nabla_\xi u^1(\mathbf{x}, \xi)) (\nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \nabla_\xi v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_{\Xi} a(\mathbf{x}, \xi_2) \beta(\mathbf{x}, \xi_2) \theta^*(\mathbf{x}) \mathbf{I} (\nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \nabla_\xi v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Осталось перейти к пределу во втором интеграле по γ^ε в (20). Помимо этого, раскроем полную производную и используем предложения 3 и 4.

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\gamma^\varepsilon} a_{in}(x_1) (\partial_{x_1} u^\varepsilon - \beta_{in}(x_1) \theta^\varepsilon) \cdot \tilde{\partial}_{x_1} \left(v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1 \left(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} - \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} \partial_{x_1} (a_{in}(x_1)) u^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} a_{in}(x_1) u^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1}^2 v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} a_{in}(x_1) \beta_{in}(x_1) \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (23)$$

В итоге, объединяя (21)–(23), представляем усредненное уравнение равновесия в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Xi} a(\mathbf{x}, \xi_2) (\nabla_x u^*(\mathbf{x}) + \nabla_{\xi} u^1(\mathbf{x}, \xi)) \cdot \\
& \quad \cdot (\nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \nabla_{\xi} v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x} - \\
& - \int_{\Omega} \int_{\Xi} a(\mathbf{x}, \xi_2) \beta(\mathbf{x}, \xi_2) \theta^*(\mathbf{x}) \mathbf{I} (\nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \nabla_{\xi} v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} a_{in}(x_1) \partial_{x_1} u^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x} - \\
& - \int_{\Omega} \int_{\gamma^*} a_{in}(x_1) \beta_{in}(x_1) \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\xi_1 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{f}(\mathbf{x}) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} h(x_1) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Для удобства при дальнейшем разделении масштабов перегруппируем слагаемые в (19) и (24). Получим

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} a_{in}(x_1) (\beta_{in}(x_1) \theta^*(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} u^*(\mathbf{x})) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} \int_0^1 a(\mathbf{x}, \xi_2) (\nabla_x u^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla_x v^0(\mathbf{x}) + \partial_{x_2} u^*(\mathbf{x}) \partial_{\xi_2} v^1(\mathbf{x}, \xi_2) + \\
& \quad + \partial_{\xi_2} \tilde{u}^1(\mathbf{x}, \xi_2) (\partial_{x_2} v^0(\mathbf{x}) + \partial_{\xi_2} v^1(\mathbf{x}, \xi_2))) d\xi_2 d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} \left(\int_0^1 a(\mathbf{x}, \xi_2) \beta(\mathbf{x}, \xi_2) (-\partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) + \partial_{x_2} v^0(\mathbf{x}) + \right. \\
& \quad \left. + \partial_{\xi_2} v^1(\mathbf{x}, \xi_2)) d\xi_2 \right) \theta^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{f}(\mathbf{x}) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} h(x_1) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} \vartheta^0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\
& + \int_{\Omega} \int_0^1 \left(\lambda(\mathbf{x}, \xi_2) \left(\nabla_{\mathbf{x}} \theta^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \vartheta^0(\mathbf{x}) + \partial_{x_2} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{\xi_2} \vartheta^1(\mathbf{x}, \xi_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \partial_{\xi_2} \tilde{\theta}^1(\mathbf{x}, \xi_2) \cdot (\partial_{x_2} \vartheta^0(\mathbf{x}) + \partial_{\xi_2} \vartheta^1(\mathbf{x}, \xi_2)) \right) \right) d\xi_2 d\mathbf{x} = \\
& = \int_{\Omega} \widehat{g}(\mathbf{x}) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} w(x_1) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{25b}$$

4.2. Разделение масштабов. Проведем разделение масштабов и выпишем задачи на ячейке аналогично [10], [15], [16]. Метод разделения масштабов позволяет разделить двухмасштабную модель на уравнения для макро- и микромасштаба. В уравнении (25b) берем пробные функции вида $\vartheta^0(\mathbf{x}) \equiv 0$ и $\vartheta^1(\mathbf{x}, \xi_2) = \vartheta^{10}(\mathbf{x}) \vartheta^{11}(\xi_2)$, где ϑ^{11} – 1-периодическая функция. Выводим

$$\int_0^1 \lambda(\mathbf{x}, \xi_2) \left(\partial_{x_2} \theta^*(\mathbf{x}) + \partial_{\xi_2} \tilde{\theta}^1(\mathbf{x}, \xi_2) \right) \partial_{\xi_2} \vartheta^{11}(\xi_2) d\xi_2 = 0, \tag{26}$$

$$\forall \vartheta^{11} \in H_{\#}^1(0, 1).$$

Уравнение (26) представляет собой задачу на ячейке для нахождения функции $\tilde{\theta}^1(\mathbf{x}, \xi_2)$, где переменная \mathbf{x} входит параметрически. Это уравнение легко интегрируется. Для этого применим лемму Дюбуа–Реймона. Получим:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}^1(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \frac{C_1(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x}, \xi_2)} - \frac{\partial \theta^*(\mathbf{x})}{\partial x_2},$$

где C_1 – "постоянная" интегрирования. Функция $C_1(\mathbf{x}) = (\widehat{\lambda^{-1}}(\mathbf{x}))^{-1} \frac{\partial \theta^*(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ найдена из условия периодичности. Подставим $C_1(\mathbf{x})$ и получим:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}^1}{\partial \xi_2} = \left(\lambda^{-1}(\mathbf{x}, \xi_2) \left((\widehat{\lambda^{-1}}(\mathbf{x}))^{-1} - 1 \right) \right) \frac{\partial \theta^*(\mathbf{x})}{\partial x_2}. \tag{27}$$

Проведем аналогичные действия для уравнения теплопроводности. В уравнении (25a) берем пробные функции в виде $v^0(\mathbf{x}) = 0$ и $v^1(\mathbf{x}, \xi_2) = v^{10}(\mathbf{x}) v^{11}(\xi_2)$, где v^{11} – 1-периодическая. В результате выводим:

$$\frac{\partial \tilde{u}^1(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \left[a^{-1}(\mathbf{x}, \xi_2) \left(\widehat{a^{-1}}(\mathbf{x})^{-1} - 1 \right) \right] \left(\frac{\partial u^*(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \theta^*(\mathbf{x}) \widehat{\beta}(\mathbf{x}) \right). \tag{28}$$

Найдены решения (27) и (28) для задачи микроструктуры.

Получим уравнения для макромасштаба. Теперь в (25b) берем $\vartheta^1 \equiv 0$ и подставляем туда производную из (27). Получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda_{in}(x_1) \partial_{x_1} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} \vartheta^0(\mathbf{x}) + \widehat{\lambda}(\mathbf{x}) \partial_{x_1} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} \vartheta^0(\mathbf{x}) + \\ & + (\widehat{\lambda}^{-1}(\mathbf{x}))^{-1} \partial_{x_2} \theta^*(\mathbf{x}) \partial_{x_2} \vartheta^0(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \widehat{g}(\mathbf{x}) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (10) уравнение теплопроводности (29) будет иметь простой вид:

$$\int_{\Omega} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}) \nabla \theta^*(\mathbf{x}) \cdot \nabla \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \widehat{g}(\mathbf{x}) \vartheta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (30)$$

В уравнение (25a) берем $v^1 \equiv 0$ и подставляем (28). Здесь аналогично предыдущему явно проинтегрируем по $d\xi_2$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \widehat{a}(\mathbf{x}) \widehat{\beta}(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) \theta^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \widehat{a}(\mathbf{x}) \partial_{x_1} u^*(\mathbf{x}) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega} (\widehat{a}^{-1}(\mathbf{x}))^{-1} \left(\frac{\partial u^*(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \theta^*(\mathbf{x}) \widehat{\beta}(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial v^0(\mathbf{x})}{\partial x_2} d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Omega} a_{in}(x_1) (\beta_{in}(x_1) \theta^*(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} u^*(\mathbf{x})) \partial_{x_1} v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega} \widehat{f}(\mathbf{x}) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} h(x_1) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Итак, (25a) принимает вид

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{x}) (\nabla_x u^*(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \theta^*(\mathbf{x})) \cdot \nabla_x v^0 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\widehat{f}(\mathbf{x}) + h(x_1)) v^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (31)$$

где матрица $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и вектор $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ определены формулами (8) и (9).

Вариационные уравнения (30) и (31) — это вариационные уравнения (7a) и (7b), в которых переобозначено $v := v^0$ и $\vartheta := \vartheta^0$.

Таким образом, процедура гомогенизации задачи V_ε строго обоснована, предельная усредненная модель (задача Н) построена. Как результат предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0+$, обосновано утверждение о существовании решения задачи Н.

Остается заметить, что в силу представлений (8) и (10) и условий W матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{\Lambda}$ являются равномерно положительно определенными. Это означает, что вариационная задача (7b) является строго эллиптической для θ^* , а задача (7a), в постановке которой θ^* задана как решение (7b), является строго эллиптической для u^* . По теореме Лакса–Мильграма каждая из этих задач имеет ровно одно решение, откуда следует единственность решения задачи Н.

Теорема 2 доказана.

5 Численный эксперимент

В этом параграфе приведены результаты численных расчетов для задач B_ε и H . Цель экспериментов — численно проиллюстрировать сходимость семейства решений задачи B_ε к решению задачи H при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

5.1. Расчет задачи с конечным числом включений. В этом параграфе приводим результаты численных экспериментов, соответствующих малым конечным $\varepsilon > 0$. Напомним, что параметр ε — это безразмерное расстояние между двумя соседними включениями. Оно стремится к нулю при бесконечном увеличении числа включений. Введем равномерную сетку в области Ω . Для аппроксимации функций перемещения и температуры воспользуемся конечными лагранжевыми элементами второго порядка \mathbb{P}_2 . Параметры задачи зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} a_\delta &= \begin{cases} \frac{1}{8} \cos x_1 + 1 & \text{в } \Omega_\pm, \\ 2 & \text{в } \Omega_m, \end{cases} & \beta_\delta &= \begin{cases} \sin \pi x_1 + 0,5 & \text{в } \Omega_\pm, \\ 2 & \text{в } \Omega_m, \end{cases} \\ f_\delta &= \begin{cases} x_1 + 0,25 & \text{в } \Omega_\pm, \\ 0 & \text{в } \Omega_m, \end{cases} & g_\delta &= \begin{cases} 100 \sin x_1 & \text{в } \Omega_\pm, \\ 0 & \text{в } \Omega_m, \end{cases} \\ \lambda_\delta &= \begin{cases} \frac{1}{6} \cos x_1 + 1 & \text{в } \Omega_\pm, \\ 2 & \text{в } \Omega_m. \end{cases} \end{aligned}$$

Для вычислений, за расчетную область задачи был взят прямоугольник со сторонами $\{0 < x_1 < 1\} \times \{0 < x_2 < 2\}$. Функции массовой силы и распределенного источника на множестве нитей γ^ε для простоты равны нулю. На всей границе $\partial\Omega$ наложены однородные условия Дирихле $u = 0$ и $\theta = 0$.

Таким образом, распределяем в расчетной области конечное число упругих включений, равноудаленных друг от друга, так, чтобы границы включений попадали на границы сетки. Распределения температуры и перемещений для различных значений ε показаны на рис. 2–7.

5.2. Расчет задачи H . Теперь рассмотрим задачу H . В её постановке информация о тонких включениях сублимирована в эффективных коэффициентах уравнений. Численное решение показано на рис. 8 и 9.

При уменьшении ε относительные ошибки между решениями задач H и B_ε определяются формулами

$$\tilde{E}_{L^2}(\theta) = \frac{\|\theta^* - \theta_\varepsilon\|_{L^2}}{\|\theta^*\|_{L^2}}, \quad \tilde{E}_{L^2}(u) = \frac{\|u^* - u_\varepsilon\|_{L^2}}{\|u^*\|_{L^2}},$$

где u^* и θ^* — распределения перемещений и температуры, рассчитанные по задаче H , а u_ε и θ_ε — распределения перемещений и температуры, рассчитанные по задаче B_ε . В таблице 1 показаны относительные ошибки

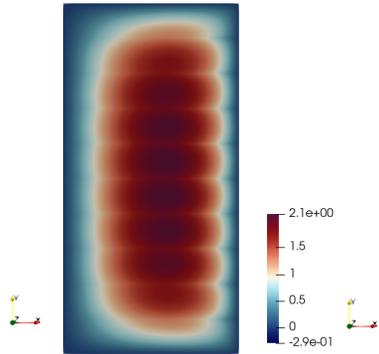


Рис.
2. Температура,
 $\varepsilon=2/10$

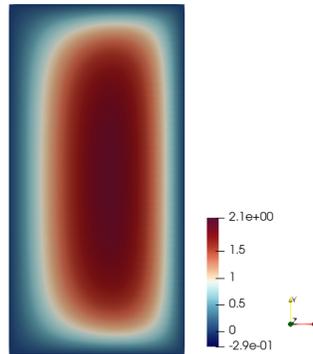


Рис.
3. Температура,
 $\varepsilon=2/50$

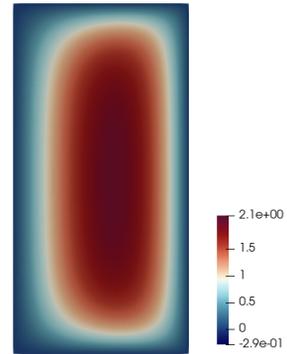


Рис.
4. Температура,
 $\varepsilon=2/100$

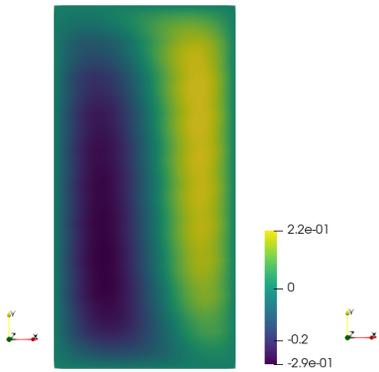


Рис.
5. Перемещение,
 $\varepsilon=2/10$

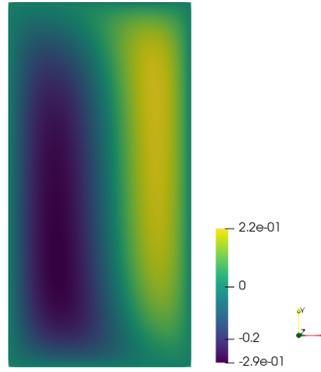


Рис.
6. Перемещение,
 $\varepsilon=2/50$

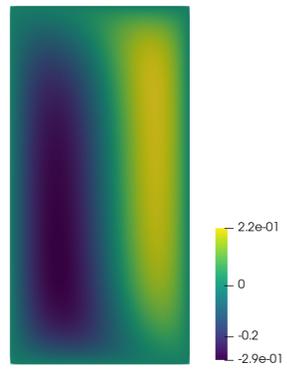


Рис.
7. Перемещение,
 $\varepsilon=2/100$

решения двух задач. На основании этих данных можно сделать вывод, что решение задачи B_ε стремится к решению задачи Н при уменьшении ε .

Таблица 1. Переход к решению задачи Н

ε	$\tilde{E}_{L_2}(\theta)$	$\tilde{E}_{L_2}(u)$
2e-1	0.057	0.04
4e-2	0.0025	0.0021
2e-2	0.0006	0.0005

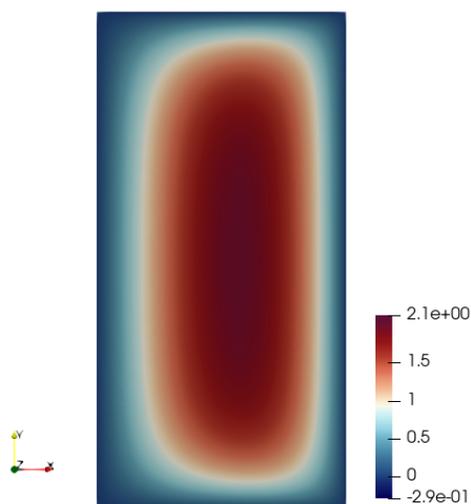


Рис. 8. Температура

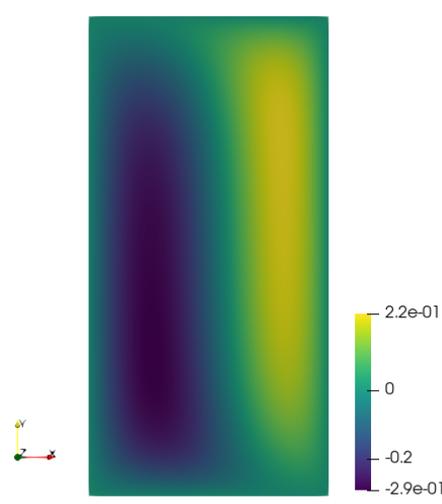


Рис. 9. Перемещение

References

- [1] S.A. Sazhenkov, I.V. Fankina, A.I. Furtsev, P.V. Gilev, A.G. Gorynin, O.G. Gorynina, V.M. Karnaeв, E.I. Leonova, *Multiscale analysis of a model problem of a thermoelastic body with thin inclusions*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **18**:1 (2021), 282–318, Zbl 1466.35337
- [2] V.V. Zhikov, *Homogenization of elasticity problems on singular structures*, Izv. Math., **66**:2 (2002), 299–365, Zbl 1043.35031
- [3] A.I. Furtsev, E.M. Rudoy, *Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates*, Int. J. Solids Struct., **202** (2020), 562–574.
- [4] E.M. Rudoy, *Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **17** (2020), 615–625, Zbl 1434.74078
- [5] A.I. Furtsev, I.V. Fankina, A.A. Rodionov, D.A. Ponomarev, *Asymptotic modeling of steady vibrations of thin inclusions in a thermoelastic composite*, Z. Angew. Math. Phys., **74**:5 (2023), Paper No. 195, Zbl 1527.35411
- [6] S. Dumont, F. Lebon, M.L. Raffa, R. Rizzoni, *Towards nonlinear imperfect interface models including micro-cracks and smooth roughness*, Ann. Solid Struct. Mech., **9** (2017), 13–27.
- [7] S. Dumont, R. Rizzoni, F. Lebon, E. Sacco, *Soft and hard interface models for bonded elements*, Composites Part B: Engineering., **153** (2018), 480–490.
- [8] R. Rizzoni, F. Lebon, *Imperfect interfaces as asymptotic models of thin curved elastic adhesive interphases*, Mech. Res. Commun., **51** (2013), 39–50.
- [9] I.V. Fankina, A.I. Furtsev, E.M. Rudoy, S.A. Sazhenkov, *The homogenized quasi-static model of a thermoelastic composite stitched with reinforcing threads*, J. Comput. Appl. Math., **434** (2023), Article ID 115346, Zbl 1517.35224
- [10] I.V. Fankina, A.I. Furtsev, E.M. Rudoy, S.A. Sazhenkov, *Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material*, Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences, **380**:2236 (2022), Article ID 20210354.

- [11] V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Bašeleišvili, T.V. Burčuladze, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam etc., (1979), Zbl 0406.73001
- [12] G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung, *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications*, in A. Bourgeat et al. eds., *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (1995)*, World Scientific Pub., Singapore, 1996, 15–25.
- [13] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., **23**:6 (1992), 1482–1518. Zbl 0770.35005
- [14] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20**:3 (1989), 608–623. Zbl 0688.35007
- [15] E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, **127**, Springer, Berlin etc., (1980), Zbl 0432.70002
- [16] N.S. Bakhvalov, G.P. Panasenko, *Homogenisation: Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Kluwer, Dordrecht etc., (1989), Zbl 0692.73012

EVELINA IVANOVNA LEONOVA
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
15, ACAD. LAVRENTYEVA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA;
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR., NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: leonova.eve@gmail.com