S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 144–145 (2024) УДК 514.765
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.??? MSC 57M60

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙ

Н.П. Можей

Abstract: The purpose of this work is a local description over the field $\mathbb{C}$ of four-dimensional symmetric homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure, the case is considered when the set of nilpotent elements in the isotropic representation of the stabilizer does not coincide with the stabilizer itself, the complete classification of such spaces is given explicitly.

Keywords: homogeneous space, symmetric space, almost symplectic structure.

1 Введение

Симплектическая геометрия – важный раздел современной дифференциальной геометрии. Первоначально повышенный интерес к симплектическим многообразиям связан с ролью пуассоновских структур в гамильтоновой динамике, этот интерес усилила публикация фундаментальных трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на

Mozhey, N.P., Symmetric homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case .

Поступила 1 мая 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет, в частности, естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам.

Изучение симметрических однородных пространств было начато в работах Э. Картана, рассмотревшего некоторые общие свойства таких пространств и подробно описавшего симметрические римановы пространства, им была решена [4] задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Целью данной работы является классификация над полем $\mathbb{C}$ четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, рассматривается случай, когда изотропное представление стабилизатора не является нильпотентным.

2 Основные определения

Пусть $(\overline{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство и $G = \overline{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Паре $(\overline{G}, G)$ поставим в соответствие пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$ и $\mathfrak{g}$ — подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G. Назовем пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Проблема классификации однородных пространств $(\overline{G}, M)$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$. Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [5].

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства V, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + V, \quad \mathfrak{g} \bigcap V = 0$; $\mathrm{ad}(G)V \subset V$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, V] \subset V$ и наоборот, если G связна. Такое разложение называется каноническим. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное. Симметрические однородные пространства – частный случай редуктивных однородных пространств. Если $\bar{G}/G$ является *симметрическим*, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, V] \subset V$ и $[V, V] \subset \mathfrak{g}$.

Пусть $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ — $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $\mathrm{B}(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$\big(x.b\big)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in V$, $b \in \mathrm{B}(V)$. *Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$-модуле V* называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in \mathrm{B}(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами,

$b \in \mathrm{B}(V)^{\mathfrak{g}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

Решение задачи классификации изотропно-точных пар разбивается на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. В работе [6] приведены подалгебры в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, описывается алгоритм нахождения почти симплектических изотропно-точных пар, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ назовем *тривиальной*, если существует подмодуль V $\mathfrak{g}$-модуля $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\bar{\mathfrak{g}} = V \oplus \mathfrak{g}$. Тривиальные пары однозначно определяются подалгеброй $\mathfrak{g}$ (список таких пар приведен в [6]), поэтому достаточно описать только нетривиальные пары. Для ссылки на подалгебры будем использовать следующее обозначение: d.n, где d — размерность подалгебры, а n — ее порядковый номер, соответствующие приведенным в [6].

3 Описание четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой

Проведем классификацию изотропно-точных пар с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и выберем из них нетривиальные симметрические. Ограничимся в данной работе случаем, когда множество нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{g}$ отлично от $\mathfrak{g}$.

Теорема 1. *1) Любое нетривиальное четырехмерное симметрическое однородное пространство с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемое парой $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, такой, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, эквивалентно одной и только одной из следующих пар:*

4.4.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	e_3	$-e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-e_3$	e_3	0	e_1-e_2	0	u_1	$-u_4$	0
e_4	e_4	$-e_4$	$-e_1+e_2$	0	u_2	0	0	$-u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	$2e_1+e_2$	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_4	e_1+2e_2
u_3	u_3	0	u_4	0	$-2e_1-e_2$	$-e_4$	0	0
u_4	0	u_4	0	u_3	$-e_3$	$-e_1-2e_2$	0	0

$4.10.6(\gamma=0)$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	e_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	$-e_3$	0	0

$4.11.2$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	$-e_2$	0	0

$6.3.3$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$2e_5$	e_4
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$4e_5$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-2e_5$	0	0	$-e_2$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-e_4$	$-4e_5$	e_2	0

2) Любое нетривиальное четырехмерное симметрическое однородное пространство с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемое парой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, *такой, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *– неразрешима, а* $\mathfrak{g}$ *– разрешима,* $\mathfrak{g}$ *не является состоящей только из нильпотентных элементов, эквивалентно одной и только одной из следующих пар:*

$1.5.3$	e_1	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	e_1
u_3	0	0	0	0	0
u_4	u_4	0	$-e_1$	0	0

2.4.7	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_1	0
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	e_1
u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0
u_4	u_4	0	0	$-e_1$	0	0

2.4.8	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_1	0
u_1	0	0	0	0	e_2	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	e_1
u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_4	u_4	0	0	$-e_1$	0	0

2.6.4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$-u_1$	u_2	u_3	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_2	u_1
u_1	u_1	0	0	0	e_2	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	e_2
u_3	$-u_3$	$-u_2$	$-e_2$	0	0	e_1
u_4	u_4	$-u_1$	0	$-e_2$	$-e_1$	0

2.9.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2.9.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

3.2.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	0	0	u_1	0
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	$-e_2$	0	0

3) Любое нетривиальное четырехмерное симметрическое однородное пространство с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемое парой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такой, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ разрешимы, $\mathfrak{g}$ не является состоящей только из нильпотентных элементов, эквивалентно одной и только одной из следующих пар:

2.4.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$\frac{2}{3}e_2$	$\frac{1}{3}u_1$	u_2	$-\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$-\frac{2}{3}e_2$	0	0	0	u_1	0
u_1	$-\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	e_2	0
u_3	$\frac{1}{3}u_3$	$-u_1$	0	$-e_2$	0	0
u_4	u_4	0	0	0	0	0

2.4.14$(\alpha=0)$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_1	0
u_1	0	0	0	0	e_2	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0	0	0

2.6.5	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$-u_1$	u_2	u_3	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_2	u_1
u_1	u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_4	u_4	$-u_1$	0	0	$-e_2$	0

3.9.5	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	u_2	$-u_3$	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	$-2e_3$	0	0	0	0	u_1	0
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_2	0
u_3	u_3	u_4	$-u_1$	0	$-e_2$	0	0
u_4	u_4	0	0	0	0	0	0

3.9.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{2}{3}e_2$	$\frac{2}{3}e_3$	$\frac{1}{3}u_1$	u_2	$-\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{2}{3}e_2$	0	0	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	$-\frac{2}{3}e_3$	0	0	0	0	u_1	0
u_1	$-\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_3	$\frac{1}{3}u_3$	u_4	$-u_1$	0	$-e_3$	0	0
u_4	u_4	0	0	0	0	0	0

3.9.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{4}{3}e_2$	$-\frac{2}{3}e_3$	$-\frac{1}{3}u_1$	u_2	$\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{4}{3}e_2$	0	0	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	$\frac{2}{3}e_3$	0	0	0	0	u_1	0
u_1	$\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_3	$-\frac{1}{3}u_3$	u_4	$-u_1$	0	0	0	e_3
u_4	u_4	0	0	0	0	$-e_3$	0

$3.9.16(\alpha=\beta=0)$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	0	0	0	0	0	u_1	0
u_1	0	0	0	0	0	e_3	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_3
u_3	0	u_4	$-u_1$	$-e_3$	0	0	e_2
u_4	u_4	0	0	0	$-e_3$	$-e_2$	0

3.10.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{2}{3}e_2$	$2e_3$	$-\frac{1}{3}u_1$	u_2	$\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{2}{3}e_2$	0	0	0	0	u_1	0
e_3	$-2e_3$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0	0
u_3	$-\frac{1}{3}u_3$	$-u_1$	0	0	0	0	e_2
u_4	u_4	0	$-u_2$	0	0	$-e_2$	0

3.10.10	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	0	0	0	0	0	u_1	0
e_3	$-2e_3$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	0	e_2	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0	0
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0	0	0
u_4	u_4	0	$-u_2$	0	0	0	0

4.3.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{2}{3}e_2$	$\frac{2}{3}e_3$	$2e_4$	$-\frac{1}{3}u_1$	u_2	$\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{2}{3}e_2$	0	0	0	0	0	u_1	0
e_3	$-\frac{2}{3}e_3$	0	0	0	0	0	u_2	u_1
e_4	$-2e_4$	0	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0	0	0
u_3	$-\frac{1}{3}u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	0	e_2
u_4	u_4	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-e_2$	0

4.3.4	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-2e_2$	0	$2e_4$	$-u_1$	u_2	u_3	$-u_4$
e_2	$2e_2$	0	0	0	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	u_2	u_1
e_4	$-2e_4$	0	0	0	0	0	0	u_2
u_1	u_1	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	0	e_3
u_4	u_4	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-e_3$	0

4.8.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{2}{3}e_2$	$\frac{2}{3}e_3$	$\frac{4}{3}e_4$	$\frac{1}{3}u_1$	u_2	$-\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{2}{3}e_2$	0	0	$2e_3$	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	$-\frac{2}{3}e_3$	0	0	0	0	0	u_1	0
e_4	$-\frac{4}{3}e_4$	$-2e_3$	0	0	0	0	u_2	u_1
u_1	$-\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_3	0
u_3	$\frac{1}{3}u_3$	u_4	$-u_1$	$-u_2$	0	$-e_3$	0	0
u_4	u_4	0	0	$-u_1$	0	0	0	0

4.8.12	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	0	e_4	0	u_2	0	$-u_4$
e_2	e_2	0	0	$2e_3$	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	0	0	0	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_3$	0	0	0	0	u_2	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0	$4e_3$	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	$2e_3$
u_3	0	u_4	$-u_1$	$-u_2$	$-4e_3$	$-e_4$	0	e_2
u_4	u_4	0	0	$-u_1$	0	$-2e_3$	$-e_2$	0

5.1.5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-\frac{4}{3}e_2$	$-\frac{2}{3}e_3$	$\frac{2}{3}e_4$	$2e_5$	$-\frac{1}{3}u_1$	u_2	$\frac{1}{3}u_3$	$-u_4$
e_2	$\frac{4}{3}e_2$	0	0	$2e_3$	e_4	0	u_1	$-u_4$	0
e_3	$\frac{2}{3}e_3$	0	0	0	0	0	0	u_1	0
e_4	$-\frac{2}{3}e_4$	$-2e_3$	0	0	0	0	0	u_2	u_1
e_5	$-2e_5$	$-e_4$	0	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$\frac{1}{3}u_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	0	0	0
u_3	$-\frac{1}{3}u_3$	u_4	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	0	e_3
u_4	u_4	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-e_3$	0

Для доказательства проводится классификация изотропно-точных почти симплектических пар и выбираются из них нетривиальные симметрические. Действительно, рассмотрим, например, пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, где

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & & & \\ & y & & \\ & & -x & \\ & & & -y \end{pmatrix} \right| x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ – базис в $\mathfrak{g}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис дополнительного пространства U. Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$ — нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Из того, что

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_1, \ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_2,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3, \ \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_4$$

следует

$$\begin{aligned} &[u_1, u_2] = 0, && [u_2, u_3] = 0, \\ &[u_1, u_3] = b_1 e_1 + b_2 e_2, && [u_2, u_4] = f_1 e_1 + f_2 e_2, \\ &[u_1, u_4] = 0, && [u_3, u_4] = 0. \end{aligned}$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i, u_j, u_k $(1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j < k \leqslant 4)$ и u_i, u_j, u_k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant 4)$, получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	$b_1 e_1$	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	$f_2 e_2$
u_3	u_3	0	$-b_1 e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-f_2 e_2$	0	0

.

Рассмотрим следующие случаи:

1° $b_1 = f_2 = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре

2.9.1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

.

2° $b_1^2 + f_2^2 \neq 0, b_1 f_2 = 0$. Отображение $\pi : \ \bar{\mathfrak{g}}' \to \bar{\mathfrak{g}}$ такое, что $\pi(e_1) = e_2,\ \pi(e_2) = e_1,\ \pi(u_1) = u_2,\ \pi(u_2) = u_1,\ \pi(u_3) = u_4,\ \pi(u_4) = u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	$f_2 e_1$	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	$b_1 e_2$
u_3	u_3	0	$-f_2 e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-b_1 e_2$	0	0

.

Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1 \neq 0,\ f_2 = 0$, и пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре

2.9.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

при помощи отображения $\pi : \ \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что $\pi(e_1) = e_1,\ \pi(e_2) = e_2,\ \pi(u_1) = \frac{1}{b_1} u_1,\ \pi(u_2) = u_2,\ \pi(u_3) = u_3,\ \pi(u_4) = u_4$.

3° $b_1 f_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре

2.9.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_1) = \frac{1}{b_1} u_1$, $\pi(u_2) = \frac{1}{f_2} u_2$, $\pi(u_3) = u_3$, $\pi(u_4) = u_4$.

Теперь покажем, что найденные пары не эквивалентны друг другу. Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, мы видим, что пары 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3 не эквивалентны. Пара 2.9.1 тривиальна, а пары 2.9.2 и 2.9.3 являются нетривиальными и симметрическими и входят в рассматриваемый в работе класс пар.

Применяя аналогичные рассуждения для всех подалгебр $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, таких, что множество нильпотентных элементов подалгебры $\mathfrak{g}$ отлично от самой $\mathfrak{g}$, и выбирая из полученных пар симметрические, получаем искомое локальное описание четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

References

[1] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algébres de Lie associées*, Journal Differential Geometry, **2** (1977), 253–300.

[2] A. A. Kirillov, *Local Lie algebras*, Russian Mathematical Surveys, **31**:4 (1976), 55–75.

[3] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, Journal Differential Geom., **18**:3 (1983), 523–557.

[4] E. Cartan, *Geometry of Lie groups and symmetric spaces*, M., 1949.

[5] G. D. Mostow, *The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces*, Ann. Math., **52**:3 (1950), 606–636.

[6] N. P. Mozhey, *Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case*, Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, **242**:1 (2021), 13–18.

Natalya Pavlovna Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,
P. Brovki Street, 6,
220013, Minsk, Belarus
E-mail address: mozheynatalya@mail.ru