S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 14G10,
30D10

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТИПА БИНЕ

В.И. Кузоватов and А.М. Кытманов

Представлено П.П. Петровым

Abstract: In the present work, we obtain a generalization of the classical Binet formula. It is used to find a functional relationship for the Riemann zeta-function. We obtain the mentioned generalization by means of the Plan formula.

Keywords: Binet formula, integral representation, entire function.

1 Введение

Классическая формула Бине (или, если быть точнее, называемая в литературе вторым интегральным представлением Бине, см., например, [1, глава 12, п. 12.32]) выражает значение логарифмической производной Γ – функции Эйлера $\Gamma(z)$ (в случае, если вещественная часть z положительна) через следующий интеграл:

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)\,(e^{2\pi t}-1)}. \qquad (1)$$

Kuzovatov, V.I., Kytmanov, A.M., On one integral representation of Binet type.

Работа поддержана РНФ (грант 24-21-00023).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Данное интегральное представление используется при нахождении функционального соотношения (см., например, [2, глава 2, п. 9]) для классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$. А именно, используя представление Бине для $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, получено следующее интегральное представление для вещественных $x > 0$:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x = \frac{\big(x\,\Gamma(x)\big)'}{x\,\Gamma(x)} - \ln x = \frac{\Gamma(x) + x\,\Gamma'(x)}{x\,\Gamma(x)} - \ln x =$$
$$= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{2x} - 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)\,(e^{2\pi t}-1)} =$$
$$= -2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t}\right) dt,$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_0^{\xi} \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{t}{x}\Big|_0^{\xi} = \frac{1}{2x}.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см., например, [2, глава 2, п. 9]) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см., например, [2, глава 2, п. 9]), что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x\right\} x^{-s}\,dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [3, 4, 5]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [6] далее В.Б. Лидским и В.А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [7] С.А. Смагин и М.А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [8]. Данными авторами было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций
$f = (f_1, \dots, f_n)$ в $\mathbb{C}^n$. С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие условия на систему функций $f_1, \dots, f_n$.

В работе [9] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

Здесь следует также отметить, что на данный момент не существует каких-либо функциональных соотношений для рассмотренных выше дзета-функций нулей различных классов целых функций. Таким образом, построение обобщений классической формулы Бине с целью получения функционального соотношения для дзета-функции нулей различных классов целых функций является актуальной задачей.

Актуальность нашего исследования определяется также тем, что в задаче об асимптотически точных двусторонних оценках центрального биномиального коэффициента

$$C_{2l}^{l}, \quad l \in \mathbb{N},$$

важную роль играют различные интегральные представления для отношения значений гамма-функции. В том числе, удобным инструментом в этих исследованиях являются первая и вторая формулы Бине. Последние результаты в этом направлении представлены в работе [10].

2 Предварительные сведения

Рассмотрим целые функции $f(z)$ конечного порядка ρ, которые имеют вид

$$f(z) = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \tag{2}$$

где C – некоторая положительная постоянная, z_n – нули функции $f(z)$ (среди них нет повторяющихся нулей).

Представление (2) справедливо, например, для целых функций порядка меньше первого или целых функций первого порядка с дополнительным условием — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$$

сходится. В частности, представление (2) справедливо для функций нулевого рода [11, глава 7, §2].

При $f(z) \neq 0$ проведем выкладки, аналогичные [12, глава VIII, п. 8.2.4]:

$$\ln f(z) = \ln\left(C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\right) = \ln C + \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\right) = \\ = \ln C + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{z_n}\right).$$

Продифференцируем полученное соотношение один раз (предполагая, что это можно делать). Будем иметь

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-z/z_n}\cdot\left(-\frac{1}{z_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-z_n}.$$

Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-z_n} \tag{3}$$

при $z \neq z_n$.

Обоснуем равенство (3) для следующего случая. Пусть $z_n = -q_n$, $q_n > 0$, q_n удовлетворяют условию

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{q_n}{n} > 0$$

и образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Для обоснования перемены порядка суммирования и дифференцирования в (3) докажем равномерную сходимость ряда (3) при данных z_n. Проведем следующие оценки:

$$\frac{1}{|z-z_n|} = \frac{1}{|z+q_n|} = \frac{1}{|x+iy+q_n|} = \frac{1}{\sqrt{(x+q_n)^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x+q_n)^2}} \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{q_n^2}} = \frac{1}{|z_n|},\ x \geq 0.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда ряд (3) при данных z_n сходится равномерно на множестве $\mathrm{Re}\ z \geq 0$.

Наша цель – с учетом (3) получить интегральное представление для

$$-\frac{d}{dz}\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+q_n)^2}, \quad \mathrm{Re}\ z > 0. \tag{4}$$

Формула (4) является естественным обобщением классического случая, поскольку при нахождении интегрального представления Бине (1) исследуется ряд (см., например, [1, глава 12, п. 12.32])

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},\quad \mathrm{Re}\ z>0.$$

В качестве $f(z)$ в этом случае можно было бы выбрать (постоянная γ известна под названием постоянной Эйлера, см., например, [1, глава 12, п. 12.1])

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}$$

с нулями $z_n=-n$. То есть в этом случае $q_n=n$, $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Если говорить об уже известных обобщениях формулы Бине, то в работе [13] на основе представления (3) нами показано, что для целой функции $f(z)$ конечного порядка $\rho<\ 1$ с нулями $z_n=-\pi n^2$ для вещественного $x\in(0;+\infty)$ справедливо представление

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{\pi x}-\frac{1}{2x}.$$

Также в работе [14] нами получено интегральное представление для ряда (4), однако в работе были наложены жесткие ограничения на расположение q_n. А именно, в работе [14] суммирование берется по всем точкам q_n, лежащим в отрезке $[1;x_2]$, где x_2 – целое положительное число. По сути, это означало, что $f(z)$ может иметь лишь конечное число нулей. В данной работе эти условия на расположение q_n будут сняты. Отметим, что доказательство результата в работе [14] основано на построенном (одним из авторов данной статьи) аналоге формулы Плана [15].

В заключение данного раздела приведем пример нулей z_n функции $f(z)$ вида (2). Рассмотрим $z_n=-n^3$, то есть в этом случае $q_n=n^3$.

Поскольку порядок канонического произведения равен показателю сходимости его нулей (см., например, [12, глава VIII, п. 8.2.5]), то для проверки условия $0<\rho<1$ найдем показатель сходимости нулей ρ_1. Он определен по формуле

$$\rho_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln|z_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln n^3}=\frac{1}{3}.$$

Итак, найденная нами функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям вида (2), имеет вид

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^3}\right).$$

3 Вспомогательные результаты

В наших дальнейших рассуждениях мы будем использовать формулу суммирования Плана (см., например, [16, глава 1, п. 1.9])

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) = \frac{1}{2} g(0) + \int\limits_{0}^{+\infty} g(\tau)\, d\tau + i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{g(it) - g(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \tag{5}$$

Эта формула справедлива при следующих условиях:

1) функция $g(\zeta)$ является голоморфной при $\operatorname{Re}\, \zeta \geq 0$, $\zeta = \tau + it$.
2) равенство $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-2\pi|t|} g(\tau + it) = 0$ выполняется равномерно при $0 \leq \tau < +\infty$.
3) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|t|} \left| g(\tau + it) \right| dt = 0.$

Ключевым моментом в доказательстве основного результата является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $Q(\zeta)$ *– целая функция первого порядка. Зафиксируем константу* $A_1 > 1$ *и комплексное число* z *с условием* $\operatorname{Re}\, z > 0$. *Тогда функция*

$$g(\zeta) = \frac{Q(\zeta)\, e^{-A_1\zeta}}{(z + \zeta)^2} \tag{6}$$

удовлетворяет условиям 1) – 3) применимости формулы Плана (5).

Доказательство. Проверим выполнение трех условий формулы Плана (5). Голоморфность функции $g(\zeta)$ следует из вида (6) самой функции и условия, что вещественная часть z положительна.

Перейдем ко второму условию. Для доказательства данного условия заметим (см., например, [12, глава VIII, п. 8.2]), что поскольку $Q(\zeta)$ – целая функция первого порядка, то для всякого положительного ε

$$Q(\zeta) = O\left(e^{A^{1+\varepsilon}}\right), \quad |\zeta| = A \to \infty,$$

но ни для какого отрицательного ε это не так. Таким образом, для $\zeta = \tau + it$

$$|Q(\zeta)| \leq C_1 e^{|\zeta|^{1+\varepsilon}} = C_1 e^{\left(\tau^2 + t^2\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}, \qquad \left| e^{-A_1\zeta} \right| = e^{-A_1\tau}.$$

Далее для $z = z_1 + iz_2$, $z_1 > 0$ ввиду условия леммы, получим

$$z + \zeta = (z_1 + \tau) + i(z_2 + t), \quad |z + \zeta|^2 = (z_1 + \tau)^2 + (z_2 + t)^2.$$

В дальнейшем для простоты вычислений положим $\varepsilon = 0$. Тогда

$$|Q(\zeta)| \leq C_1 e^{\sqrt{\tau^2 + t^2}} \leq C_1 e^{\tau + |t|}.$$

Проведем следующие оценки.

$$e^{-2\pi|t|}\left|g\left(\tau+it\right)\right|=e^{-2\pi|t|}\frac{\left|Q\left(\tau+it\right)\right|\left|e^{-A_1(\tau+it)}\right|}{\left|z+\tau+it\right|^2}\leq\frac{e^{-2\pi|t|}C_1e^{\tau+|t|}e^{-A_1\tau}}{\left(z_1+\tau\right)^2+\left(z_2+t\right)^2}\leq$$
$$\leq\frac{C_1}{z_1^2+\left(z_2+t\right)^2}\frac{e^{-2\pi|t|+|t|}}{e^{\tau(A_1-1)}}\leq\frac{C_1}{z_1^2}e^{-2\pi|t|+|t|}.$$

Если $t>0$, то

$$e^{-2\pi|t|}\left|g\left(\tau+it\right)\right|\leq\frac{C_1}{z_1^2}e^{-2\pi t+t}=\frac{C_1}{z_1^2}e^{-t(2\pi-1)}\to 0\quad\text{при}\;\;t\to+\infty.$$

Если $t<0$, то

$$e^{-2\pi|t|}\left|g\left(\tau+it\right)\right|\leq\frac{C_1}{z_1^2}e^{2\pi t-t}=\frac{C_1}{z_1^2}e^{t(2\pi-1)}\to 0\quad\text{при}\;\;t\to-\infty.$$

Причем стремление к нулю здесь равномерное на множестве $\{0\leq\tau<+\infty\}$.

Выполнение условия 3) объясняется выкладкой.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi|t|}\left|g\left(\tau+it\right)\right|dt\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_1}{z_1^2e^{\tau(A_1-1)}}e^{-2\pi|t|+|t|}\,dt=\frac{C_1}{z_1^2e^{\tau(A_1-1)}}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{0}e^{t(2\pi-1)}\,dt+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t(2\pi-1)}\,dt\right]=$$
$$=\frac{C_1}{z_1^2e^{\tau(A_1-1)}}\left[\frac{1}{2\pi-1}\;e^{t(2\pi-1)}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2\pi-1}\;e^{-t(2\pi-1)}\Big|_{0}^{+\infty}\right]=$$
$$=\frac{C_1}{z_1^2e^{\tau(A_1-1)}}\left[\frac{1-0}{2\pi-1}-\frac{0-1}{2\pi-1}\right]=\frac{C_1}{z_1^2e^{\tau(A_1-1)}}\frac{2}{2\pi-1}\to 0\quad\text{при}\;\;\tau\to+\infty.$$

□

4 Основной результат

Далее функцию $Q\left(\zeta\right)$, фигурирующую в формуле (6), построим в виде произведения

$$Q\left(\zeta\right)=Q_1\left(\zeta\right)Q_2\left(\zeta\right)$$

следующим образом.

Пусть $Q_1\left(\zeta\right)$ обращается в нуль в натуральных точках, не принадлежащих последовательности $\{q_n\}$, то есть

$$Q_1\left(\zeta\right)=0,\quad\zeta\in\mathbb{N}\setminus\{q_n\}.\tag{7}$$

Обозначая множество индексов через

$$J=\left\{j:\,j\in\mathbb{N}\setminus\{q_n\}\right\},$$

функцию $Q_1(\zeta)$, удовлетворяющую условию (7), можно выбрать в виде канонического произведения

$$Q_1(\zeta) = \prod_{j\in J}\left(1-\frac{\zeta}{j}\right)e^{\frac{\zeta}{j}}. \tag{8}$$

Сходимость бесконечного произведения в выражении для $Q_1(\zeta)$ следует из того, что $Q_1(\zeta)$ является подпроизведением функции $\dfrac{e^{\gamma\zeta}}{\Gamma(-\zeta+1)}$, где γ – как и прежде, постоянная Эйлера. Действительно, сделав замену $z=-\zeta$ в выражении (см., например, [1, глава 12, п. 12.16]) для

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}, \quad \text{получим}$$

$$\frac{1}{\Gamma(-\zeta+1)} = e^{-\gamma\zeta}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{j}\right)e^{\frac{\zeta}{j}}.$$

Функцию $Q_2(\zeta)$ выберем так, чтобы $Q_2(\zeta)$ на последовательности $\{q_n\}$ принимала бы значения

$$Q_2(q_n) = \frac{1}{Q_1(q_n)\,e^{-A_1 q_n}}. \tag{9}$$

Для разрешимости интерполяционной задачи (9) мы исследуем вопрос (см., например, [17, глава IV, §4]) о представлении целой функции интерполяционным рядом Лагранжа в том случае, когда узлы интерполяции образуют R – множество с некоторым показателем $\rho(r)$. Таким образом, нам необходимо, чтобы последовательность $\{q_n\}$ являлась R – множеством.

Функция $\rho(r)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0,$$

называется *уточненным порядком.* Очевидно, что уточненный порядок данной функции определен не однозначно (см., например, [17, глава I, §12]).

Регулярным или короче R – *множеством* называется (см., например, [17, глава II, §1]) правильно распределенное множество точек $\{a_n\}$, удовлетворяющее одному из условий (C) или (C$'$):

(C) *Существует такое число $d>0$, что кружки радиусов*

$$r_n = d\,|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

с центрами в точках a_n не пересекаются.

(C$'$) *Точки a_n расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества $\{a_n\}$ внутри любого из этих углов в порядке* *возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,*

$$|a_{k+1}| - |a_k| > d\,|a_k|^{1-\rho(|a_k|)}$$

при некотором $d > 0$.

Приведем частный случай (см., например, [17, глава II, §2]) правильно распределенного множества точек $\{a_n\}$. Наиболее простой случай: все точки $\{a_n\}$ расположены на одном луче $\arg z = \varphi$ с некоторой плотностью

$$\Delta = \lim_{r\to\infty} \frac{n\,(r)}{r^{\rho(r)}},$$

где $n\,(r)$ – число точек множества $\{a_n\}$ в интервале $(0, r)$ на луче $\arg z = \varphi$. В этом случае величина $H\,(\theta)$, называемая *индикатором* множества, определяется по формуле

$$H\,(\theta) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,(\theta - \varphi - \pi)\,. \tag{10}$$

Поскольку последовательность натуральных чисел расположена на одном луче $\arg z = 0$, выходящим из нуля, то, в согласии с [17, глава II, §2], можно сделать вывод, что если $\{a_n\}$ есть некоторая последовательность натуральных чисел, то $\{a_n\}$ является R – множеством (см., например, [17, глава II, §6, пример]). Таким образом, в нашем случае множество узлов $\{q_n\}$ интерполяционной задачи (9) образуют R – множество. В дальнейшем мы считаем это выполненным.

Вернемся к вопросу о разрешимости интерполяционной задачи (9). Для этого приведем следующий результат. Пусть $\psi\,(z)$ – целая функция, имеющая простые корни во всех узлах интерполяции $\{a_n\}$ ($|a_n| \to \infty$), и пусть $\{b_n\}$ – значения, заданные в узлах интерполяции. Требуется найти целую функцию $F\,(z)$ такую, что

$$F\,(a_n) = b_n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots$$

Если ряд (*интерполяционный ряд Лагранжа*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \psi\,(z)}{\psi'\,(a_n)\,(z - a_n)} \tag{11}$$

равномерно сходится в любой ограниченной области, то он представляет целую функцию, решающую интерполяционную задачу (см., например, [17, глава IV, §4]).

Относительно сходимости интерполяционного ряда Лагранжа сформулируем (см., например, [17, глава IV, §4, доказательство теоремы 13]) следующий результат. Если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{H\,(\psi_n)\,|a_n|^{\rho(|a_n|)}} < 1, \qquad (\psi_n = \arg a_n) \tag{12}$$

то интерполирующей функцией $F\,(z)$ является ряд Лагранжа (11), который равномерно сходится в каждой ограниченной области и представляет целую функцию с индикатором, не превышающим $H\,(\theta)$.

Нетрудно видеть, что если $\psi_n = \arg a_n = 0$, то неравенство (12) запишется в виде

$$\frac{1}{H(0)} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{|a_n|^{\rho(|a_n|)}} < 1. \tag{13}$$

Выбирая

$$\psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{q_n}\right), \tag{14}$$

относительно решения интерполяционной задачи (9) сформулируем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка $0 < \rho < 1/2$. Тогда решением интерполяционной задачи (9) является целая функция*

$$Q_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_1(q_n)\, e^{-A_1 q_n}} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(q_n)(\zeta - q_n)}, \tag{15}$$

которая представляется рядом, равномерно сходящимся в любой ограниченной области.

Доказательство. Проведем выкладки, уточняющие и упрощающие доказательство леммы 2 из статьи [14]. Решением интерполяционной задачи (9) является ряд Лагранжа (11), где

$$a_n = q_n, \quad b_n = \frac{1}{Q_1(q_n)\, e^{-A_1 q_n}}, \quad \psi_n = \arg a_n = 0$$

и функция $\psi(\zeta)$ определяется соотношением (14). Для доказательства равномерной сходимости ряда (15) воспользуемся условием (13), в котором показатель $\rho(r)$ выберем $\rho(r) = \rho$. Нам необходимо показать, что

$$\frac{1}{H(0)} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{q_n^{\rho}} < 1. \tag{16}$$

Покажем вначале, что $H(0) > 0$ при $0 < \rho < 1/2$. Поскольку $\{a_n\}$ расположены на одном луче $\arg z = 0$, то в согласии с формулой (10)

$$H(0) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}\cos\pi\rho.$$

Далее

$$\ln|b_n| = \ln\left|\frac{1}{Q_1(q_n)\, e^{-A_1 q_n}}\right| = -\ln\left|Q_1(q_n)\, e^{-A_1 q_n}\right| = -\ln\left|e^{-A_1 q_n}\right| -$$

$$-\ln\left|\prod_{j\in J}\left(1 - \frac{q_n}{j}\right) e^{\frac{q_n}{j}}\right| = A_1 q_n - \sum_{j\in J} \ln\left|\left(1 - \frac{q_n}{j}\right) e^{\frac{q_n}{j}}\right| =$$

$$= A_1 q_n - \sum_{j\in J}\left(\ln\left|1 - \frac{q_n}{j}\right| + \frac{q_n}{j}\right).$$

Воспользуемся стандартным разложением

$$\ln(1-x)+x=-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{x^p}{p},\quad |x|<1.$$

В наших обозначениях получим

$$\ln\left|1-\frac{q_n}{j}\right|+\frac{q_n}{j}=-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p}\left(\frac{q_n}{j}\right)^p,\quad \left|\frac{q_n}{j}\right|<1.$$

Условие $q_n/j<1$, очевидно, выполняется, начиная с некоторого номера $j>j_0$ (при фиксированном n). Выбор j_0 будет приведен ниже. Таким образом,

$$\begin{aligned}\ln|b_n| &= A_1q_n-\sum_{j\in J}\left(\ln\left|1-\frac{q_n}{j}\right|+\frac{q_n}{j}\right)=A_1q_n+\sum_{\substack{j\in J\\ j>j_0}}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p}\left(\frac{q_n}{j}\right)^p=\\ &= A_1q_n+\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{\substack{j\in J\\ j>j_0}}\frac{1}{p}\left(\frac{q_n}{j}\right)^p=A_1q_n+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\sum_{\substack{j\in J\\ j>j_0}}\frac{1}{j^p}\le\\ &\le A_1q_n+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\frac{1}{j^p}=A_1q_n+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^p}-\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^p}\right)=\\ &= A_1q_n+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\left(\zeta(p)-\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^p}\right),\end{aligned}$$

где $\zeta(p)$ – дзета-функция Римана, а перемена порядка суммирования в кратных рядах справедлива ввиду абсолютной сходимости каждого из рядов.

Известно (см., например, [2, глава IV, п. 3]), что для $s=\sigma+it$ *оценка*

$$\zeta(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}+O\left(x^{-\sigma}\right)$$

имеет место равномерно в области $\sigma\ge\sigma_0>0$, $|t|<2\pi x/C_2$, *при фиксированном* C_2. Тогда

$$\zeta(p)-\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^p}=-\frac{j_0^{1-p}}{1-p}+O\left(j_0^{-p}\right)\quad\text{или}\quad \zeta(p)-\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^p}\le\frac{j_0^{1-p}}{p-1}+C_3j_0^{-p},$$

где константа C_3 не зависит от j_0.

Преобразуем второе слагаемое в выражении для $\ln|b_n|$. Получим

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\left(\zeta(p)-\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^p}\right)\leq\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\left(\frac{j_0^{1-p}}{p-1}+C_3j_0^{-p}\right)=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}\frac{j_0^{1-p}}{p-1}+$$
$$+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{q_n^p}{p}C_3j_0^{-p}=j_0\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p(p-1)}\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^p+C_3\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p}\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^p<$$
$$<j_0\sum_{p=2}^{\infty}\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^p+C_3\sum_{p=2}^{\infty}\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^p=(j_0+C_3)\frac{\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^2}{1-\frac{q_n}{j_0}},$$

где мы воспользовались тем, что

$$\frac{q_n}{j_0}<1.$$

Таким образом,

$$\ln|b_n|<A_1q_n+(j_0+C_3)\frac{\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^2}{1-\frac{q_n}{j_0}}=A_1q_n+(j_0+C_3)\frac{\frac{q_n}{j_0^2}}{\frac{1}{q_n}-\frac{1}{j_0}}=$$
$$=A_1q_n-\frac{(j_0+C_3)\frac{q_n}{j_0^2}}{\frac{1}{j_0}-\frac{1}{q_n}}=\frac{-q_n\left(\frac{j_0+C_3}{j_0^2}-\frac{A_1}{j_0}\right)-A_1}{\frac{1}{j_0}-\frac{1}{q_n}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{j_0+C_3}{j_0^2}-\frac{A_1}{j_0}>0,\quad j_0+C_3-A_1j_0>0,\quad C_3>j_0(A_1-1),\quad j_0<\frac{C_3}{A_1-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|b_n|}{q_n^\rho}=-\infty\quad\text{для}\quad 0<\rho<1/2$$

и условие (16) выполнено. □

Далее запишем формулу суммирования Плана (5) в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}g(n)=-\frac{1}{2}g(0)+\int_0^{+\infty}g(\tau)\,d\tau+i\int_0^{+\infty}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{17}$$

Положим в формуле (17) функцию $g(\zeta)$ в виде (6). Ввиду условия (7) функция $g(\zeta)$ равна нулю в натуральных точках, не принадлежащих последовательности $\{q_n\}$. А в точках последовательности (ввиду условия (9))

$$g(q_n)=\frac{Q(q_n)\,e^{-A_1q_n}}{(z+q_n)^2}=\frac{Q_1(q_n)\,Q_2(q_n)\,e^{-A_1q_n}}{(z+q_n)^2}=\frac{1}{(z+q_n)^2}.$$

Тем самым получаем основное утверждение. Напомним, что функция $g(\zeta)$ определена формулой (6), функция $Q(\zeta)$, фигурирующая в формуле (6), построена в виде произведения двух функций $Q_1(\zeta)$ и $Q_2(\zeta)$, которые определены по формулам (8) и (15) соответственно.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка $0 < \rho < 1/2$ с нулями $z_1, z_2, \ldots$. Нули $z_n = -q_n$, $q_n > 0$, q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел. Тогда для Re $z > 0$ справедливо равенство*

$$-\frac{d}{dz}\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+q_n)^2} = -\frac{1}{2}g(0) + \int_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau + i\int_0^{+\infty}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$

где функция $g(\zeta)$ определена формулой (6).

References

[1] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, Oxford, 1951.

[3] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On a Simple Identity for Eigenvalues of a Second Order Differential Operator*, Sov. Phys. Dokl., **88**:4 (1953), 593–596 (in Russian).

[4] L.A. Dikii, *The Zeta-Function of an Ordinary Differential Equation on a Finite Interval*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **19**:4 (1955), 187–200 (in Russian).

[5] L.A. Dikii, *Trace Formulas for Sturm-Liouville Differential Operators*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:3 (1958), 111–143 (in Russian).

[6] V.B. Lidskii, V.A. Sadovnichii, *Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions*, Functional Analysis and Its Applications, **1**:2 (1967), 133–139.

[7] S.A. Smagin, M.A. Shubin, *On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator*, Russian Mathematical Surveys, **39**:2 (1984), 201–202.

[8] A.M. Kytmanov, S.G. Myslivets, *On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 863–870.

[9] V.I. Kuzovatov, A.A. Kytmanov, *On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions*, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., **7**:4 (2014), 489–499.

[10] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *Integral representations of quantities associated with Gamma function*, Ufa Mathematical Journal, **13**:4 (2021), 50–62.

[11] A.I. Markushevich, *The theory of analytic functions. Vol. 2*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (in Russian).

[12] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.

[13] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, A. Sadullaev, *On the Zeta-Function of Zeros of an Entire Function*, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., **14**:5 (2021), 599–603.

[14] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On an analog of the Binet integral representation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 840–852.

[15] V.I. Kuzovatov, *Generalization of the Plana Formula*, Russian Mathematics, **62**:5 (2018), 34–43.

[16] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions. V. 1*, MC Graw-Hill Book Company, New York, 1953.

[17] B.Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1980.

Vyacheslav Igorevich Kuzovatov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: kuzovatov@yandex.ru

Alexander Mechislavovich Kytmanov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: akytmanov@sfu-kras.ru