

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ БИНЕ

В.И. КУЗОВАТОВ  AND А.М. КЫТМАНОВ *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** In the present work, we obtain a generalization of the classical Binet formula. It is used to find a functional relationship for the Riemann zeta-function. We obtain the mentioned generalization by means of the Plan formula.

**Keywords:** Binet formula, integral representation, entire function.

## 1 Введение

Классическая формула Бине (или, если быть точнее, называемая в литературе вторым интегральным представлением Бине, см., например, [1, глава 12, п. 12.32]) выражает значение логарифмической производной  $\Gamma$  – функции Эйлера  $\Gamma(z)$  (в случае, если вещественная часть  $z$  положительна) через следующий интеграл:

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - 2 \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(z^2 + t^2)(e^{2\pi t} - 1)}. \quad (1)$$

---

KUZOVATOV, V.I., KYTMANOV, A.M., ON A GENERALIZATION OF THE BINET FORMULA.

© 2024 КУЗОВАТОВ В.И., КЫТМАНОВ А.М.

Работа поддержана РФФ (грант 24-21-00023).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Данное интегральное представление используется при нахождении функционального соотношения (см., например, [2, глава 2, п. 9]) для классической дзета-функции Римана  $\zeta(s)$ . А именно, используя представление Бине для  $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ , получено следующее интегральное представление для вещественных  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x &= \frac{(x\Gamma(x))'}{x\Gamma(x)} - \ln x = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \ln x = \\ &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{2x} - 2 \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)} = \\ &= -2 \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} \left( \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{t}{x} \Big|_0^{\xi} = \frac{1}{2x}.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см., например, [2, глава 2, п. 9]) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см., например, [2, глава 2, п. 9]), что интегральное представление для дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  в полосе  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x \right\} x^{-s} dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [3, 4, 5]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [6] далее В.Б. Лидским и В.А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [7] С.А. Смагин и М.А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [8]. Данными авторами было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций

$f = (f_1, \dots, f_n)$  в  $\mathbb{C}^n$ . С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие условия на систему функций  $f_1, \dots, f_n$ .

В работе [9] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка роста на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

Здесь следует также отметить, что на данный момент не существует каких-либо функциональных соотношений для рассмотренных выше дзета-функций нулей различных классов целых функций. Таким образом, построение обобщений классической формулы Бине с целью получения функционального соотношения для дзета-функции нулей различных классов целых функций является актуальной задачей.

Актуальность нашего исследования определяется также тем, что в задаче об асимптотически точных двусторонних оценках центрального биномиального коэффициента

$$C_{2l}^l, \quad l \in \mathbb{N},$$

важную роль играют различные интегральные представления для отношения значений гамма-функции. В том числе, удобным инструментом в этих исследованиях являются первая и вторая формулы Бине. Последние результаты в этом направлении представлены в работе [10].

## 2 Предварительные сведения

Рассмотрим целые функции  $f(z)$  конечного порядка роста  $\rho$ , которые имеют вид

$$f(z) = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \quad (2)$$

где  $C$  – некоторая положительная постоянная,  $z_n$  – нули функции  $f(z)$  (среди них нет повторяющихся нулей).

Представление (2) справедливо, например, для целых функций порядка меньше первого или целых функций первого порядка с дополнительным условием — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$$

сходится. В частности, представление (2) справедливо для функций нулевого рода [11, глава 7, §2].

При  $f(z) \neq 0$  проведем выкладки, аналогичные [12, глава VIII, п. 8.2.4]:

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \ln \left( C \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \right) = \ln C + \ln \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \right) = \\ &= \ln C + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное соотношение один раз (предполагая, что это можно делать). Будем иметь

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z/z_n} \cdot \left( -\frac{1}{z_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_n}.$$

Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_n} \quad (3)$$

при  $z \neq z_n$ .

Обоснуем равенство (3) для следующего случая. Пусть  $z_n = -q_n$ ,  $q_n > 0$ ,  $q_n$  удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} > 0$$

и образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Для обоснования перемены порядка суммирования и дифференцирования в (3) докажем равномерную сходимость ряда (3) при данных  $z_n$ . Проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z - z_n|} &= \frac{1}{|z + q_n|} = \frac{1}{|x + iy + q_n|} = \frac{1}{\sqrt{(x + q_n)^2 + y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x + q_n)^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q_n^2}} = \frac{1}{|z_n|}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$  сходится, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда ряд (3) при данных  $z_n$  сходится равномерно на множестве  $\operatorname{Re} z \geq 0$ .

Наша цель – с учетом (3) получить интегральное представление для

$$-\frac{d}{dz} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + q_n)^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (4)$$

Формула (4) является естественным обобщением классического случая, поскольку при нахождении интегрального представления Бине (1) исследуется ряд (см., например, [1, глава 12, п. 12.32])

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

В качестве  $f(z)$  в этом случае можно было бы выбрать (постоянная  $\gamma$  известна под названием постоянной Эйлера, см., например, [1, глава 12, п. 12.1])

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}$$

с нулями  $z_n = -n$ . То есть в этом случае  $q_n = n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Если говорить об уже известных обобщениях формулы Бине, то в работе [13] на основе представления (3) нами показано, что для целой функции  $f(z)$  конечного порядка роста  $\rho < 1$  с нулями  $z_n = -\pi n^2$  для вещественного  $x \in (0; +\infty)$  справедливо представление

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \operatorname{cth} \sqrt{\pi x} - \frac{1}{2x}.$$

Также в работе [14] нами получено интегральное представление для ряда (4), однако в работе были наложены жесткие ограничения на расположение  $q_n$ . А именно, в работе [14] суммирование берется по всем точкам  $q_n$ , лежащим в отрезке  $[1; x_2]$ , где  $x_2$  – целое положительное число. По сути, это означало, что  $f(z)$  может иметь лишь конечное число нулей. В данной работе эти условия на расположение  $q_n$  будут сняты. Отметим, что доказательство результата в работе [14] основано на построенном (одним из авторов данной статьи) аналоге формулы Плана [15].

### 3 Вспомогательные результаты

В наших дальнейших рассуждениях мы будем использовать формулу суммирования Плана (см., например, [16, глава 1, п. 1.9])

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) = \frac{1}{2}g(0) + \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{g(it) - g(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (5)$$

Эта формула справедлива при следующих условиях:

- (1) функция  $g(\zeta)$  является голоморфной при  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ ,  $\zeta = \tau + it$ .
- (2) равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2\pi|t|} g(\tau + it) = 0$  выполняется равномерно при  $0 \leq \tau < \infty$ .
- (3)  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} |g(\tau + it)| dt = 0$ .

Ключевым моментом в доказательстве основного результата является следующая лемма.

**Лемма 1.** *Функция (при фиксированном  $z$ )*

$$g(\zeta) = \frac{Q(\zeta) e^{-A_1 \zeta}}{(z + \zeta)^2}, \quad A_1 > 1, \quad (6)$$

где  $Q(\zeta)$  – целая функция первого порядка, а вещественная часть  $z$  положительна, удовлетворяет условиям формулы Плана (5).

*Доказательство.* Проверим выполнение трех условий формулы Плана (5). Голоморфность функции  $g(\zeta)$  следует из вида (6) самой функции и условия, что вещественная часть  $z$  положительна.

Перейдем ко второму условию. Для доказательства данного условия заметим (см., например, [12, глава VIII, п. 8.2]), что поскольку  $Q(\zeta)$  – целая функция первого порядка, то для всякого положительного  $\varepsilon$

$$Q(\zeta) = O\left(e^{A^{1+\varepsilon}}\right), \quad |\zeta| = A \rightarrow \infty,$$

но ни для какого отрицательного  $\varepsilon$  это не так. Таким образом, для  $\zeta = \tau + it$

$$|Q(\zeta)| \leq C_1 e^{|\zeta|^{1+\varepsilon}} = C_1 e^{(\tau^2+t^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}, \quad \left|e^{-A_1 \zeta}\right| = e^{-A_1 \tau}.$$

Далее для  $z = z_1 + iz_2$ ,  $z_1 > 0$  ввиду условия леммы, получим

$$z + \zeta = (z_1 + \tau) + i(z_2 + t), \quad |z + \zeta|^2 = (z_1 + \tau)^2 + (z_2 + t)^2.$$

В дальнейшем для простоты вычислений положим  $\varepsilon = 0$ . Тогда

$$|Q(\zeta)| \leq C_1 e^{\sqrt{\tau^2+t^2}} \leq C_1 e^{\tau+|t|}.$$

Проведем следующие оценки.

$$\begin{aligned} e^{-2\pi|t|} |g(\tau + it)| &= e^{-2\pi|t|} \frac{|Q(\tau + it)| |e^{-A_1(\tau+it)}|}{|z + \tau + it|^2} \leq \frac{e^{-2\pi|t|} C_1 e^{\tau+|t|} e^{-A_1 \tau}}{(z_1 + \tau)^2 + (z_2 + t)^2} \leq \\ &\leq \frac{C_1}{z_1^2 + (z_2 + t)^2} \frac{e^{-2\pi|t|+|t|}}{e^{\tau(A_1-1)}} \leq \frac{C_1}{z_1^2} e^{-2\pi|t|+|t|}. \end{aligned}$$

Если  $t > 0$ , то

$$e^{-2\pi|t|} |g(\tau + it)| \leq \frac{C_1}{z_1^2} e^{-2\pi t+t} = \frac{C_1}{z_1^2} e^{-t(2\pi-1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Если  $t < 0$ , то

$$e^{-2\pi|t|} |g(\tau + it)| \leq \frac{C_1}{z_1^2} e^{2\pi t-t} = \frac{C_1}{z_1^2} e^{t(2\pi-1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Причем стремление к нулю здесь равномерное на множестве  $\{0 \leq \tau < +\infty\}$ .

Перейдем к доказательству третьего условия. Для доказательства третьего условия достаточно провести следующие оценки.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} |g(\tau + it)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1}{z_1^2 e^{\tau(A_1-1)}} e^{-2\pi|t|+|t|} dt = \frac{C_1}{z_1^2 e^{\tau(A_1-1)}} \times \\
 &\times \left[ \int_{-\infty}^0 e^{t(2\pi-1)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(2\pi-1)} dt \right] = \\
 &= \frac{C_1}{z_1^2 e^{\tau(A_1-1)}} \left[ \frac{1}{2\pi-1} e^{t(2\pi-1)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2\pi-1} e^{-t(2\pi-1)} \Big|_0^{\infty} \right] = \\
 &= \frac{C_1}{z_1^2 e^{\tau(A_1-1)}} \left[ \frac{1-0}{2\pi-1} - \frac{0-1}{2\pi-1} \right] = \frac{C_1}{z_1^2 e^{\tau(A_1-1)}} \frac{2}{2\pi-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

□

#### 4 Основной результат

Далее построим  $Q(\zeta)$  в виде

$$Q(\zeta) = Q_1(\zeta) \cdot Q_2(\zeta)$$

следующим образом.

Пусть  $Q_1(\zeta)$  обращается в ноль в натуральных точках, не принадлежащих последовательности  $\{q_n\}$ , то есть

$$Q_1(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{N} \setminus \{q_n\}. \quad (7)$$

Обозначая множество индексов через

$$J = \{j : j \in \mathbb{N} \setminus \{q_n\}\},$$

функцию  $Q_1(\zeta)$ , удовлетворяющую условию (7), можно выбрать в виде канонического произведения

$$Q_1(\zeta) = \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{\zeta}{j}\right) e^{\frac{\zeta}{j}}.$$

Сходимость бесконечного произведения в выражении для  $Q_1(\zeta)$  следует из того, что  $Q_1(\zeta)$  является подпроизведением функции  $\frac{e^{\gamma\zeta}}{\Gamma(-\zeta+1)}$ , где  $\gamma$  – как и прежде, постоянная Эйлера. Действительно, сделав замену  $z = -\zeta$  в выражении (см., например, [1, глава 12, п. 12.16]) для

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}}, \quad \text{получим}$$

$$\frac{1}{\Gamma(-\zeta+1)} = e^{-\gamma\zeta} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{j}\right) e^{\frac{\zeta}{j}}.$$

Функцию  $Q_2(\zeta)$  выберем так, чтобы  $Q_2(\zeta)$  на последовательности  $\{q_n\}$  принимала бы значения

$$Q_2(q_n) = \frac{1}{Q_1(q_n) e^{-A_1 q_n}}. \quad (8)$$

Для разрешимости интерполяционной задачи (8) мы исследуем вопрос (см., например, [17, глава IV, §4]) о представлении целой функции интерполяционным рядом Лагранжа в том случае, когда узлы интерполяции образуют  $R$  – множество с некоторым показателем  $\rho(r)$ . Таким образом, нам необходимо, чтобы последовательность  $\{q_n\}$  являлась  $R$  – множеством.

Функция  $\rho(r)$ , удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0,$$

называется *уточненным порядком*. Очевидно, что уточненный порядок данной функции определен не однозначно (см., например, [17, глава I, §12]).

Регулярным или короче  $R$  – *множеством* называется (см., например, [17, глава II, §1]) правильно распределенное множество точек  $\{a_n\}$ , удовлетворяющее одному из условий (C) или (C'):

(C) *Существует такое число  $d > 0$ , что кружки радиусов*

$$r_n = d |a_n|^{1 - \frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

*с центрами в точках  $a_n$  не пересекаются.*

(C') *Точки  $a_n$  расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества  $\{a_n\}$  внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,*

$$|a_{k+1}| - |a_k| > d |a_k|^{1 - \rho(|a_k|)}$$

*при некотором  $d > 0$ .*

Приведем частный случай (см., например, [17, глава II, §2]) правильно распределенного множества точек  $\{a_n\}$ . Наиболее простой случай: все точки  $\{a_n\}$  расположены на одном луче  $\arg z = \varphi$  с некоторой плотностью

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r \rho(r)},$$

где  $n(r)$  – число точек множества  $\{a_n\}$  в интервале  $(0, r)$  на луче  $\arg z = \varphi$ . В этом случае величина  $H(\theta)$ , называемая *индикатором* множества, определяется по формуле

$$H(\theta) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\theta - \varphi - \pi). \quad (9)$$

Поскольку последовательность натуральных чисел расположена на одном луче  $\arg z = 0$ , выходящим из нуля, то, в согласии с [17, глава

II, §2], можно сделать вывод, что если  $\{a_n\}$  есть некоторая последовательность натуральных чисел, то  $\{a_n\}$  является  $R$  – множеством (см., например, [17, глава II, §6, пример]). Таким образом, в нашем случае множество узлов  $\{q_n\}$  интерполяционной задачи (8) образуют  $R$  – множество. В дальнейшем мы считаем это выполненным.

Вернемся к вопросу о разрешимости интерполяционной задачи (8). Для этого приведем следующий результат. Пусть  $\psi(z)$  – целая функция, имеющая простые корни во всех узлах интерполяции  $\{a_n\}$  ( $|a_n| \rightarrow \infty$ ), и пусть  $\{b_n\}$  – значения, заданные в узлах интерполяции. Требуется найти целую функцию  $F(z)$  такую, что

$$F(a_n) = b_n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

Если ряд (*интерполяционный ряд Лагранжа*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \psi(z)}{\psi'(a_n)(z - a_n)} \quad (10)$$

равномерно сходится в любой ограниченной области, то он представляет целую функцию, решающую интерполяционную задачу (см., например, [17, глава IV, §4]).

Относительно сходимости интерполяционного ряда Лагранжа сформулируем (см., например, [17, глава IV, §4, доказательство теоремы 13]) следующий результат. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{H(\psi_n) |a_n|^{\rho(|a_n|)}} < 1, \quad (\psi_n = \arg a_n) \quad (11)$$

то интерполирующей функцией  $F(z)$  является ряд Лагранжа (10), который равномерно сходится в каждой ограниченной области и представляет целую функцию с индикатором, не превышающим  $H(\theta)$ .

Нетрудно видеть, что если  $\psi_n = \arg a_n = 0$ , то неравенство (11) запишется в виде

$$\frac{1}{H(0)} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{|a_n|^{\rho(|a_n|)}} < 1. \quad (12)$$

Выбирая

$$\psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{q_n}\right), \quad (13)$$

относительно решения интерполяционной задачи (8) сформулируем следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть  $f(z)$  – целая функция конечного порядка роста  $0 < \rho < 1/2$ . Тогда решением интерполяционной задачи (8) является целая функция

$$Q_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_1(q_n) e^{-A_1 q_n}} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(q_n)(\zeta - q_n)}, \quad (14)$$

которая представляется рядом, равномерно сходящимся в любой ограниченной области.

*Доказательство.* Проведем выкладки, уточняющие и упрощающие доказательство леммы 2 из статьи [14]. Решением интерполяционной задачи (8) является ряд Лагранжа (10), где

$$a_n = q_n, \quad b_n = \frac{1}{Q_1(q_n) e^{-A_1 q_n}}, \quad \psi_n = \arg a_n = 0$$

и функция  $\psi(\zeta)$  определяется соотношением (13). Для доказательства равномерной сходимости ряда (14) воспользуемся условием (12), в котором показатель  $\rho(r)$  выберем  $\rho(r) = \rho$ . Нам необходимо показать, что

$$\frac{1}{H(0)} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{q_n^\rho} < 1. \quad (15)$$

Покажем вначале, что  $H(0) > 0$  при  $0 < \rho < 1/2$ . Поскольку  $\{a_n\}$  расположены на одном луче  $\arg z = 0$ , то в согласии с формулой (9)

$$H(0) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} \cos \pi \rho.$$

Далее

$$\begin{aligned} \ln |b_n| &= \ln \left| \frac{1}{Q_1(q_n) e^{-A_1 q_n}} \right| = -\ln |Q_1(q_n) e^{-A_1 q_n}| = -\ln |e^{-A_1 q_n}| - \\ & - \ln \left| \prod_{j \in J} \left( 1 - \frac{q_n}{j} \right) e^{\frac{q_n}{j}} \right| = A_1 q_n - \sum_{j \in J} \ln \left| \left( 1 - \frac{q_n}{j} \right) e^{\frac{q_n}{j}} \right| = \\ & = A_1 q_n - \sum_{j \in J} \left( \ln \left| 1 - \frac{q_n}{j} \right| + \frac{q_n}{j} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся стандартным разложением

$$\ln(1-x) + x = -\sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^p}{p}, \quad |x| < 1.$$

В наших обозначениях получим

$$\ln \left| 1 - \frac{q_n}{j} \right| + \frac{q_n}{j} = -\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{q_n}{j} \right)^p, \quad \left| \frac{q_n}{j} \right| < 1.$$

Условие  $q_n/j < 1$ , очевидно, выполняется, начиная с некоторого номера  $j > j_0$  (при фиксированном  $n$ ). Выбор  $j_0$  будет приведен ниже. Таким

образом,

$$\begin{aligned}
 \ln |b_n| &= A_1 q_n - \sum_{j \in J} \left( \ln \left| 1 - \frac{q_n}{j} \right| + \frac{q_n}{j} \right) = A_1 q_n + \sum_{\substack{j \in J \\ j > j_0}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{q_n}{j} \right)^p = \\
 &= A_1 q_n + \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{\substack{j \in J \\ j > j_0}} \frac{1}{p} \left( \frac{q_n}{j} \right)^p = A_1 q_n + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \sum_{\substack{j \in J \\ j > j_0}} \frac{1}{j^p} \leq \\
 &\leq A_1 q_n + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} = A_1 q_n + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} \right) = \\
 &= A_1 q_n + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \left( \zeta(p) - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} \right),
 \end{aligned}$$

где  $\zeta(p)$  – дзета-функция Римана, а переменная порядка суммирования в кратных рядах справедлива ввиду абсолютной сходимости каждого из рядов.

Известно (см., например, [2, глава IV, п. 3]), что для  $s = \sigma + it$  оценка

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

имеет место равномерно в области  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ ,  $|t| < 2\pi x/C_2$ , при фиксированном  $C_2$ . Тогда

$$\zeta(p) - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} = -\frac{j_0^{1-p}}{1-p} + O(j_0^{-p}) \quad \text{или} \quad \zeta(p) - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} \leq \frac{j_0^{1-p}}{p-1} + C_3 j_0^{-p},$$

где константа  $C_3$  не зависит от  $j_0$ .

Преобразуем второе слагаемое в выражении для  $\ln |b_n|$ . Получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \left( \zeta(p) - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} \right) &\leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \left( \frac{j_0^{1-p}}{p-1} + C_3 j_0^{-p} \right) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} \frac{j_0^{1-p}}{p-1} + \\
 &+ \sum_{p=2}^{\infty} \frac{q_n^p}{p} C_3 j_0^{-p} = j_0 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left( \frac{q_n}{j_0} \right)^p + C_3 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{q_n}{j_0} \right)^p < \\
 &< j_0 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{q_n}{j_0} \right)^p + C_3 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{q_n}{j_0} \right)^p = (j_0 + C_3) \frac{\left( \frac{q_n}{j_0} \right)^2}{1 - \frac{q_n}{j_0}},
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что

$$\frac{q_n}{j_0} < 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln |b_n| &< A_1 q_n + (j_0 + C_3) \frac{\left(\frac{q_n}{j_0}\right)^2}{1 - \frac{q_n}{j_0}} = A_1 q_n + (j_0 + C_3) \frac{\frac{q_n}{j_0^2}}{\frac{1}{q_n} - \frac{1}{j_0}} = \\ &= A_1 q_n - \frac{(j_0 + C_3) \frac{q_n}{j_0^2}}{\frac{1}{j_0} - \frac{1}{q_n}} = \frac{-q_n \left(\frac{j_0 + C_3}{j_0^2} - \frac{A_1}{j_0}\right) - A_1}{\frac{1}{j_0} - \frac{1}{q_n}}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{j_0 + C_3}{j_0^2} - \frac{A_1}{j_0} > 0, \quad j_0 + C_3 - A_1 j_0 > 0, \quad C_3 > j_0 (A_1 - 1), \quad j_0 < \frac{C_3}{A_1 - 1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{q_n^\rho} = -\infty \quad \text{для} \quad 0 < \rho < 1/2$$

и условие (15) выполнено.  $\square$

Далее запишем формулу суммирования Плана (5) в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = -\frac{1}{2}g(0) + \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{g(it) - g(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (16)$$

Положим в формуле (16) функцию  $g(\zeta)$  в виде (6). Ввиду условия (7) функция  $g(\zeta)$  равна нулю в натуральных точках, не принадлежащих последовательности  $\{q_n\}$ . А в точках последовательности (ввиду условия (8))

$$g(q_n) = \frac{Q(q_n) e^{-A_1 q_n}}{(z + q_n)^2} = \frac{Q_1(q_n) Q_2(q_n) e^{-A_1 q_n}}{(z + q_n)^2} = \frac{1}{(z + q_n)^2}.$$

Тем самым получаем утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z)$  – целая функция конечного порядка роста  $0 < \rho < 1/2$  с нулями  $z_1, z_2, \dots$ . Нули  $z_n = -q_n$ ,  $q_n > 0$ ,  $q_n$  образуют некоторую последовательность натуральных чисел. Тогда для  $\operatorname{Re} z > 0$  справедливо равенство

$$-\frac{d}{dz} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + q_n)^2} = -\frac{1}{2}g(0) + \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{g(it) - g(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt,$$

где функция  $g(\zeta)$  определена формулой (6).

## 5 Пример

В данном разделе приведем пример нулей  $z_n$  функции  $f(z)$  вида (2), для которых выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим  $z_n = -n^3$ , то есть в этом случае  $q_n = n^3$ .

Поскольку порядок канонического произведения равен показателю сходимости его нулей (см., например, [12, глава VIII, п. 8.2.5]), то для проверки условия  $0 < \rho < 1/2$  найдем показатель сходимости нулей  $\rho_1$ . Он определен по формуле

$$\rho_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |z_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n^3} = \frac{1}{3}.$$

Итак, найденная нами функция  $f(z)$ , удовлетворяющая условиям теоремы 1, имеет вид

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^3}\right).$$

## References

- [1] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [2] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, Oxford, 1951.
- [3] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On a Simple Identity for Eigenvalues of a Second Order Differential Operator*, Sov. Phys. Dokl., **88**:4 (1953), 593–596 (in Russian).
- [4] L.A. Dikii, *The Zeta-Function of an Ordinary Differential Equation on a Finite Interval*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **19**:4 (1955), 187–200 (in Russian).
- [5] L.A. Dikii, *Trace Formulas for Sturm-Liouville Differential Operators*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:3 (1958), 111–143 (in Russian).
- [6] V.B. Lidskii, V.A. Sadovnichii, *Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions*, Functional Analysis and Its Applications, **1**:2 (1967), 133–139.
- [7] S.A. Smagin, M.A. Shubin, *On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator*, Russian Mathematical Surveys, **39**:2 (1984), 201–202.
- [8] A.M. Kytmanov, S.G. Myslivets, *On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 863–870.
- [9] V.I. Kuzovatov, A.A. Kytmanov, *On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions*, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., **7**:4 (2014), 489–499.
- [10] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *Integral representations of quantities associated with Gamma function*, Ufa Mathematical Journal, **13**:4 (2021), 50–62.
- [11] A.I. Markushevich, *The theory of analytic functions. Vol. 2*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (in Russian).
- [12] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.
- [13] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, A. Sadullaev, *On the Zeta-Function of Zeros of an Entire Function*, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., **14**:5 (2021), 599–603.
- [14] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On an analog of the Binet integral representation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 840–852.
- [15] V.I. Kuzovatov, *Generalization of the Plana Formula*, Russian Mathematics, **62**:5 (2018), 34–43.

- [16] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions. V. 1*, MC Graw-Hill Book Company, New York, 1953.
- [17] B.Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1980.

VYACHESLAV IGOREVICH KUZOVATOV  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. SVOBODNY, 79,  
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [kuzovatov@yandex.ru](mailto:kuzovatov@yandex.ru)

ALEXANDER MECHISLAVOVICH KYTMANOV  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. SVOBODNY, 79,  
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
*E-mail address:* [akytmanov@sfu-kras.ru](mailto:akytmanov@sfu-kras.ru)