Произведение компакта на слабо диадическое пространство является строгим a-пространством

А. В. Осипов, В. И. Белугин, Е. Г. Пыткеев

S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 515.122.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 54C10,
54D30

Abstract: A compact space X is called a *strictly a-space* if for any countable subset C of X there exists a continuous bijection from $X\setminus C$ onto some compact space Y that extends to a continuous mapping onto the entire space X.

In this paper, it is proved that the product of a compact space and a weakly dyadic space without isolated points is a strictly a-space. This is the answer to the question posed earlier by the authors.

Keywords: condensation, a-space, strictly a-space, weakly dyadic space.

1 Введение

Компактное пространство X называют *диадическим*, если X является непрерывным образом канторова куба D^T для некоторого бесконечного T, где $D = \{0, 1\}$ с дискретной топологией.

В 1970 году С. Мрувка [15] обобщил класс диадических пространств, определив класс полиадических пространств (= непрерывных образов произведений одноточечных компактификаций дискретных пространств).

В работе [16] В. Кульпа и М. Турзанский ввели класс слабо диадических пространств.

Пусть T бесконечное множество. Обозначим канторов куб как $D^T := \{p : p : T \to \{0, 1\}\}$. Для $s \subset T$ и $p \in D^T$ используем следующее обозначение $G_s(p) := \{f \in D^T : f \restriction s = p \restriction s \text{ и } p^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)\}$.

Определение ([16]).

• Подмножество $X \subset D^T$ называется *ω-множеством* тогда и только тогда, когда для каждого $p \in X$ существует $s \subset T$ такое, что $|s| \leq \omega$ и $G_s(p) \subset X$.

• Пространство Y называется *слабо диадическим*, если Y является непрерывным образом компактного ω-множества в D^T.

• Компактное пространство X называют *a-пространством*, если для любого счетного $C \subset X$ существует уплотнение (непрерывная биекция) пространства $X \setminus C$ на компакт [8].

• Компактное пространство X называют *строгим a-пространством*, если для любого счетного $C \subset X$ существует уплотнение пространства $X \setminus C$ на компакт Y, которое продолжается до непрерывного отображения на все пространство X [8].

Класс слабо диадических пространств содержит класс центрированных пространств в смысле Белла [18], который в свою очередь, содержит класс полиадических пространств Мрувка [15].

В этой работе мы продолжаем исследования свойств класса строгих a-пространств, начатые в работах [3, 4, 5, 6, 8, 13, 9, 7, 11, 12]. Получен результат, что произведение компакта на слабо диадическое пространство без изолированных точек является строгим a-пространством. Это отвечает на Вопрос 9, поставленный в работе [7].

2 Основные определения и обозначения

Все рассматриваемые в работе пространства предполагаются хаусдорфовыми топологическими пространствами. Будем использовать следующие обозначения: ω — первый бесконечный ординал, ω_1 — первый несчётный ординал, $\aleph_0$ — первый бесконечный кардинал, $\mathfrak{c}$ — мощность континуума, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$, как обычно, множество рациональных и натуральных чисел соответственно.

В работе будут использоваться фактор-пространства и связанные с ними понятия. Пусть X множество, $\mathcal{D}$ - разбиение X, т.е. семейство не пересекающихся подмножеств X, объединением которых является всё X. Проектирование (фактор-отображение) множества X на разбиение $\mathcal{D}$ есть отображение P значением которого в точке $x \in X$ является тот единственный элемент $\mathcal{D}$ которому принадлежит x ($x \in P(x)$).

Пусть X - топологическое пространство, тогда $\mathcal{D}$ наделяется фактор-топологией относительно отображения P ($\mathcal{D}$ с фактор-топологией — фактор пространство).

Множество $A \subset X$ называется *насыщенным относительно разбиения* $\mathcal{D}$, если A — объединение некоторой совокупности элементов $\mathcal{D}$ (т.е. для всякого элемента $T \in \mathcal{D}$, если $T \bigcap A \neq \emptyset$, то $T \subseteq A$).

Следующее понятие было введено П.С. Александровым [1] и Р. Мором [14].

Определение. Разбиение $\mathcal{D}$ топологического пространства X называется *непрерывным* (= *полунепрерывным сверху разбиением*), если для любого $T \in \mathcal{D}$ и для любого открытого множества $U \supseteq T$ найдется открытое насыщенное множество V такое, что $T \subseteq V \subseteq U$.

Лемма 1. Разбиение $\mathcal{D}$ топологического пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда проектирование P пространства X на фактор-пространство $\mathcal{D}$ замкнуто.

Используя эту лемму легко доказать, что фактор-пространство $\mathcal{D}$ компактного хаусдорфова пространства X является компактным хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда разбиение $\mathcal{D}$ непрерывно и состоит из замкнутых подмножеств X.

3 Основные результаты

В работе [7] было доказано, что каждое слабо диадическое пространство является строгим a-пространством.

В работе [8] (Теорема 5) было доказано, что произведение компакта на метризуемый компакт без изолированных точек является строгим a-пространством. В работе [9] было доказано, что произведение компакта на диадический компакт без изолированных точек является строгим a-пространством. Докажем, что это утверждение верно для более широкого класса пространств — слабо диадических пространств без изолированных точек.

Теорема 1. Произведение компакта на слабо диадическое пространство без изолированных точек является строгим a-пространством.

Доказательство. Пусть $Z = X \times Y$, где X — произвольный компакт, Y — слабо диадическое пространство без изолированных точек, $L \subseteq D^\tau$ — компактное множество и $\varphi : L \to Y$ — сюрьективное непрерывное отображение L на пространство Y. Заметим, что Y несчетно, иначе оно содержало бы изолированную точку. Обозначим $Z_1 = X \times D^\tau$.

Для каждого $z = (x, y) \in X \times L \subseteq Z_1$ положим $f(z) = f(x, y) = (x, \varphi(y)) \in Z$. Получаем непрерывное сюрьективное отображение $f : X \times L \to Z$. Возьмем произвольное счетное подмножество $C = \{c_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z$, где $c_k = (a_k, b_k)$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

$D^\tau = \prod\{D_\alpha : \alpha < \tau\}$, где $D_\alpha = \{0, 1\}$ и $W\{i_{\alpha_1}, ..., i_{\alpha_m}\} = \{i_{\alpha_1}\} \times ... \times \{i_{\alpha_m}\} \times \prod\{D_\alpha : \alpha \in \tau \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}\}$ — базисные окркстности в D^τ для различных α_1,...,$\alpha_m \in \tau$. Для любого множества $A \subseteq \tau$ и $i(A) = \{i_\alpha : \alpha \in A\}$ и $i_\alpha = 0$ или $i_\alpha = 1$ обозначаем $H_A^{i(A)} = \{x \in D^\tau : x(i_\alpha) \in i(A)$ при $\alpha \in A\}$. Для любого $z \in Z_1$ через z_D обозначаем проекцию точки z на D^τ. Заметим, что для любой точки $z = (x, d) \in f^{-1}(c_k)$ имеем $f(z) = (x, \varphi(d)) = c_k = (a_k, b_k)$ и $x = a_k$ и, значит, $f^{-1}c_k \subseteq \{a_k\} \times L$.

$L \subseteq D^\tau$ — ω-множество, значит для любого $x \in L$ существует $s \subseteq \tau$, $|s| \leq \aleph_0$ такие, что $G_s(x) \subseteq L$. Заметим, что для любого $\sigma \subseteq \tau$, $|\sigma| \leq \aleph_0$ выполняется $G_{s\cup\sigma}(x) \subseteq G_s(x) \subseteq L$.

Точка $c_1 = (a_1, b_1) \in Z$. Прообраз $f^{-1}(c_1) \subseteq \{a_1\} \times L \subseteq \{a_1\} \times D^\tau$. Зафиксируем точку $p \in f^{-1}(c_1)$. Для любого $k = 2, 3, ...$ в подпространстве $\{a_1\} \times D^\tau$ пространства Z_1 у точки p существует базисная окрестность $\{a_1\} \times \{i_{\alpha_1}\} \times ... \times \{i_{\alpha_m}\} \times \prod\{D_\alpha : \alpha \in \tau \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}\} = \{a_1\} \times H^{i(\alpha_1,...,\alpha_m)}_{\alpha_1,...,\alpha_m} = O_k \subseteq (\{a_1\} \times D^\tau) \setminus f^{-1}(c_k)$, если $f^{-1}(c_k) \cap (\{a_1\} \times L) = \emptyset$, то $O_k = \{a_1\} \times D^\tau$. Отсюда следует, что существует множество $\{a_1\} \times H^{i(B_1)}_{B_1}$, B_1 — счетно, такое что $p \in \{a_1\} \times H^{i(B_1)}_{B_1}$ и $(\{a_1\} \times H^{i(B_1)}_{B_1}) \cap f^{-1}(C \setminus \{c_1\}) = \emptyset$.

Из того, что $p_D \in L$ следует, что существует счетное множество $S_1 \subseteq \tau$ при котором $G_{S_1}(p_D) \subseteq L$. Можно считать, что $B_1 \subseteq S_1$. Имеем $\{a_1\} \times G_{S_1}(p_D) \subseteq \{a_1\} \times H^{i(S_1)}_{S_1} \subseteq (\{a_1\} \times D^\tau) \setminus f^{-1}(C \setminus \{c_1\})$.

Так как Y несчетно, в подпространстве $\{a_1\} \times Y$ пространства Z найдется точка $z \in Z \setminus C$.

Возьмем произвольно $q \in f^{-1}(z)$. Заметим, что $q \in (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C)$. Как и для точки p существует счетное множество B_2 так, что $q \in \{a_1\} \times H^{i(B_2)}_{B_2}$ и $(\{a_1\} \times H^{i(B_2)}_{B_2}) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$. Так как $q_D \in L$, то существует счетное множество $S_2 \subseteq \tau$ такое, что $\{a_1\} \times G_{S_2}(q_D) \subseteq (\{a_1\} \times L \setminus f^{-1}(C)$.

Можно найти счетное множество S так, что $S_1 \cup S_2 \subseteq S$ и $p \in \{a_1\} \times G_S(p_D) \subseteq (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C \setminus \{c_1\})$, $q \in \{a_1\} \times G_S(q_D) \subseteq (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C)$.

Рассмотрим две возможности и для каждой из них построим пару точек p^1 и q^1.

1. $\{a_1\} \times G_s(p_D) \not\subseteq f^{-1}(c_1)$.

Пусть $r \in (\{a_1\} \times G_s(p_D)) \setminus f^{-1}(c_1)$. Существует окрестность $H^{i(\gamma)}_\gamma$ точки r_D в D^τ такая, что $(\{a_1\} \times H^{i(\gamma)}_\gamma) \cap f^{-1}(c_1) = \emptyset$, где γ конечное подмножество τ.

Выберем точку $q^1 \in X \times L$ так, что $\pi_X(q^1) = \{a_1\}$, $q^1 \restriction \gamma = r_D \restriction \gamma$, $q^1_D \restriction (\tau \setminus \gamma) = p_D \restriction (\tau \setminus \gamma)$. Заметим, что $r \in (\{a_1\} \times G_s(p_D))$ и, следовательно, $q^1_D \restriction S = p_D \restriction S$. Тогда $q^1 \in \{a_1\} \times H^{i(\gamma)}_\gamma$, $q^1 \in \{a_1\} \times G_s(p) \subseteq (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C)$. Пусть $p^1 = p$. Заметим, что $p^1_D \restriction \alpha = q^1_D \restriction \alpha$ для всех $\alpha \in \tau \setminus \gamma$.

2. $\{a_1\} \times G_s(p_D) \subseteq f^{-1}(c_1)$.

Пусть точка p^1 такова, что $\pi_X(p^1) = \{a_1\}$, $p^1_D \restriction (p^{-1}(0) \cup S) = p_D \restriction (p^{-1}(0) \cup S)$, $p^1_D \restriction (\tau \setminus (p^{-1}(0) \cup S)) = q_D \restriction (\tau \setminus (p^{-1}(0) \cup S))$. Точка $p^1 \in \{a_1\} \times G_S(p_D) \subseteq f^{-1}(c_1)$. Выберем точку q^1 так, что $\pi_X(q^1) = \{a_1\}$, $q^1_D \restriction S = q_D \restriction S$, $q^1_D \restriction (\tau \setminus S) = p^1_D \restriction (\tau \setminus S)$. Заметим, что $q^{-1}_D(0) \subseteq (q^1_D)^{-1}(0)$ и из $q^1_D \restriction S = q_D \restriction S$ следует, что $q^1_D \in G_S(q_D)$. Значит, $q^1 \in \{a_1\} \times G_S(q) \subseteq \{a_1\} \times L$. Точка $q^1 \in (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C)$, точка $p^1 \in f^{-1}(c_1)$ и координаты точек p^1_D и q^1_D одинаковы при всех $\alpha \in \tau \setminus S$.

Итак, можно выбрать точки $p^1 \in f^{-1}(c_1)$ и $q^1 \in (\{a_1\} \times L) \setminus f^{-1}(C)$ и счетное множество $A_1 = S$ так, что $p^1_D \restriction (\tau \setminus A_1) = q^1_D \restriction (\tau \setminus A_1)$.

Далее проводим индукцию.

Пусть для всех $k < n$ построены точки p^k, q^k и множества $A_k = \{\alpha^k_1, \alpha^k_2, ...\} \subseteq \tau$ так, что

1. $p^k \in f^{-1}(c_k)$, $q^k \in Z_1 \setminus (f^{-1}(C) \cup \bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., k-1\})$;
2. $q^k_D \restriction \alpha = p^k_D \restriction \alpha$ для каждого $\alpha \in \tau \setminus A_k$;
3. $\pi_X(q^k) = \pi_X(p^k) = a_k$;
4. $p^k_D \restriction \alpha^l_m = q^k_D \restriction \alpha^l_m$ при всех $l, m < k$.

Прообраз $f^{-1}(c_n)$ точки $c_n = (a_n, b_n)$ лежит в подпространстве $\{a_n\} \times L$ пространства Z_1.

Обозначим $\beta_n = \{\alpha^l_m : l = 1, ..., n-1, m = 1, ..., n-1\}$. Подпространство $\{a_n\} \times L$ пространства Z_1 можно представить в виде $(\{a_n\} \times \prod\{D_\alpha : \alpha \in \beta_n\} \times \prod\{D_\alpha : \alpha \in \tau \setminus \beta_n\}) \cap L$. Заметим, что $B_n = \prod\{D_\alpha : \alpha \in \beta_n\}$ - множество всех точек конечного произведения двоеточий и потому конечно. Пусть $B_n = \{d_1, ..., d_m\}$.

Для любой точки $d_j \in B_n$ пусть $H_j = (\{a_n\} \times \{d_j\} \times \prod\{D_\alpha : \alpha \in \tau \setminus \beta_n\}) \cap L$. Тогда $\{a_n\} \times L = \bigcup\{H_j : j = 1, ..., m\}$. Пусть $H = \bigcup\{H_j : H_j \cap f^{-1}(c_n) \neq \emptyset\}$, $H' = \bigcup\{H_j : H_j \cap f^{-1}(c_n) = \emptyset\}$.

Множества H и H' открыто-замкнуты в $\{a_n\} \times L$ и $H \cup H' = \{a_n\} \times L$, $H \cap H' = \emptyset$.

Если $H \subseteq f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^k)) : k = 1, ..., n-1\})$, то множество $G = (\{a_n\} \times Y) \setminus f(H')$ открыто в $\{a_n\} \times Y$, счётно и содержит точку c_n. В пространстве $\{a_n\} \times Y$ существует открытое множество V так, что $c_n \in V \subseteq \overline{V} \subseteq G$. $\overline{V}$ - счётный компакт и потому содержит изолированную точку d. Так как $\{a_n\} \times Y$ гомеоморфно Y, то Y содержит изолированную точку, что противоречит условиям теоремы. Значит, H не лежит целиком в $f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^k)) : k = 1, ..., n-1\})$. Среди слагаемых множества H существует H_j такое, что некоторая точка $q \in H_j \setminus (f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^k)) : k = 1, ..., n-1\}))$ и некоторая точка $p \in f^{-1}(c_n)$.

Как на первом шаге индукции найдется счетное множество $S \subseteq \tau$ так, что $\{a_n\} \times G_S(p_D) \subseteq H_j \setminus (f^{-1}(C \setminus \{c_n\}) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., n-1\}))$ и $\{a_n\} \times G_S(q_D) \subseteq H_j \setminus (f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., n-1\}))$. Будем считать, что $\beta_n \subseteq S$.

Возможны два варианта:

1. $(\{a_n\} \times G_S(p_D) \setminus f^{-1}(c_n) \neq \emptyset$.

Пусть $r \in (\{a_n\} \times G_S(p_D) \setminus f^{-1}(c_n)$. Заметим, что $r \notin f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., n-1\}$. Существует окрестность $H^{i(\gamma)}_\gamma$ точки r_D такая, что $H^{i(\gamma)}_\gamma \cap f^{-1}(c_n) = \emptyset$. Выберем такую точку $q^n \in \{a_n\} \times L$, чтобы $q^n_D \restriction \gamma = r_D \restriction \gamma$, $q^n_D \restriction (\tau \setminus \gamma) = p_D \restriction (\tau \setminus \gamma)$. Точка $q^n \in \{a_n\} \times G_S(p_D) \subseteq (\{a_n\} \times L) \setminus (f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., n-1\}$. Для $p^n = p \in f^{-1}(c_n)$ и q^n выполняется $p^n_D \restriction (\tau \setminus \gamma) = q^n_D \restriction (\tau \setminus \gamma)$.

2. $\{a_n\} \times G_S(p_D) \subseteq f^{-1}(c_n)$.

Пусть p^n такая, что $\pi_X(p^n) = \{a_n\}$, $p^n_D \upharpoonright (p^{-1}(0) \cup S) = p_D \upharpoonright (p^{-1}(0) \cup S)$, $p^n_D \upharpoonright (\tau \setminus (p^{-1}(0) \cup S) = q_D \upharpoonright (\tau \setminus (p^{-1}(0) \cup S))$. Точка $p^n \in \{a_n\} \times G_S(p_D) \subseteq f^{-1}(c_n)$.

Выберем точку q^n такую, что $\pi_X(q^n) = \{a_n\}$, $q^n_D \upharpoonright S = q_D \upharpoonright S$, $q^n_D \upharpoonright (\tau \setminus S) = p^n_D \upharpoonright (\tau \setminus S)$. Так как $q^n_D \upharpoonright S = q_D \upharpoonright S$ и $q^{-1}(0) \subseteq (q^n)^{-1}(0)$ следует, что $q^n_D \in G_S(q_D) \subseteq L$. Точка $q^n \in \{a_n\} \times G_S(q_D) \subseteq (\{a_n\} \times L) \setminus f^{-1}(C) \cup (\bigcup\{f^{-1}(f(q^j)) : j = 1, ..., n-1\})$ и точка $p^n \in f^{-1}(c_n)$. Из $\beta_n \subseteq S$ следует $p^n, q^n \in H_j$ и $p^n_D \upharpoonright \alpha^l_m = q^n_D \upharpoonright \alpha^l_m$ для всех $l, m < n$. Положим $A_n = S$.

Рассмотрим разбиение пространства Z. Неодноточечными элементами разбиения являются пары $\{c_k, f(q^k)\}$. Проверим непрерывность разбиения. Пусть r - элемент разбиения и $Or = U \times V$ его произвольная окрестность.

Так как $f^{-1}(r)$ компактно, и $f^{-1}(r) \subseteq f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(Or)$, то существует конечное число базисных окрестностей вида $U_j = U \times (H^{i(\gamma_j)}_{\gamma_j} \cap L)$, где $\gamma_j \subseteq \tau$ конечно, $j = 1, ..., m$ таких, что объединение $G = \bigcup\{U_j : j = 1, ..., m\} \subseteq f^{-1}(Or)$. В силу непрерывности отображения f множество $O_1 r = Z \setminus f((X \times L) \setminus G)$ открыто, $r \in O_1 r \subseteq Or$ и для любого $z \in O_1 r$ $f^{-1}(z) \subseteq G$. Поэтому, если $f(p^k) \in O_1 r$, то $f^{-1}(f(p^k)) \subseteq G$ целиком и, значит, $p^k \in G$. Точно так же, если $f(q^n) \in O_1 r$, то, $q^n \in G$. Множество $Q = \bigcup\{\gamma_j : j = 1, ..., m\}$ конечно, множество $T = Q \cap (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ конечно. Каждое $\alpha \in T$ лежит в некотором $A_n = \{\alpha^n_1, \alpha^n_2, ...\}$, то есть $\alpha = \alpha^n_l$. Пусть $M = \max\{n, l : \alpha^n_l \in T\}$. При $k > m$ точки p^k и q^k могут лежать в $f^{-1}(G)$ только одновременно. Действительно, при $\alpha = \alpha^n_l \in T$ $n, l < k$ и, значит, $p^k_D \upharpoonright \alpha = q^k_D \upharpoonright \alpha$, а если $\alpha \in Q \setminus T$, то $\alpha \in \tau \setminus (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ и $p^n_D \upharpoonright \alpha = q^n_D \upharpoonright \alpha$ для любого n. Точки $c_k = f(p^k)$ и $f(q^k)$ могут лежать в $O_1 r$ только одновременно. Для каждого $\alpha \in T$ не более конечного числа элементов разбиения могут пересекать $O_1 r$ и $Z \setminus Or$. Выбросив эти точки из $O_1 r$, получим насыщенную окрестность точки r.

Таким образом, мы получили непрерывность разбиения и, следовательно по лемме 1, существует уплотнение пространства $Z \setminus C$ на компакт, которое продолжается до непрерывного отображения на все пространство Z. Теорема доказана.

Заметим, что если слабо диадическое пространство содержит изолированую точку, то теорема 1 будет неверна. Действительно, если Y — это произвольный компакт, который не является строгим a-пространством (например, любой экстремально несвязный компакт (см. теоремы 9 и 10 в [10])), а X — диадический компакт с изолированной точкой x_0, то пространство $X \times Y$ содержит открыто-замкнутое подмножество $\{x_0\} \times Y$ гомеоморфное Y. Свойство быть строго a-пространством наследуется на открыто-замкнутые подмножества [9]. Таким образом, $X \times Y$ не является строгим a-пространством.

Пусть τ — бесконечное кардинальное число, X — топологическое пространство и X' — его подпространство. Подпространство X' называют *τ-монолитным* в X, если для каждого $A \subseteq X'$ такого, что $|A| \leq \tau$, $\overline{A}^X$ — компакт веса $\leq \tau$.

Топологическое пространство X называют *густым*, если для каждого кардинального числа τ в X существует всюду плотное τ-монолитное в себе подпространство. Заметим, что каждое слабо диадическое пространство является густым пространством [17], и каждое густое пространство является компактным [2].

В завершение, представим ряд открытых вопросов (некоторые из которых анонсированны в работах [8, 13, 9, 7]) для дальнейших исследований.

Вопрос 1. Является ли густое пространство (строгим) a-пространством?

Вопрос 2. Будет ли произведение строгого a-пространства на $\omega_1 + 1$ (строгим) a-пространством?

Вопрос 3. Если $X \times (\omega_1 + 1)$ — a-пространство, то будет ли $X \times (\omega_1 + 1)$ строгим a-пространством?

Вопрос 4. Пусть $A(\tau)$ — одноточечная компактификация дискретного пространства мощности τ. Какими свойствами должно обладать компактное пространство K чтобы произведение K на $A(\tau)$ было (строгим) a-пространством? Достаточно ли, чтобы K было (строгим) a-пространством?

Вопрос 5. Будет ли произведение строгого a-пространства на диадический компакт строгим a-пространством?

Вопрос 6. Предположим, что произведение $Z = X \times Y$ является строгим a-пространством. Будет ли хотя бы один из сомножителей строгим a-пространством?

В частности, интересен следующий вопрос.

Вопрос 7. Существует ли не строгое a-пространство X такое, что квадрат X^2 является строгим a-пространством? Квадрат пространства "две стрелки" это строгое a-пространство?

References

[1] Александров П.С., *О некоторых основных направлениях в общей топологии*, Успехи матем. наук **19**:6, (1964), 3–46.

[2] Архангельский А.В., *Аппроксимация теории диадических бикомпактов*, Докл. АН СССР, 1969, **184**:4, 767–770.

[3] Белугин В.И. Уплотнение на бикомпакты. Докл. АН СССР, **207**:2 (1972), 259–261.

[4] Белугин В.И. Уплотнение на бикомпакты. Докл. Болгарской АН, **28**:11 (1975), 1447–1449.

[5] Белугин В.И., *Уплотнение на бикомпакты подпространств упорядоченных бикомпактов.* Сборник трудов "Топология и теория множеств". Ижевск. 1982, 3–8.

[6] Белугин В.И., *Уплотнение на бикомпакты и произведения пространств.* Кардинальные инварианты и расширения пространств. Ижевск. 1989, 36–43.
[7] Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г., *О свойствах подклассов слабо диадических компактов*, Сиб. мат. журнал., **63**:6 (2022), 1204–1212.
[8] Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г., *О классах субкомпактных пространств*, Математические заметки, **109**:6, 2021, 810–820.
[9] Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г., *О некоторых свойствах субкомпактных пространств*, Математические заметки, **111**:2, 2022, 188–201.
[10] Илиадис С., *О некоторых свойствах абсолютов*, Докл. АН СССР, 152:4 (1963), 798–800.
[11] Осипов А.В., Пыткеев Е.Г., *К вопросу об уплотнении на компакты.* Доклады Академии наук, **488**:2 (2019), 130–132.
[12] Осипов А.В., Пыткеев Е.Г., *Решение проблемы Пономарёва об уплотнении на компакты*, Сиб. мат. журнал., **62**:1 (2021), 164–172.
[13] Belugin V.I., Osipov A.V., Pytkeev E.G., *Compact condensations of Hausdorff spaces*, Acta Math. Hungar., **164**:1, 2021, 15–27.
[14] Moore R.L., *Foundations of point set theory*, AMS Colloquium Publ. XIII, N.Y. 1932.
[15] Mrówka S., *Mazur theorem and m-adic spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 299–305.
[16] Kulpa W., Turzaóski M., *Bijections onto compact spaces.* Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, **29**:2 (1988), 43–49.
[17] Turzański M., *On Generalizations of Dyadic Spaces*, Acta Universitatis Carolinae-Mathematica Et Physica, **30**:2, (1989), 153–159.
[18] Bell M.G., *Generalized dyadic spaces*, Fundam. Math. **125**:1, (1985), 47–58.

Alexander Vladimirovich Osipov
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya Str., 16,
Ural Federal University,
620108, Yekaterinburg, Russia
Email address: oab@list.ru

Vitalii Il'ich Belugin
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya Str., 16,
620108, Yekaterinburg, Russia
Email address: belug54@mail.ru

Evgenii Georgievich Pytkeev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya Str., 16,
620108, Yekaterinburg, Russia
Email address: pyt@imm.uran.ru