S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 513.83
517.965
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 39B05

ОБОБЩЕННЫЕ ЙЕНСЕНА-КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

И.В. ПОЛИКАНОВА

Abstract. The article presents solutions to functional equations that are both reminiscent of the Jensen and Cauchy equations. The peculiarity of these equations is that the unknown functions depend on several variables. Since functional equations contain an arbitrary homeomorphism, they admit an infinite number of consequences. The article shows the most beautiful of them. Some of them generalize previously known ones for functions of one variable (for example, the Gaussian functional equation), others are new. In order to make the derivation of formulas visual and formulas have an aesthetic appearance, we developed and used the calculus of multifunctions.

Keywords: functional equations of functions of several variables, multifunction, multiargument, Cauchy functional equations, Jensen functional equation, Gaussian functional equation.

1. Введение

В статье рассматриваются функциональные уравнения в узком смысле, т.е. такие, в которых знак равенства связывает значения неизвестной функции в разных точках посредством элементарных функций. Неизвестная функция зависит от n переменных. Исследований, посвящённых функциональным уравнениям от функций многих переменных, не так много, и главным образом они относятся к функциям от двух аргументов. Это уравнения Синцова (1903) [1] и его обобщения по пикседеровскому типу (1997) [2]. Из современных работ можно назвать статью А.Д. Полянина и А.И. Журова (2005) [3]. На сайте EqWorld [4] (авторские права А.Д. Полянина) приводится всего 7 уравнения от функций двух переменных. Что касается уравнений от

Polikanova, I.V., Generalized Jensen-Cauchy functional equations for functions of several variables.

Поступила 28 августа 2023 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

функций с произвольным числом переменных, то в [5] приводятся решения лишь аддитивного и сводящегося к нему экспоненциального уравнений Коши и упоминается об уравнении Йенсена, в [6] Даниэль Рим даёт решение аддитивного уравнения Коши в классе локально интегрируемых функций. Предложенная нами конструкция из функций, называемая мультифункциями, позволяет существенно расширить класс функциональных уравнений от функций многих переменных, допускающих явное решение. Используя её, автор в [7] нашёл решения функциональных уравнений Коши четырёх типов, Йенсена и Лобачевского от функций многих переменных в классе непрерывных функций. Все решения, включая известные, найдены принципиально новым способом. В настоящей работе рассматриваются функциональные уравнения, напоминающие одновременно уравнения Йенсена и уравнения Коши, последние являются их частными случаями.

В разделе 2 вводятся понятия мультифункций и связанных с ними операций, устанавливаются некоторые их свойства.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-ая декартова степень поля действительных чисел $\mathbb{R}$, а её элементы, как цельные образования и переменные отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, будем называть *мультиаргументами* и обозначать жирным шрифтом в отличие от вещественных координат: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. В дальнейшем всюду $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$. Пространство $\mathbb{R}^n$ наделено топологией, порождённой евклидовой метрикой.

$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \ x_i > 0, \ i = 1, ..., n\} = (0, +\infty)^n$,
$\bar{\mathbb{R}}^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., n\} = [0, +\infty)^n$.

Функция $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, порождает отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ от k мультиаргументов $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, ..., x_{(s)n})$, $s = 1, ..., k$, по правилу:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, ..., x_{(k)1}), \ \dots, f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, ..., x_{(k)n})\right).$$

Будем называть его *мультифункцией от k мультиаргументов*. Например:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n), \qquad \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Такая конструкция позволяет использовать более короткую и зримую запись для функциональных уравнений от функций многих переменных. Так, уравнение Йенсена от функций n переменных

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, ..., \lambda x_n + (1-\lambda) y_n) = \lambda f(x_1, ..., x_n) + (1-\lambda) f(y_1, ..., y_n)$$

может быть записано через мультиаргументы в виде:

$$\mathbf{J}. \qquad f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

Подобная запись применялась и ранее ([8], с. 4), но по отношению к мультиаргументам-векторам. О необходимости расширить диапазон действий с мультиаргументами свидетельствует применение мультифункций в частных случаях, например, при изучении периодических решений дифференциально-интегральных уравнений в работах [9], в которых используется краткая запись $t - k\omega$ для набора действительных аргументов вида

$$(t_1 - k_1\omega_1, ..., t_n - k_n\omega_n).$$

Стоит подчеркнуть, что неизвестные функции в обобщённых уравнениях Йенсена-Коши являются обычными функциями многих переменных, рассматриваемые в композиции с мультифункциями. Приведём основные факты из [7].

Теорема 1. *Единственными решениями уравнения Иенсена* $\boldsymbol{J}$ *при произвольном фиксированном* $\lambda \in (0, 1)$ *в классе непрерывных функций* $f : Q \to \mathbb{R}$, *определённых на замкнутом, с непустой внутренностью, выпуклом множестве* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *являются аффинные функции:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} + b_0 = b_1 x_1 + ... + b_n x_n + b_0$$

при любых действительных числах $b_1, ...b_n, b_0$.

Теорема 2. *Единственными решениями аддитивного уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_I. \quad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций $f : Q \to \mathbb{R}$, *определённых на замкнутом выпуклом конусе* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *с вершиной в* $\boldsymbol{0}$, *являются линейные функции:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} = b_1x_1 + ... + b_nx_n$$

при любых действительных числах $b_1, ..., b_n$.

Теорема 3. *Единственными решениями экспоненциального уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{II}. \qquad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций, определённых в $\mathbb{R}^n$ *являются постоянная функция* $f \equiv 0$ *и функции вида*

$$f(\boldsymbol{x}) = a^{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{x}} = a^{b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n}$$

при любых действительных числах $b_1, \dots b_n$ *и* $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 4. *Единственным решением логарифмического уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{III}. \qquad f(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

в классе функций, определённых на $\mathbb{R}^n$ *или* $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, *является постоянная:* $f \equiv 0$, *а в классе непрерывных функций, определённых на множестве* $\mathbb{R}^n_+$, *единственными решениями являются функции вида*

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a\boldsymbol{x} = b_1log_ax_1 + ... + b_nlog_ax_n$$

при любых действительных числах $b_1, \dots b_n$ *и* $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 5. *Единственными решениями степенного уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{IV}. \qquad f(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций, определённых на $\mathbb{R}^n_+$ *являются:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\star\boldsymbol{b}} = x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n} \quad \text{и} \quad f(\boldsymbol{x}) \equiv 0.$$

при любых действительных числах $b_1, \dots b_n$

В настоящей работе представлены решения функциональных уравнений:

1) обобщённого уравнения Иенсена (раздел 3) с фиксированными действительными числами $p_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m$, при $m \geq 2$:

$$\mathbf{GJ}_m. \quad f\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_m\mathbf{x}_m\right) = p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot f(\mathbf{x}_2) + ... + p_m \cdot f(\mathbf{x}_m);$$

2) обобщённых уравнений Йенсена-Коши четырёх видов (раздел 4) с фиксированными действительными числами $p \neq 0$, $q \neq 0$:

$$\mathbf{JK}_I. \qquad (f \circ k)\left(p \cdot k^{-1}(\mathbf{x}) + q \cdot k^{-1}(\mathbf{y})\right) = p \cdot f(\mathbf{x}) + q \cdot f(\mathbf{y});$$
$$\mathbf{JK}_{II}. \qquad (f \circ k)\left(p \cdot k^{-1}(\mathbf{x}) + q \cdot k^{-1}(\mathbf{y})\right) = f(\mathbf{x})^p f(\mathbf{y})^q;$$
$$\mathbf{JK}_{III}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\mathbf{x}))^p(k^{-1}(\mathbf{y}))^q) = p \cdot f(\mathbf{x}) + q \cdot f(\mathbf{y});$$
$$\mathbf{JK}_{IV}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\mathbf{x}))^p(k^{-1}(\mathbf{y}))^q) = f(\mathbf{x})^p f(\mathbf{y})^q,$$

где $k : \tilde{Q} \to Q$ – некоторый гомеоморфизм множества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$ на множество $Q \subset \mathbb{R}^l$, и их обобщения на произвольное число $m \geq 2$ мультиаргументов (раздел 5), а также ряд следствий из них (раздел 6).

Решения функциональных уравнений ищутся в классе непрерывных функций, что обусловлено тем, что все рассматриваемые уравнения в результате подстановок и замены функций сводятся к уравнению Йенсена от функций многих переменных, а решение последнего опирается на критерий аффинности (в теореме 1 [7] аффинная функция именуется линейной) для непрерывной функции. Области определения $\tilde{Q}$

искомых функций различны для разных уравнений. Конечно, было бы проще решения всех уравнений искать на "максимальном"(по включению) допустимом множестве. Нетрудно понять, что сужение решения, определённого на максимально допустимом множестве T, на любое его подмножество также является решением данного функционального уравнения. Поэтому класс решений на подмножествах множества T может быть богаче, чем на самом T. Так, например, логарифмическое уравнение Коши имеет в $\mathbb{R}^n$ единственное нулевое решение, тогда как в $\mathbb{R}^n_+$ класс решений имеет мощность континуума (смотри теорему 4). Стремлением выявить нетривиальные классы решений и продиктованы наши усилия по сужению естественной области определения искомых функций. При этом все эти множества являются либо замкнутыми выпуклыми либо гомеоморфными образами замкнутых выпуклых множеств, так как критерий аффинности функции установлен для функций на замкнутых выпуклых множествах. Вариации формы выпуклого множества (в одних случаях произвольная, в других – конус с вершиной в нуле, в третьих – само пространство $\mathbb{R}^n$ и т.д., однако все эти классы множеств содержат максимальное по включению множество $\mathbb{R}^n$) связаны с применяемыми подстановками: множества должны быть инвариантны относительно преобразований, определяемых этими подстановками.

2. Мультифункции.

В данном разделе мы определим конструкции из функций одной и нескольких переменных и выясним некоторые их свойства.

Посредством функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим отображение типа $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правилом

$$u(\mathbf{x}) = (u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n))$$

и будем называть его *мультифункцией одного мультиаргумента*. Например,

$$log_a\mathbf{x} = (log_a x_1, log_a x_2, ..., log_a x_n)\,, \qquad a^{\mathbf{x}} = (a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n})\,.$$

Аналогично функция двух действительных аргументов $v(x, y)$ порождает отображение типа $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ по правилу:

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (v(x_1, y_1), v(x_2, y_2), ..., v(x_n, y_n))\,.$$

Например: $\quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,. \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)\,.$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{y}} = (x_1^{y_1}, x_2^{y_2}, ..., x_n^{y_n})\,. \quad log_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = (log_{x_1}y_1, log_{x_2}y_2, ..., log_{x_n}y_n)\,.$$

Для функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, зависящей от k действительных аргументов, порождённая ею *мультифункция k мультиаргументов* $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, ..., x_{(s)n})$, $s = 1, ..., k$, представляет собой отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ и определяется правилом:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, ..., x_{(k)1}),\ \dots\ , f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, ..., x_{(k)n})\right).$$

Например, $\quad \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}\mathbf{z}} = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1z_1},\ \dots\ , \sqrt{x_n^2 + y_nz_n}\right).$

Краткости ради порождённые отображения будем называть *мультифункциями* (Не очень удачный термин, так как он уже используется как синоним многозначного отображения. У нас же отображения однозначны.)

Композиции мультифункций с отображениями и мультифункциями определяются так же и при тех же условиях, как композиции отображений.

Пример композиции мультифункций. Пусть $\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^m, \quad g(\mathbf{x}) = log_a\mathbf{x}.$ Тогда

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = (log_a\mathbf{x})^m = ((log_a x_1)^m\,,\ \dots\ , (log_a x_n)^m)\,,$$

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = log_a\mathbf{x}^m = (log_a(x_1^m),\ \dots\ , log_a(x_n^m))\,.$$

Пример композиции мультифункции и отображения. Пусть

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 = (x^2, y^2, u^2, v^2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{g}(x, y) = (x, y, xy, x + y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4.$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ \mathbf{g})(x, y) = (x^2, y^2, (xy)^2, (x + y)^2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4.$$

Мультифункции наследуют многие свойства порождающих их функций, например, инъективность, сюръективность (если они определены на декартовой степени некоторого множества), непрерывность. Кроме того, если порождающая функция $f(x)$ одного аргумента имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$, то её мультифункция $f(\mathbf{x})$ имеет обратную мультифункцию $f^{-1}(\mathbf{x}) = (f^{-1}(x_1), ..., f^{-1}(x_n))$. [7] Так, обратной мультифункцией к $log_a\mathbf{x}$ является мультифункция $a^{\mathbf{x}} = (a^{x_1}, ..., a^{x_m})$. Поэтому

$$a^{log_a\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad log_a a^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}.$$

Мультифункции наследуют и некоторые специфические свойства порождающих их функций. В частности, в этой статье будут использоваться следующие легко проверяемые формулы:

$$log_a\mathbf{x} + log_a\mathbf{y} = log_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}), \qquad a^{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = a^{\mathbf{x}}\cdot a^{\mathbf{y}}.$$

Введём в рассмотрение также следующие функции типа $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}_{\oplus} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \mathbf{x}_{\odot} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

и типа $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})_{\oplus} = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n.$$

$$\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}} = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_{\odot} = x_1^{b_1}\cdot x_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{b_n}.$$

Предложение 1.
1) $\mathbf{0}_{\oplus} = 0, \quad \mathbf{1}_{\oplus} = n. \quad \mathbf{0}_{\odot} = 0, \quad \mathbf{1}_{\odot} = 1.$
2) $(a\mathbf{x})_{\oplus} = a\mathbf{x}_{\oplus}, \quad (a\mathbf{x})_{\odot} = a^n\mathbf{x}_{\odot}.$
3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})_{\oplus} = \mathbf{x}_{\oplus} + \mathbf{y}_{\oplus}, \quad (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})_{\odot} = \mathbf{x}_{\odot}\cdot\mathbf{y}_{\odot}.$
4) $(\mathbf{x}^k)_{\odot} = (\mathbf{x}_{\odot})^k.$
5) $a^{\mathbf{x}_{\oplus}} = (a^{\mathbf{x}})_{\odot}, \quad (\log_a \mathbf{x})_{\oplus} = \log_a(\mathbf{x}_{\odot}).$

Предложение 2.
1) $\mathbf{0} * \mathbf{x} = 0. \quad \mathbf{1} * \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\oplus}.$
2) $\mathbf{b} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{b}.$
3) $(a\mathbf{b}) * \mathbf{x} = \mathbf{b} * (a\mathbf{x}) = a(\mathbf{b} * \mathbf{x}).$
4) $(\mathbf{b}+\mathbf{c}) * \mathbf{x} = \mathbf{b} * \mathbf{x} + \mathbf{c} * \mathbf{x}.$
5) $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) * \mathbf{x} = \mathbf{b} * (\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{x})_{\oplus}.$
6) $a^{\mathbf{x}*\mathbf{y}} = (a^{\mathbf{x}})^{\star\mathbf{y}} = (a^{\mathbf{y}})^{\star\mathbf{x}}.$
7) $\mathbf{b} * \log_a c\mathbf{x} = \log_a(c^{\mathbf{b}_{\oplus}}\cdot\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}).$

Доказательство. Проверим, например, свойство 7). $\mathbf{b} * \log_a c\mathbf{x} =$

$b_1\log_a cx_1 + \cdots + b_n\log_a cx_n = (b_1\log_a c + \cdots + b_n\log_a c) + (b_1\log_a x_1 + \cdots + b_n\log_a x_n)$

$= (\log_a c^{b_1+\cdots b_n}) + (\log_a x_1^{b_1} + \cdots + \log_a x_n^{b_n}) = \log_a(c^{\mathbf{b}_{\oplus}}) + \log_a(\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}) = \log_a\left(c^{\mathbf{b}_{\oplus}}\cdot(\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}})\right).$

$\square$

Предложение 3.
1) $\mathbf{0}^{\star\mathbf{x}} = 0$ при $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+. \quad \mathbf{1}^{\star\mathbf{x}} = 1 = \mathbf{x}^{\star\mathbf{0}}.$
2) $(a\mathbf{x})^{\star\mathbf{b}} = a^{\mathbf{b}_{\oplus}}\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}.$
3) $\mathbf{x}^{\star(a\mathbf{b})} = (\mathbf{x}^a)^{\star\mathbf{b}} = \left(\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}\right)^a.$
4) $(\mathbf{x})^{\star(\mathbf{a}+\mathbf{b})} = (\mathbf{x})^{\star\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{x})^{\star\mathbf{b}}.$
5) $(\mathbf{x})^{\star(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})^{\star\mathbf{b}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})^{\star\mathbf{a}}.$
6) $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^{\star\mathbf{a}} = \mathbf{x}^{\star\mathbf{a}}\cdot\mathbf{y}^{\star\mathbf{a}}.$
7) $\log_a\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}} = \mathbf{b} * \log_a\mathbf{x}.$
8) $\mathbf{x}^{\star\log_{\mathbf{x}}\mathbf{b}} = \mathbf{b}_{\odot}.$

Доказательство. Проверим, свойство 3).

$\mathbf{x}^{\star(a\mathbf{b})} = \Big((x_1, x_2, ..., x_n)^{(ab_1, ab_2, ..., ab_n)}\Big)_{\odot} = x_1^{ab_1} \cdot x_2^{ab_2} \cdot ... \cdot x_n^{ab_n} = (x_1^a)^{b_1} \cdot (x_2^a)^{b_2} \cdot ... \cdot (x_n^a)^{b_n} = \Big((x_1^a, x_2^a, ..., x_n^a)^{(b_1, b_2, ..., b_n)}\Big)_{\odot} = (\mathbf{x}^a)^{\star\mathbf{b}}$.

$\mathbf{x}^{\star(a\mathbf{b})} = x_1^{ab_1} \cdot x_2^{ab_2} \cdot ... \cdot x_n^{ab_n} = \Big(x_1^{b_1}\Big)^a \cdot \Big(x_2^{b_2}\Big)^a \cdot ... \cdot (x_n^{b_n})^a = \Big(x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot ... \cdot x_n^{b_n}\Big)^a = \big(\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}\big)^a$.

Проверим, свойство 6).

$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^{\star\mathbf{a}} = \Big((x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)^{(a_1, a_2, ..., a_n)}\Big)_{\odot} = (x_1y_1)^{a_1} \cdot (x_2y_2)^{a_2} \cdot ... \cdot (x_ny_n)^{a_n} = (x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}) \cdot (y_1^{a_1} \cdot y_2^{a_2} \cdot ... \cdot y_n^{a_n}) = \mathbf{x}^{\star\mathbf{a}} \cdot \mathbf{y}^{\star\mathbf{a}}$

□

3. Обобщённые функциональные уравнения Йенсена.

Теорема 6. *Единственными решениями обобщённого уравнения Иенсена при произвольных фиксированных действительных числах* $p \neq 0$, $q \neq 0$

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{GJ}. \qquad f(p\boldsymbol{x} + q\boldsymbol{y}) = p \cdot f(\boldsymbol{x}) + q \cdot f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций $f : Q \to \mathbb{R}$, *где замкнутое, с непустой внутренностью, множество* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *определёно условиями:*

a) Q *– выпукло, если* $p > 0$, $q > 0$ *и* $p + q = 1$,

b) Q *– выпуклый конус с вершиной* $\boldsymbol{0}$, *если* $p > 0$, $q > 0$ *и* $p + q \neq 1$,

c) $Q = \mathbb{R}^n$ *в остальных случаях,*

являются линейные функции:

$$\text{(2)} \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} = b_1x_1 + ... + b_nx_n, \qquad \text{если } p + q \neq 1,$$

и аффинные функции

$$\text{(3)} \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} + b_0 = b_1x_1 + ... + b_nx_n + b_0, \quad \text{если } p + q = 1,$$

при любых действительных числах $b_0, b_1, ..., b_n$.

Доказательство. Подстановка функции (3) в левую и правую части уравнения (1) даёт:

$$f(p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) = \mathbf{b} * (p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) + b_0.$$

$$p \cdot f(\mathbf{x}) + q \cdot f(\mathbf{y}) = p(\mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0) + q(\mathbf{b} * \mathbf{y} + b_0) = \mathbf{b} * (p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) + (p + q)b_0.$$

Равенство частей достигается тогда и только тогда, когда

$$b_0 = (p + q)b_0,$$

т. е. при $b_0 = 0$, если $p + q \neq 1$ и произвольном $b_0 \in \mathbb{R}$, если $p + q = 1$. Тем самым показали, что функции (2) и (3) являются решениями уравнения (1) при указанных условиях. Обоснуем, что других решений нет.

Случай 1. $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Следует из теоремы 1.

Случай 2. $p > 0$, $q > 0$, $p + q \neq 1$.

Положим в (1) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$:

$$f((p+q)\mathbf{x}) = (p+q)f(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{p+q} f((p+q)\mathbf{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left| \ \mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{p+q} \ \right| \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\mathbf{x}}{p+q}\right) = \frac{1}{p+q} f(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad | \ \mathbf{x} \to \mathbf{y} \ | \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\mathbf{y}}{p+q}\right) = \frac{1}{p+q} f(\mathbf{y}).$$

Тогда:

$$\text{(4)} \qquad p \cdot f\left(\frac{\mathbf{x}}{p+q}\right) + q \cdot f\left(\frac{\mathbf{y}}{p+q}\right) = \frac{p}{p+q} f(\mathbf{x}) + \frac{q}{p+q} f(\mathbf{y}).$$

С другой стороны, делая в **GJ** замену: $\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{p+q}$, $\quad \mathbf{y} \to \frac{\mathbf{y}}{p+q}$, получим:

$$f\left(\frac{p}{p+q}\mathbf{x} + \frac{q}{p+q}\mathbf{y}\right) = p \cdot f\left(\frac{\mathbf{x}}{p+q}\right) + q \cdot f\left(\frac{\mathbf{y}}{p+q}\right). \tag{5}$$

Из (4), (5) вытекает уравнение Иенсена **J** для $\lambda = \frac{p}{p+q}$:

$$f\left(\frac{p}{p+q}\mathbf{x} + \frac{q}{p+q}\mathbf{y}\right) = \frac{p}{p+q}f(\mathbf{x}) + \frac{q}{p+q}f(\mathbf{y}),$$

решением которого является аффинное отображение (3). В результате подстановок, приведших к уравнению Иенсена, могли получиться "лишние" решения, что и подтвердила сделанная выше проверка. Решениями являются линейные функции (2).

Применённые подстановки, представляющие собой гомотетию с центром в начале координат и положительными коэффициентами, допустимы, поскольку отображают выпуклый конус Q с вершиной в $\mathbf{0}$ в себя.

Случай 3. $p > 0$, $q < 0$. Обозначим $p = p_1$, $q = -q_1$. Тогда $p_1 > 0$ и $q_1 > 0$, а уравнение (1) примет вид:

$$f(p_1\mathbf{x} - q_1\mathbf{y}) = p_1 \cdot f(\mathbf{x}) - q_1 \cdot f(\mathbf{y}),$$

Перепишем его в виде:

$$f(p_1\mathbf{x} - q_1\mathbf{y}) + q_1 \cdot f(\mathbf{y}) = p_1 \cdot f(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p_1}f(p_1\mathbf{x} - q_1\mathbf{y}) + \frac{q_1}{p_1} \cdot f(\mathbf{y}) = f\left(\frac{1}{p_1}(p_1\mathbf{x} - q_1\mathbf{y}) + \frac{q_1}{p_1}\mathbf{y}\right).$$

Полагая $\mathbf{u} = p_1\mathbf{x} - q_1\mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, придём к уравнению **GJ** с положительными коэффициентами $\frac{1}{p_1}$ и $\frac{q_1}{p_1}$:

$$\frac{1}{p_1}f(\mathbf{u}) + \frac{q_1}{p_1} \cdot f(\mathbf{v}) = f\left(\frac{1}{p_1}\mathbf{u} + \frac{q_1}{p_1}\mathbf{v}\right).$$

Решением его согласно рассмотренным случаям 1 и 2 являются линейные функции (2), если $\frac{1}{p_1} + \frac{q_1}{p_1} \neq 1$, т. е. $p + q = p_1 - q_1 \neq 1$, и аффинные функции (3), если $p + q = p_1 - q_1 = 1$.

Заметим, что из применённых подстановок мультиаргументы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ однозначно выражаются через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Поэтому получились равносильные уравнения.

Случай 4. $p < 0, q < 0$. Обозначим: $p = -r$, $q = -t$. Тогда $r > 0$, $t > 0$, а уравнение (1) примет вид:

$$f(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) = -r \cdot f(\mathbf{x}) - t \cdot f(\mathbf{y}). \tag{6}$$

Перепишем его в виде:

$$f(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) + t \cdot f(\mathbf{y}) = -r \cdot f(\mathbf{x}) \tag{7}$$

Полагая в (6) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим:

$$f(-(r+t)\mathbf{x}) = -(r+t) \cdot f(\mathbf{x}). \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r+t}f(-(r+t)\mathbf{x}).$$

Подставляя полученное выражение для $f(\mathbf{x})$ в (7), получим:

$$f(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) + t \cdot f(\mathbf{y}) = \frac{r}{r+t}f(-(r+t)\mathbf{x}).$$

или

$$\frac{r+t}{r} \cdot f(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) + \frac{(r+t)t}{r} \cdot f(\mathbf{y}) = f(-(r+t)\mathbf{x})$$

или

$$\frac{r+t}{r} \cdot f(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) + \frac{(r+t)t}{r} \cdot f(\mathbf{y}) = f\left(\frac{r+t}{r}(-r\mathbf{x} - t\mathbf{y}) + \frac{(r+t)t}{r}\mathbf{y}\right).$$

Полагая $\mathbf{u} = -r\mathbf{x} - t\mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ придём к уравнению **GJ** с положительными коэффициентами $\frac{r+t}{r}$ и $\frac{(r+t)t}{r}$:

$$\frac{r+t}{r} \cdot f(\mathbf{u}) + \frac{(r+t)t}{r} \cdot f(\mathbf{v}) = f\left(\frac{r+t}{r}\mathbf{u} + \frac{(r+t)t}{r}\mathbf{v}\right).$$

Так как $r > 0$, $t > 0$, то $\frac{r+t}{r} + \frac{(r+t)t}{r} = \frac{(r+t)(1+t)}{r} = (1 + \frac{t}{r})(1+t) > 1$. Согласно случаю 2 данной теоремы решение уравнения (1) − линейное (2). Теорема доказана. □

Замечание 1. Рассмотрение множеств указанного вида связано с тем, что должно выполняться соотношение: $\{p\mathbf{x} + q\mathbf{y} | \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q\} = pQ + qQ \subset Q$.

Замечание 2. Обобщённое уравнение Йенсена при $p = 1$, $q = 1$ является аддитивным уравнением Коши.

Теорема 7. *Задано обобщённое уравнение Иенсена с m мультиаргументами, $m \geq 2$, и фиксированными действительными числами $p_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m$:*

$$(8) \quad \boldsymbol{GJ}_m. \qquad f\left(p_1\boldsymbol{x}_1 + p_2\boldsymbol{x}_2 + ... + p_m\boldsymbol{x}_m\right) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + p_2 \cdot f(\boldsymbol{x}_2) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m)$$

в классе непрерывных функций $f : Q \to \mathbb{R}$, где замкнутое, с непустой внутренностью, множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ определено условиями:

a) Q – выпукло, если $p_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$,
b) Q – выпуклый конус с вершиной $\boldsymbol{0}$, если $p_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, и $\sum_{i=1}^m p_i \neq 1$,
c) $Q = \mathbb{R}^n$ в остальных случаях.

Тогда единственными решениями его являются линейные функции (2), если $\sum_{i=1}^m p_i \neq 1$, и аффинные функции (3), если $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Доказательство. Выбор множества Q определяется условием: для любых $\mathbf{x}_i \in Q$, и $p_i > 0$, $i = 1, ..., m$, должно выполняться: $p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_m\mathbf{x}_m \in Q$.

Убедимся, что аффинные функции (3) являются решениями уравнения (8) при указанных ограничениях. Подставим функции (3) в левую и правую части уравнения и сравним полученные значения.

$$f\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_m\mathbf{x}_m\right) = \mathbf{b} * (p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_m\mathbf{x}_m) + b_0 =$$

$$\mathbf{b}*(p_1\mathbf{x}_1) + \mathbf{b}*(p_2\mathbf{x}_2) + ... + \mathbf{b}*(p_m\mathbf{x}_m) + b_0 = p_1(\mathbf{b}*\mathbf{x}_1) + p_2(\mathbf{b}*\mathbf{x}_2) + ... + p_m(\mathbf{b}*\mathbf{x}_m) + b_0.$$

$$p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot f(\mathbf{x}_2) + ... + p_m \cdot f(\mathbf{x}_m) = p_1(\mathbf{b}*\mathbf{x}_1 + b_0) + p_2(\mathbf{b}*\mathbf{x}_2 + b_0) + ... + p_m(\mathbf{b}*\mathbf{x}_m + b_0)$$

$$= p_1(\mathbf{b} * \mathbf{x}_1) + p_2(\mathbf{b} * \mathbf{x}_2) + ... + p_m(\mathbf{b} * \mathbf{x}_m) + (p_1 + p_2 + ... + p_m)b_0.$$

Мы видим, что значения обеих частей уравнения совпадают, когда

$$b_0 = (p_1 + p_2 + ... + p_m)b_0,$$

т. е. если $\sum_{i=1}^m p_i \neq 1$, то только при $b_0 = 0$, а если $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, то при любом действительном числе b_0, в частности, и при $b_0 = 0$.

Покажем, что при $m \geq 2$ других решений нет. Доказательство проведём индукцией по числу m мультиаргументов. Для $m = 2$ утверждение верно в силу теоремы 6. Допустим, что оно доказано для всех натуральных чисел s таких, что $2 \leq s < m$. Докажем его для m.

Случай 1: $\sum_{i=1}^m p_i \neq 1$. Полагаем в (8) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = ... = \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$. Это возможно, поскольку $\mathbf{0} \in Q$. Тогда

$$f\left(\mathbf{0}\right) = (p_1 + p_2 + ... + p_m) \cdot f(\mathbf{0}) \quad \Rightarrow \quad f\left(\mathbf{0}\right) = 0.$$

Полагая затем в (8) $\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$, получим:

$$f\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}\right) = p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot f(\mathbf{x}_2) + ... + p_{m-1} \cdot f(\mathbf{x}_{m-1})$$

для любых $\mathbf{x}_i \in Q$, $i = 1, ..., m-1$. В силу индукционного допущения решением этого уравнения являются функции вида (3). Так как полученное уравнение является следствием уравнения (8), то могли появиться лишние решения. И действительно, проведённая выше проверка показала, что решениями исходного уравнения является более узкий класс линейных функций (2).

Случай 2: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Полагая в (8) $\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$, получим:

$$f\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}\right) = p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot f(\mathbf{x}_2) + ... + p_{m-1} \cdot f(\mathbf{x}_{m-1}) + p_m \cdot f(\mathbf{0}).$$

Сделаем в полученном равенстве замену функции $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{0})$:

$$g\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}\right) + f(\mathbf{0}) =$$

$$p_1 \cdot (g(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{0})) + p_2 \cdot (g(\mathbf{x}_2) + f(\mathbf{0})) + ... + p_{m-1} \cdot (g(\mathbf{x}_{m-1}) + f(\mathbf{0})) + p_m \cdot f(\mathbf{0}).$$

Правая часть равенства преобразуется к виду:

$$p_1 \cdot g(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot g(\mathbf{x}_2) + ... + p_{m-1} \cdot g(\mathbf{x}_{m-1}) + (p_1 + p_2 + ... + p_m) \cdot f(\mathbf{0}) =$$

$$= p_1 \cdot g(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot g(\mathbf{x}_2) + ... + p_{m-1} \cdot g(\mathbf{x}_{m-1}) + f(\mathbf{0}).$$

В результате получаем уравнение с $m - 1$ мультиаргументами:

$$g\left(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 + ... + p_{m-1}\mathbf{x}_{m-1}\right) = p_1 \cdot g(\mathbf{x}_1) + p_2 \cdot g(\mathbf{x}_2) + ... + p_{m-1} \cdot g(\mathbf{x}_{m-1}),$$

в котором $\sum_{i=1}^{m-1} p_i \neq 1$. По индукционному предположению его решение имеет вид

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначая $f(\mathbf{0}) = b_0$ и возвращаясь к исходной функции, получим:

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{0}) = \mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0.$$

Проведенная выше проверка убеждает нас в том, что лишних решений мы не получили. Теорема доказана полностью. $\square$

4. Обобщённые Йенсена-Коши функциональные уравнения.

Рассматриваемые ниже гомеоморфизмы k и обратный к нему k^{-1} являются обычными отображениями от функций многих переменных. $(f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}) = f(k(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Теорема 8. *Задано обобщённое аддитивное уравнение Йенсена-Коши при фиксированных действительных числах $p \neq 0$ и $q \neq 0$*

$$\boldsymbol{JK}_I. \qquad (f \circ k)\left(p \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}) + q \cdot k^{-1}(\boldsymbol{y})\right) = p \cdot f(\boldsymbol{x}) + q \cdot f(\boldsymbol{y}) \tag{9}$$

в классе непрерывных функций, определённых на множестве $Q \subset \mathbb{R}^l$ – образе при гомеоморфизме $k : \tilde{Q} \to Q$ замкнутого, с непустой внутренностью, множества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$, определённого следующими условиями:

a) $\tilde{Q}$ – выпукло, если $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$,

b) $\tilde{Q}$ – выпуклый конус с вершиной в $\boldsymbol{0}$, если $p > 0$, $q > 0$, $p + q \neq 1$,

c) $\tilde{Q} = \mathbb{R}^n$, если среди чисел p, q есть отрицательные.

Тогда единственными решениями уравнения (9), являются функции

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}), \qquad \text{если } p + q \neq 1, \tag{10}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0, \quad \text{если } p + q = 1, \tag{11}$$

при любых $b_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сделаем в (9) подстановку: $\mathbf{x} = k(\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{y} = k(\tilde{\mathbf{y}})$:

$$(f \circ k)(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}}) = p \cdot (f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}) + q \cdot (f \circ k)(\tilde{\mathbf{y}}),$$

и произведём замену функции: $f \circ k = g$. Тогда полученное равенство примет вид:

$$g(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}}) = p \cdot g(\tilde{\mathbf{x}}) + q \cdot g(\tilde{\mathbf{y}}).$$

А это есть обобщённое уравнение Йенсена (1). По теореме 6 в классе непрерывных функций, каковыми и являются функции $g : \tilde{Q} \to \mathbb{R}$, оно имеет решения

$$\begin{array}{ll} g(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} * \tilde{\mathbf{x}} + b_0 & \textit{при } p+q=1, \\ g(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} * \tilde{\mathbf{x}} & \textit{при } p+q \neq 1. \end{array}$$

Возвращаясь к исходному мультиаргументу подстановкой $\tilde{\mathbf{x}} = k^{-1}(\mathbf{x})$ в последние равенства, придём к формулам (11), (10). □

Теорема 9. *Задано обобщённое экспоненциальное уравнение Йенсена-Коши при фиксированных действительных числах $p \neq 0$ и $q \neq 0$*

$$(12) \qquad \boldsymbol{JK}_{II}. \qquad (f \circ k)\left(p \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}) + q \cdot k^{-1}(\boldsymbol{y})\right) = f(\boldsymbol{x})^p f(\boldsymbol{y})^q$$

в классе непрерывных функций, определённых на замкнутом, с непустой внутренностью, множестве $Q \subset \mathbb{R}^l$ – образе при гомеоморфизме $k : \tilde{Q} \to Q$ множества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$, определённого следующими условиями:

a) $\tilde{Q}$ – выпукло, если $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$,

b) $\tilde{Q}$ – выпуклый конус с вершиной в $\boldsymbol{0}$, если $p > 0$, $q > 0$, $p + q \neq 1$.

c) $\tilde{Q} = \mathbb{R}^n$ если среди чисел p, q есть отрицательные.

Тогда единственными решениями уравнения (12), являются постоянная $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ (при $p > 0$, $q > 0$), и функции вида

$$(13) \qquad f(\boldsymbol{x}) = \pm a^{\boldsymbol{b}*k^{-1}(\boldsymbol{x})}, \qquad \textit{если } p+q \neq 1,$$

$$(14) \qquad f(\boldsymbol{x}) = \pm a^{\boldsymbol{b}*k^{-1}(\boldsymbol{x})+b_0}, \quad \textit{если } p+q = 1,$$

при любых $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $b_0, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. При этом, если хотя бы одно из чисел p, q – нецелое, то функции в (13), (14) берутся со знаком $+$; если p, q – целые числа, то со знаком $+$, если $p + q$ – чётное число, и с обоими знаками, если $p + q$ – нечётное число.

Доказательство. Сделаем в (12) подстановку: $\mathbf{x} = k(\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{y} = k(\tilde{\mathbf{y}})$:

$$(f \circ k)(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}}) = ((f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}))^p((f \circ k)(\tilde{\mathbf{y}}))^q.$$

Произведём замену функции: $f \circ k = g$. Тогда равенство примет вид

$$(15) \qquad g(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}}) = (g(\tilde{\mathbf{x}}))^p(g(\tilde{\mathbf{y}}))^q.$$

Допустим, что в некоторой точке $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \tilde{Q}$ функция g обращается в ноль. Покажем, что тогда для любого $\tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{Q}$ выполняется: $g(\tilde{\mathbf{y}}) = 0$.

Вариант a). $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Определим последовательность точек $(\tilde{\mathbf{y}}_i)$ рекуррентно:

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = p\tilde{\mathbf{x}}_0 + q\tilde{\mathbf{y}} = (1-q)\tilde{\mathbf{x}}_0 + q\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}}_0 + q(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0),$$
$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \tilde{\mathbf{y}}_{i-1} + q(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_{i-1}).$$

Заметим, что все точки $\tilde{\mathbf{y}}_i$ принадлежат отрезкам $[\tilde{\mathbf{y}}_{i-1}, \tilde{\mathbf{y}}]$, а значит, все они принадлежат множеству $\tilde{Q}$ в силу выпуклости последнего и поскольку точки $\tilde{\mathbf{y}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}_1$ принадлежат $\tilde{Q}$. Также для всех $i = 1, 2...$, справедливо: $g(\tilde{\mathbf{y}}_i) = 0$. Убедимся, что последовательность $(\tilde{\mathbf{y}}_i)$ сходится к $\tilde{\mathbf{y}}$ при $i \to \infty$. Нетрудно видеть:

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_1 = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0 - q(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) = (1-q)(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0), \\ \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_2 = (1-q)(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_1) = (1-q)^2(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0), \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots, \\ \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_i = (1-q)(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_{i-1}) = (1-q)^i(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_0). \end{array}$$

Ясно, что

$$\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}_i \to \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{y}}_i \to \tilde{\mathbf{y}} \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Так как $g(\tilde{\mathbf{y}}_i) = 0$ при всех $i = 1, 2...$, и функция g непрерывна в $\tilde{Q}$, то $g(\tilde{\mathbf{y}}) = 0$. Поэтому $g(\tilde{\mathbf{y}}) \equiv 0$ на множестве $\tilde{Q}$.

Вариант b). $p > 0$, $q > 0$, $p + q \neq 1$.

Покажем сначала, что $g(\mathbf{0}) = 0$. Подставляя в (15) $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}}$ и обозначая $s = p + q$, получим, что для любого $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{Q}$ справедливо равенство:

$$g(s\tilde{\mathbf{x}}) = (g(\tilde{\mathbf{x}}))^s. \tag{16}$$

Рассмотрим 2 случая: $0 < s < 1$ и $s > 1$.

Случай: $0 < s < 1$. Полагая в (16) $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_0$, получим:

$$g(s\tilde{\mathbf{x}}_0) = (g(\tilde{\mathbf{x}}_0))^s = 0^s = 0.$$

Подставляя в (16) $\tilde{\mathbf{x}} = s\tilde{\mathbf{x}}_0$, получим

$$g(s^2\tilde{\mathbf{x}}_0) = (g(s\tilde{\mathbf{x}}_0))^s = 0^s = 0.$$

По индукции доказывается, что

$$g(s^i\tilde{\mathbf{x}}_0) = 0 \quad \text{при всех } i = 1, 2, ...$$

Но $s^i\tilde{\mathbf{x}}_0 \to \mathbf{0}$ при $i \to \infty$, так как $s < 1$. Учитывая непрерывность функции g в $\tilde{Q}$, а значит и в точке $\mathbf{0}$, запишем:

$$g(\mathbf{0}) = g(\lim_{i\to\infty} s^i\tilde{\mathbf{x}}_0) = \lim_{i\to\infty} g(s^i\tilde{\mathbf{x}}_0) = \lim_{i\to\infty} 0 = 0.$$

Случай: $s > 1$. Полагая в (16) $\tilde{\mathbf{x}} = s^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0$, получим:

$$g(\tilde{\mathbf{x}}_0) = \left(g(s^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0)\right)^s = 0. \quad \Rightarrow \quad g(s^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0) = 0.$$

Подставляя в (16) $\tilde{\mathbf{x}} = s^{-2}\tilde{\mathbf{x}}_0$, получим

$$g(s^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0) = \left(g(s^{-2}\tilde{\mathbf{x}}_0)\right)^s = 0. \quad \Rightarrow \quad g(s^{-2}\tilde{\mathbf{x}}_0) = 0.$$

По индукции доказывается, что

$$g(s^{-i}\tilde{\mathbf{x}}_0) = 0 \quad \text{при всех } i = 1, 2, ...$$

Но $s^{-i}\tilde{\mathbf{x}}_0 \to \mathbf{0}$ при $i \to \infty$, так как $s > 1$. Учитывая непрерывность функции g в $\tilde{Q}$, получим $g(\mathbf{0}) = 0$. Итак, в обоих случаях имеем: $g(\mathbf{0}) = 0$.

Пусть $\tilde{\mathbf{z}} \in \tilde{Q}$ – произвольный элемент. Произведя в (15) допустимую подстановку: $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $\quad \tilde{\mathbf{y}} = q^{-1}\tilde{\mathbf{z}}$, получим:

$$g(\tilde{\mathbf{z}}) = g\left(p \cdot \mathbf{0} + q \cdot \left(q^{-1}\tilde{\mathbf{z}}\right)\right) = (g(\mathbf{0}))^p \left(g\left(q^{-1}\tilde{\mathbf{z}}\right)\right)^q = 0^p \cdot \left(g\left(q^{-1}\tilde{\mathbf{z}}\right)\right)^q = 0.$$

$$\Rightarrow \quad g(\tilde{\mathbf{z}}) = 0 \quad \text{при всех } \tilde{\mathbf{z}} \in \tilde{Q} \quad \Rightarrow \quad g(\tilde{\mathbf{z}}) \equiv 0.$$

Вариант c). Если среди чисел p, q есть отрицательные, то функция g не может обращаться в ноль, так как в этом случае правая часть равенства (15) не определена.

Итак, показали, что когда функция g обращается в 0 в одной точке, то она тождественно равна нулю в $\tilde{Q}$. А значит $f(\mathbf{x}) \equiv 0$. Подстановка этой константы в уравнение (12) подтверждает, что она является его решением.

Таким образом, всякое решение уравнения (15), не являющееся тождественным нулём, не обращается в 0 ни в одной точке множества Q. Так как оно является непрерывной функцией, определённой на связном множестве, то оно знакопостоянно. Как следствие получаем:

$$|g(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}})| = |g(\tilde{\mathbf{x}})|^p |g(\tilde{\mathbf{y}})|^q. \tag{17}$$

Прологарифмируем это равенство :

$$\log_a |g(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}})| = p \log_a |g(\tilde{\mathbf{x}})| + q \log_a |g(\tilde{\mathbf{y}})|.$$

После ввода новой функции $h(\tilde{\mathbf{x}}) = \log_a |g(\tilde{\mathbf{x}})|$ равенство примет вид:

$$h(p\tilde{\mathbf{x}} + q\tilde{\mathbf{y}}) = p \cdot h(\tilde{\mathbf{x}}) + q \cdot h(\tilde{\mathbf{y}}).$$

А это есть уравнение Йенсена (1), которое по теореме 6 в классе непрерывных на множестве $\tilde{Q}$ функций, каковыми и являются функции $h : \tilde{Q} \to \mathbb{R}$, имеет решения:

$$h(\tilde{\mathbf{x}}) = \log_a |g(\tilde{\mathbf{x}})| = \mathbf{b} * \tilde{\mathbf{x}} + b_0 \quad \textit{при } p+q=1,$$
$$h(\tilde{\mathbf{x}}) = \log_a |g(\tilde{\mathbf{x}})| = \mathbf{b} * \tilde{\mathbf{x}} \quad \textit{при } p+q\neq 1.$$

Выражая из этих соотношений функцию g, получим:

$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = f \circ k(\tilde{\mathbf{x}}) = \pm a^{\mathbf{b}*\tilde{\mathbf{x}}+b_0} \quad \textit{при } p+q=1,$$
$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = f \circ k(\tilde{\mathbf{x}}) = \pm a^{\mathbf{b}*\tilde{\mathbf{x}}} \quad \textit{при } p+q\neq 1.$$

Возвращаясь к исходному мультиаргументу подстановкой $\tilde{\mathbf{x}} = k^{-1}(\mathbf{x})$ в последние равенства, придём к формулам (14) и (13) соответственно.

Переход от (15) к (17) мог привести к лишним решениям. Сделаем проверку, подставив формулы (14) в исходное уравнение, принимая во внимание, что при $\mathbf{z} \in \tilde{Q}$

$$f(k(\mathbf{z})) = \pm a^{\mathbf{b}*\mathbf{z}+b_0}.$$

Прежде всего заметим, что если хотя бы одно из чисел p, q – нецелое, то правая часть уравнения (12) имеет смысл лишь при положительных значениях функции $f(\mathbf{x})$. Поэтому в формулах (13), (14) берётся знак $+$.

Пусть p, q – целые числа. Правая часть уравнения примет вид:

$$f(\mathbf{x})^p f(\mathbf{y})^q = \left(\pm a^{\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{x})+b_0}\right)^p \cdot \left(\pm a^{\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{y})+b_0}\right)^q =$$

$$= (\pm 1)^{p+q} \cdot a^{p(\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{x})+b_0)} \cdot a^{q(\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{y})+b_0)} = (\pm 1)^{p+q} \cdot a^{p\cdot\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{x})+q\cdot\mathbf{b}*k^{-1}(\mathbf{y})+(p+q)b_0} =$$

$$= (\pm 1)^{p+q} \cdot a^{\mathbf{b}*(p\cdot k^{-1}(\mathbf{x})+q\cdot k^{-1}(\mathbf{y}))+(p+q)b_0}.$$

Левая часть уравнения:

$$f\left(k(p\cdot k^{-1}(\mathbf{x}) + q\cdot k^{-1}(\mathbf{y}))\right) = \pm a^{\mathbf{b}*(p\cdot k^{-1}(\mathbf{x})+q\cdot k^{-1}(\mathbf{y}))+b_0}.$$

Приравниваем обе части:

$$\pm a^{\mathbf{b}*(p\cdot k^{-1}(\mathbf{x})+q\cdot k^{-1}(\mathbf{y}))+b_0} = (\pm 1)^{p+q} \cdot a^{\mathbf{b}*(p\cdot k^{-1}(\mathbf{x})+q\cdot k^{-1}(\mathbf{y}))+(p+q)b_0}.$$

После деления на общий множитель будем иметь:

$$\pm a^{b_0} = (\pm 1)^{p+q} a^{(p+q)b_0}.$$

Таким образом, если $p+q=1$ (например $p=5$, $q=-4$), то имеем тождество при любом $b_0 \in \mathbb{R}$ и любом знаке $+$, $-$. Если $p+q\neq 1$, то равенство достигается при $b_0=0$ и любом знаке $+$, $-$, если $(p+q)$ – нечётное число и при знаке $+$, если $(p+q)$ – чётное число. □

Замечание 3. Очевидное постоянное решение $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ уравнения (12) при любых $p\neq 0$, $q\neq 0$ описывается формулами (13), (14) при $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ и $b_0=0$.

Теорема 10. *Пусть $\tilde{Q} = P^n \subset \mathbb{R}^n$, где P – числовой интервал одного из видов $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, $(0,c]$, $[c,d]$, $[c,+\infty)$, $c,d \in \mathbb{R}_+$, а $k : \tilde{Q} \to Q$ – гомеоморфизм на некоторое подмножество $Q \subset \mathbb{R}^l$. Единственными решениями обобщённого логарифмического уравнения Йенсена-Коши при фиксированных действительных числах $p\neq 0$ и $q\neq 0$*

(18) $\quad \boldsymbol{JK}_{III}. \quad (f\circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^p(k^{-1}(\boldsymbol{y}))^q) = p\cdot f(\boldsymbol{x}) + q\cdot f(\boldsymbol{y})$

в классе непрерывных функций, определённых на Q, являются:

(19) $\quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}), \quad$ *если* $p+q\neq 1$,

(20) $\quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0, \quad$ *если* $p+q=1$,

при любых $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $b_0, a \in \mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$.

Доказательство. Сделаем в (18) подстановку: $\mathbf{x} = k(\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{y} = k(\tilde{\mathbf{y}})$:

$$(f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}^p \tilde{\mathbf{y}}^q) = p \cdot (f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}) + q \cdot (f \circ k)(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Новая подстановка $\tilde{\mathbf{x}} = a^{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{y}} = a^{\mathbf{v}}$ преобразует полученное уравнение к виду:

$$(f \circ k)(a^{p\mathbf{u}+q\mathbf{v}}) = p \cdot (f \circ k)(a^{\mathbf{u}}) + q \cdot (f \circ k)(a^{\mathbf{v}}).$$

Замена функции: $g(\mathbf{u}) = (f \circ k)(a^{\mathbf{u}})$ приводит равенство к уравнению Йенсена (1):

$$g(p\mathbf{u} + q\mathbf{v}) = p \cdot g(\mathbf{u}) + q \cdot g(\mathbf{v}),$$

имеющего в классе непрерывных функций (а функция g является таковой, будучи композицией непрерывных функций), определённых на замкнутом выпуклом множестве $log_a\tilde{Q}$ (одного из видов $\mathbb{R}^n$, $(0,r]^n$, $[r,t]^n$, $[r,+\infty)^n$, $(-\infty,t]^n$) решения:

$$\begin{array}{ll} g(\mathbf{u}) = (f \circ k)(a^{\mathbf{u}}) = \mathbf{b} * \mathbf{u} + b_0 & \textit{при } p + q = 1, \\ g(\mathbf{u}) = (f \circ k)(a^{\mathbf{u}}) = \mathbf{b} * \mathbf{u} & \textit{при } p + q \neq 1. \end{array}$$

Возвращаясь к исходному мультиаргументу подстановкой $\mathbf{u} = log_a k^{-1}(\mathbf{x})$ в последние равенства, придём к (20), (19). □

Замечание 4. *В классе непрерывных функций, определённых на произвольном множестве $Q = k(\tilde{Q})$, где k – гомеоморфизм, такой что $k(\mathbf{0}) \in Q$, единственными решениями уравнения (18) при $p > 0$, $q > 0$ будут постоянные $f(\boldsymbol{x}) \equiv c$ при произвольном $c \in \mathbb{R}$, если $p + q = 1$, и постоянная $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, если $p + q \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, подставляя $k(\mathbf{0})$ в (18) вместо $\mathbf{x}$, получим:

$$\forall_{\mathbf{y}\in Q} \quad f(k(\mathbf{0})) = p \cdot f(k(\mathbf{0})) + q \cdot f(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{y}) \equiv \frac{1-p}{q} f(k(\mathbf{0})).$$

Подставляя $k(\mathbf{0})$ в (22) вместо $\mathbf{y}$, получим:

$$\forall_{\mathbf{x}\in Q} \quad f(k(\mathbf{0})) = p \cdot f(\mathbf{x}) + q \cdot f(k(\mathbf{0})) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) \equiv \frac{1-q}{p} f(k(\mathbf{0})).$$

Следовательно,

$$\frac{1-p}{q} f(k(\mathbf{0})) = \frac{1-q}{p} f(k(\mathbf{0})) \quad \Rightarrow \quad f(k(\mathbf{0})) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1-p}{q} = \frac{1-q}{p}.$$

Последнее равенство справедливо при $p + q = 1$ либо при p=q. В любом случае, если решение уравнения (18) существует, то оно является постоянной функцией: $f(\mathbf{x}) \equiv c$. Подстановкой в (18) убеждаемся, что при $p+q = 1$ тождество получается при любом $c \in \mathbb{R}$, а при $p + q \neq 1$ только при $c = 0$. □

Замечание 5. Замена основания логарифма в формулах (19), (20) не меняет вида решения. Поэтому можно брать в качестве основания число Неппера e.

Теорема 11. *Пусть задано обобщённое степенное уравнение Йенсена-Коши при фиксированных действительных числах $p \neq 0$ и $q \neq 0$*

$$\boldsymbol{JK}_{IV}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^p (k^{-1}(\boldsymbol{y}))^q) = f(\boldsymbol{x})^p f(\boldsymbol{y})^q \tag{21}$$

в классе непрерывных функций, определённых на $Q = k(\tilde{Q})$ – гомеоморфном образе множества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$, определённого следующими условиями:

a) $\tilde{Q} = \tilde{P}^n$, где $\tilde{P}$ – числовой интервал одного из видов $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$, если $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$,

b) $\tilde{Q} = \mathbb{R}^n_+ = (0, +\infty)^n$ в остальных случаях,
$k^{-1}(\boldsymbol{x}) = (k_1(\boldsymbol{x}), ..., k_n(\boldsymbol{x}))$ – обратный гомеоморфизм.

Тогда единственными решениями уравнения (21) являются функции:

$$f(\boldsymbol{x}) = \pm(k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\star\boldsymbol{b}} = \pm k_1(\boldsymbol{x})^{b_1} \cdot \ldots \cdot k_n(\boldsymbol{x})^{b_n}, \qquad \textit{если } p + q \neq 1, \tag{22}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \pm c \cdot (k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\star\boldsymbol{b}} = \pm c \cdot k_1(\boldsymbol{x})^{b_1} \cdot \ldots \cdot k_n(\boldsymbol{x})^{b_n}, \quad \textit{если } p + q = 1, \tag{23}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *и* $c > 0$. *При этом, если хотя бы одно из чисел* p, q *– нецелое, то функции в (22), (23) берутся со знаком* $+$; *если* p, q *– целые числа, то* $-$ *со знаком* $+$, *если* $p+q$ *– чётное число, и с обоими знаками, если* $p+q$ *– нечётное число.*

Доказательство. Сделаем в (21) подстановку: $\mathbf{x} = k(\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{y} = k(\tilde{\mathbf{y}})$:

$$(f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}^p \cdot \tilde{\mathbf{y}}^q) = ((f \circ k)(\tilde{\mathbf{x}}))^p \cdot ((f \circ k)(\tilde{\mathbf{y}}))^q.$$

Произведём замену функции: $f \circ k = g$. Тогда последнее равенство примет вид

$$g(\tilde{\mathbf{x}}^p \cdot \tilde{\mathbf{y}}^q) = (g(\tilde{\mathbf{x}}))^p \cdot (g(\tilde{\mathbf{y}}))^q. \tag{24}$$

Также как в теореме 9 рассматриваем 2 варианта.

Вариант 1. *Хотя бы одно из чисел* p, q *отрицательно,* и тогда функция g знакопостоянна, причём, положительна, если числа p, q не целые. Новая подстановка $\tilde{\mathbf{x}} = e^{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{y}} = e^{\mathbf{v}}$ преобразует полученное уравнение к виду:

$$g(e^{p\mathbf{u}+q\mathbf{v}}) = (g(e^{\mathbf{u}}))^p (g(e^{\mathbf{v}}))^q.$$

Как следствие получаем равенство:

$$|g(e^{p\mathbf{u}+q\mathbf{v}})| = |g(e^{\mathbf{u}})|^p \cdot |g(e^{\mathbf{v}})|^q.$$

Прологарифмируем его по основанию e:

$$\ln|g(e^{p\mathbf{u}+q\mathbf{v}})| = p\ln|g(e^{\mathbf{u}})| + q\ln|g(e^{\mathbf{v}})|.$$

Произведём замену функции: $h(\mathbf{u}) = \ln|g(e^{\mathbf{u}})|$. Тогда последнее равенство примет вид уравнения Йенсена (1):

$$h(p\mathbf{u} + q\mathbf{v}) = p \cdot h(\mathbf{u}) + q \cdot h(\mathbf{v}).$$

Область изменения мультиаргументов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ функции g совпадает с образом множества $\tilde{Q}$ при отображении $\ln\tilde{\mathbf{x}}$ и имеет вид P^n, где $P = \ln(\tilde{P})$ замкнутый числовой промежуток в $\mathbb{R}$. Это множество выпукло и замкнуто в $\mathbb{R}^n$ и имеет непустую внутренность. Функция h непрерывна, будучи композицией непрерывных функций. Поэтому единственными решениями уравнения Йенсена на P^n являются функции вида:

$$\begin{array}{ll} h(\mathbf{u}) = \ln|g(e^{\mathbf{u}})| = \mathbf{b} * \mathbf{u} + b_0 & \text{при } p+q=1, \\ h(\mathbf{x}) = \ln|g(e^{\mathbf{u}})| = \mathbf{b} * \mathbf{u} & \text{при } p+q \neq 1, \end{array}$$

откуда следует:

$$g(e^{\mathbf{u}}) = (f \circ k)(e^{\mathbf{u}}) = \pm e^{\mathbf{b}*\mathbf{u}+b_0} \quad \text{при } p+q=1,$$

$$g(e^{\mathbf{u}}) = (f \circ k)(e^{\mathbf{u}}) = \pm e^{\mathbf{b}*\mathbf{u}} \quad \text{при } p+q \neq 1.$$

Возвращаясь к исходному мультиаргументу подстановкой $\mathbf{u} = \ln k^{-1}(\mathbf{x})$ в последнее равенство, придём к формулам

$$f(\mathbf{x}) = \pm e^{\mathbf{b}*\ln k^{-1}(\mathbf{x})+b_0}, \quad \text{при } p+q=1, \quad \Rightarrow \quad (f \circ k)(\mathbf{z}) = \pm e^{\mathbf{b}*\mathbf{z}+b_0}, \tag{25}$$

$$f(\mathbf{x}) = \pm e^{\mathbf{b}*\ln k^{-1}(\mathbf{x})}, \quad \text{при } p+q \neq 1. \quad \Rightarrow \quad (f \circ k)(\mathbf{z}) = \pm e^{\mathbf{b}*\mathbf{z}}. \tag{26}$$

Заметим, что множество $k^{-1}(Q)$ совпадает с множеством $\tilde{Q}$, поэтому в формулах (25), (26) мультифункция $\ln k^{-1}(\mathbf{x})$ определена.

Преобразуем формулы (25), (26), применяя предложение 3(7) и принимая e^{b_0} за новую константу c, $c > 0$ (в (26) $c = e^0 = 1$):

$$f(\mathbf{x}) = \pm e^{b_0} e^{\mathbf{b}*\ln k^{-1}(\mathbf{x})} = \pm c \cdot e^{\ln(k^{-1}(\mathbf{x}))^{\star\mathbf{b}}} = \pm c \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}))^{\star\mathbf{b}}$$

Вариант 2. $p > 0$, $q > 0$. Допустим, что в некоторой точке $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \tilde{Q}$ функция g обращается в ноль. Подставляя в (24) $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_0$, получим:

$$\forall_{\tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{Q}} \quad g(\tilde{\mathbf{x}_0}^p \cdot \tilde{\mathbf{y}}^q) = 0. \tag{27}$$

Если $p+q\neq 1$, то по условию $\tilde{Q}=\mathbb{R}^n_+$, и, в силу того, что всякая точка $\tilde{\mathbf{z}}\in\mathbb{R}^n_+$ представима в виде $\tilde{\mathbf{z}}=\tilde{\mathbf{x}_0}^p\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q$ при некотором $\tilde{\mathbf{y}}\in\mathbb{R}^n_+$, а именно, при $\tilde{\mathbf{y}}=(\frac{\tilde{\mathbf{z}}}{\tilde{\mathbf{x}}_0^p})^{\frac{1}{q}}$ справедливо: $g(\tilde{\mathbf{z}})=0$ при всех $\tilde{\mathbf{z}}\in\mathbb{R}^n_+$. А значит $f(\mathbf{x})\equiv 0$. Подстановка этой функции в уравнение (21) подтверждает, что она является его решением.

Покажем, что и в случае $p+q=1$ для любого $\tilde{\mathbf{y}}\in\tilde{Q}$ выполняется: $g(\tilde{\mathbf{y}})=0$. Определим последовательность точек $(\tilde{\mathbf{y}}_i)$ рекуррентно:

$$\tilde{\mathbf{y}}_1=\tilde{\mathbf{x}_0}^p\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q=\tilde{\mathbf{x}_0}^{1-q}\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q=\tilde{\mathbf{y}}\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q},\qquad \tilde{\mathbf{y}}_i=(\tilde{\mathbf{y}}_{i-1})^{1-q}\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q=\tilde{\mathbf{y}}\cdot\left(\frac{\tilde{\mathbf{y}}_{i-1}}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q}.$$

Тогда

$$\frac{\tilde{\mathbf{y}}_1}{\tilde{\mathbf{y}}}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q},\qquad \frac{\tilde{\mathbf{y}}_2}{\tilde{\mathbf{y}}}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{y}}_1}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q}=\left(\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q}\right)^{1-q}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{(1-q)^2},$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{y}}_3}{\tilde{\mathbf{y}}}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{y}}_2}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{1-q}=\left(\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{(1-q)^2}\right)^{1-q}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{(1-q)^3},\quad\dots\quad,\frac{\tilde{\mathbf{y}}_i}{\tilde{\mathbf{y}}}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{(1-q)^i}.$$

В силу выбора $\tilde{Q}$ справедливо: $\tilde{Q}^{1-q}\cdot\tilde{Q}^q=\{\tilde{\mathbf{x}}^{1-q}\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q|\ \tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}\in\tilde{Q}\}\subset\tilde{Q}$, а из определения последовательности $(\tilde{\mathbf{y}}_i)$ видно, что все $\tilde{\mathbf{y}}_i\in\tilde{Q}$. По индукции на основании формулы (27) доказывается, что $g(\tilde{\mathbf{y}}_i)=0$ при всех $i=1,2,....$ Но при $i\to\infty$

$$\frac{\tilde{\mathbf{y}}_i}{\tilde{\mathbf{y}}}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_0}{\tilde{\mathbf{y}}}\right)^{(1-q)^i}\to\mathbf{1}.$$

Следовательно $\tilde{\mathbf{y}}_i\to\tilde{\mathbf{y}}$. Ввиду непрерывности функции g можем заключить, что $g(\tilde{\mathbf{y}})=0$. Итак, $g(\tilde{\mathbf{y}})\equiv 0$ на множестве $\tilde{Q}$. А значит $f(\mathbf{x})\equiv 0$. Подстановка этой константы в уравнение (21) подтверждает, что она является его решением. Таким образом решения уравнения (24), не являющиеся тождественным нулём, не обращаются в 0 ни в одной точке множества $\tilde{Q}$. А поскольку они непрерывны, а множество $\tilde{Q}$ связно, то они знакопостоянны. Повторяя приведённые выше рассуждения для знакопостоянных функций (вариант 1), придём к тем же формулам (25), (26).

Переход от (24) к последующим уравнениям мог привести к лишним решениям. Осуществим проверку, подставив формулы (25) в (21). Результат подстановки в правую часть формулы (21):

$$f(\mathbf{x})^pf(\mathbf{y})^q=\left(\pm e^{\mathbf{b}*\ln\tilde{\mathbf{x}}+b_0}\right)^p\cdot\left(\pm e^{\mathbf{b}*\ln\tilde{\mathbf{y}}+b_0}\right)^q=(\pm1)^{p+q}e^{p\cdot\mathbf{b}*\ln\tilde{\mathbf{x}}+q\cdot\mathbf{b}*\ln\tilde{\mathbf{y}}+(p+q)b_0}=$$

$$=(\pm1)^{p+q}e^{\mathbf{b}*(p\cdot\ln\tilde{\mathbf{x}}+q\cdot\ln\tilde{\mathbf{y}})+(p+q)b_0}.$$

Результат подстановки в левую часть формулы (21):

$$(f\circ k)((k^{-1}(\mathbf{x}))^p(k^{-1}(\mathbf{y}))^q)=\pm e^{\mathbf{b}*\ln(\tilde{\mathbf{x}}^p\cdot\tilde{\mathbf{y}}^q)+b_0}=\pm e^{\mathbf{b}*(p\cdot\ln\tilde{\mathbf{x}}+q\cdot\ln\tilde{\mathbf{y}})+b_0}.$$

Приравниваем обе части и после сокращения на общий множитель получим то же равенство, что и в теореме 10 с заменой a на e:

$$\pm e^{b_0}=(\pm1)^{p+q}e^{(p+q)b_0}.$$

Поэтому и заключения о знаке функции будут теми же. □

Замечание 6. Хотя вывод формул (25), (26) мы осуществляли в предположении, что все $k_i(\mathbf{x})>0$, и в этих предположениях гарантирована единственность решения, однако подстановкой их в уравнение (21) мы убедились, что функции (25), (26) являются решениями и на всей области их определения.

5. Обобщённые уравнения Йенсена-Коши с многими переменными.

В данном разделе рассмотрим обобщённые уравнения Йенсена-Коши с m переменными, $m \geq 2$. В дальнейшем используем обозначение $\sigma = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

Теорема 12. *Заданы уравнения*

$$\boldsymbol{JK}_{Im}. \quad (f \circ k)(p_1 \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}_m)) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m),$$

$$\boldsymbol{JK}_{IIm}. \quad (f \circ k)(p_1 \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\boldsymbol{x}_m)) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m},$$

$$\boldsymbol{JK}_{IIIm}. \quad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\boldsymbol{x}_m))^{p_m}) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m),$$

$$\boldsymbol{JK}_{IVm}. \quad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\boldsymbol{x}_m))^{p_m}) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m}$$

в классе непрерывных функций, определённых на множествах $Q \subset \mathbb{R}^l$ – образах при гомеоморфизме $k : \tilde{Q} \to Q$ множеств $\tilde{Q}$, определённых как в теоремах 8-11 соответственно. Тогда их единственными решениями при $m > 1$ являются соответственно функции:

$$\begin{array}{lll} I) & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}), & \text{если } \sigma \neq 1, \\ & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0, & \text{если } \sigma = 1, \\ & & \\ II) & f(\boldsymbol{x}) = \pm a^{\boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x})}, & \text{если } \sigma \neq 1, \\ & f(\boldsymbol{x}) = \pm a^{\boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0}, & \text{если } \sigma = 1, \\ & \text{и } f(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \text{если } p_i > 0, \ i = 1, 2, ... & \\ & & \\ III) & f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}), & \text{если } \sigma \neq 1, \\ & f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0, & \text{если } \sigma = 1, \\ & & \\ IV) & f(\boldsymbol{x}) = \pm (k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\star \boldsymbol{b}}, & \text{если } \sigma \neq 1, \\ & f(\boldsymbol{x}) = \pm c \cdot (k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\star \boldsymbol{b}}, & \text{если } \sigma = 1, \end{array}$$

где $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, $b_0, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. При этом, если среди чисел p_i имеются нецелые числа, то функции в II), IV) берутся со знаком $+$; если все p_i – целые числа, то – со знаком $+$, если σ – чётное число, и с обоими знаками, если σ – нечётное число.

Доказательство. Уравнения $\mathbf{JK}_{Im} - \mathbf{JK}_{IVm}$ тем же способом, как в теоремах 8-11, сводятся к обобщённому уравнению Йенсена (9), в результате чего получаются решения, задаваемые формулами (11), (14), (20), (23) соответственно. Так как могли получиться "посторонние" решения, осуществим проверку подстановкой указанных функций в обе части соответствующих уравнения.

I) $(f \circ k)(p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)) = \mathbf{b} * (p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)) + b_0,$

$$p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\mathbf{x}_m) = p_1 \cdot (\mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_1) + b_0) + ... + p_m \cdot (\mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_m) + b_0) =$$
$$\mathbf{b} * (p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)) + (p_1 + ... + p_m) b_0.$$

Мы видим, что равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$(p_1 + ... + p_m) b_0 = b_0 \quad \text{или} \quad \sigma b_0 = b_0.$$

Поэтому, если $\sigma \neq 1$, то $b_0 = 0$.

$$II) \ (f \circ k)(p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)) = \pm a^{\mathbf{b} * (p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)) + b_0},$$

$$f(\mathbf{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\mathbf{x}_m)^{p_m} = \left(\pm a^{\mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_1) + b_0}\right)^{p_1} \cdot ... \cdot \left(\pm a^{\mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_m) + b_0}\right)^{p_m} =$$
$$= (\pm 1)^{p_1 + ... + p_m} a^{b_0 (p_1 + ... + p_m)} \cdot a^{p_1 \cdot \mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot \mathbf{b} * k^{-1}(\mathbf{x}_m)} =$$
$$= (\pm 1)^{\sigma} a^{b_0 \sigma} \cdot a^{\mathbf{b} * (p_1 \cdot \ k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m))}.$$

Равенство обеих частей достигается тогда и только тогда, когда $\pm a^{b_0} = (\pm 1)^{\sigma} a^{b_0 \sigma}$. Поэтому, если $\sigma \neq 1$, то $b_0 = 0$, а знаки определяются, как указано в теореме. Функция $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ также удовлетворяет уравнению $\mathbf{JK}_{IIm}$.

$III)$ $(f \circ k)((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m}) = \mathbf{b} * log_a((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot \dots \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m}) + b_0$,

$$p_1 \cdot f(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\mathbf{x}_m) = p_1 \cdot (\mathbf{b} * log_a k^{-1}(\mathbf{x}_1) + b_0) + ... + p_m \cdot (\mathbf{b} * log_a k^{-1}(\mathbf{x}_m) + b_0) =$$
$$= p_1 \cdot (\mathbf{b} * log_a k^{-1}(\mathbf{x}_1)) + ... + p_m \cdot (\mathbf{b} * log_a k^{-1}(\mathbf{x}_m)) + (p_1 + ... + p_m) b_0 =$$
$$= \mathbf{b} * (p_1 \cdot log_a k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot log_a k^{-1}(\mathbf{x}_m)) + \sigma b_0 =$$
$$= \mathbf{b} * log_a((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot \dots \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m}) + \sigma b_0.$$

Мы видим, что равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma b_0 = b_0$. Поэтому, если $\sigma \neq 1$, то $b_0 = 0$.

$$IV)\ (f \circ k)((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m}) = \pm c \cdot ((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m})^{\star \mathbf{b}}$$
$$= \pm c \cdot \Big(\big(k^{-1}(\mathbf{x}_1)\big)^{p_1} \Big)^{\star \mathbf{b}} \cdot ... \cdot \Big(\big(k^{-1}(\mathbf{x}_m)\big)^{p_m} \Big)^{\star \mathbf{b}} = \pm c \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{\star (p_1 \mathbf{b})} \cdot ... \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{\star (p_m \mathbf{b})}).$$

$$f(\mathbf{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\mathbf{x}_m)^{p_m} = \Big(\pm c \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{\star \mathbf{b}} \Big)^{p_1} \cdot ... \cdot \Big(\pm c k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{\star \mathbf{b}} \Big)^{p_m} =$$
$$= (\pm c)^{p_1 + ... + p_m} \Big((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{\star \mathbf{b}} \Big)^{p_1} \cdot ... \cdot \Big(k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{\star \mathbf{b}} \Big)^{p_m} =$$
$$= (\pm c)^{\sigma} (k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{\star (p_1 \mathbf{b})} \cdot ... \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{\star (p_m \mathbf{b})}.$$

Ясно, что равенство левой и правой частей равенства достигается, когда $\pm c = (\pm c)^{\sigma}$, т.е. при $\sigma \neq 1$ только при $c = 1$, а знаки определяются, как указано в теореме.

Преобразования в пунктах 1)-3) осуществлялись на основании предложения 2(3,4), а в пункте 4) − на основании предложения 3(3,6). □

6. Следствия из обобщённых уравнений Йенсена-Коши.

Следствие 1. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши $\boldsymbol{JK}_I - \boldsymbol{JK}_{IV}$ при тождественном гомеоморфизме $k = id$ и $p = q = 1$ превращаются в уравнения Коши $\boldsymbol{K}_I - \boldsymbol{K}_{IV}$.*

Следствие 2. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши $\boldsymbol{JK}_{I_m} - \boldsymbol{JK}_{IV_m}$ при тождественном гомеоморфизме $k = id$ принимают вид:*

$$f(p_1 \boldsymbol{x}_1 + ... + p_m \boldsymbol{x}_m) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m), \tag{28}$$

$$f(p_1 \boldsymbol{x}_1 + ... + p_m \boldsymbol{x}_m) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m}, \tag{29}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1^{p_1} \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m^{p_m}) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m), \tag{30}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1^{p_1} \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m^{p_m}) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m} \tag{31}$$

и имеют соответственно решения:

$$\boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} + b_0, \quad a^{\boldsymbol{b} * \boldsymbol{x}} + b_0, \quad \boldsymbol{b} * log_a \boldsymbol{x} + b_0, \quad a^{b_0} \cdot \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{b}},$$

где $b_0 = 0$, если $\sigma = 1$.

В частности при $p_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, ..., m$, уравнения (28)-(31) принимают вид:

$$f\Big(\frac{\boldsymbol{x}_1 + ... + \boldsymbol{x}_m}{m}\Big) = \frac{f(\boldsymbol{x}_1) + ... + f(\boldsymbol{x}_m)}{m}, \tag{32}$$

$$f\Big(\frac{\boldsymbol{x}_1 + ... + \boldsymbol{x}_m}{m}\Big) = \sqrt[m]{f(\boldsymbol{x}_1) \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)}, \tag{33}$$

$$f\big(\sqrt[m]{\boldsymbol{x}_1 \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m}\big) = \frac{f(\boldsymbol{x}_1) + ... + f(\boldsymbol{x}_m)}{m}, \tag{34}$$

$$f\big(\sqrt[m]{\boldsymbol{x}_1 \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m}\big) = \sqrt[m]{f(\boldsymbol{x}_1) \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)} \tag{35}$$

и имеют те же решения при $b_0 = 0$. *Кроме того, уравнения (29) и (33) имеют нулевое решение* $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$.

Замечание 7. В ([5], с. 20) упоминается, что уравнение (33) при $m = 2$ для функций одной переменной использовал Н.И. Лобачевский для вывода формулы угла параллельности.

Следствие 3. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши* $\boldsymbol{JK}_{I_m} - \boldsymbol{JK}_{II_m}$ *при сдвиге* $k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + (1-\sigma)^{-1}\boldsymbol{a}$ *при условии* $\sigma \neq 1$ *принимают вид:*

$$1)\ f\left(p_1\boldsymbol{x}_1 + ... + p_m\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{a}\right) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m), \tag{36}$$

$$2)\quad f\left(p_1\boldsymbol{x}_1 + ... + p_m\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{a}\right) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m} \tag{37}$$

и имеют на указанных в теоремах 8 и 9 множествах соответственно решения:

$$1)\qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * \left(\boldsymbol{x} - (1-\sigma)^{-1}\boldsymbol{a}\right),$$

$$2)\quad f(\boldsymbol{x}) = \pm e^{\boldsymbol{b}*\left(\boldsymbol{x}-(1-\sigma)^{-1}\boldsymbol{a}\right)} \quad и \quad f \equiv 0.$$

В частности, если $\sigma = 0$, *то решения имеют соответственно вид:*

$$1')\ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,; \qquad 2')\ f(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{b}*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}.$$

Доказательство. Обратным гомеоморфизмом к сдвигу $k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{m}$ является сдвиг $k^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{m}$. Тогда:

$$k\left(p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)\right) = p_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}) + ... + p_m(\mathbf{x}_m - \mathbf{m}) + \mathbf{m} =$$
$$= (p_1\mathbf{x}_1 + ... + p_m\mathbf{x}_m) + (1 - p_1 - p_2 - ... - p_m)\mathbf{m}.$$

При $\sigma = 1$ уравнения $\mathbf{JK}_{I_m} - \mathbf{JK}_{II_m}$ принимают вид (28), (29) и ничего к нашим знаниям не добавляют. Пусть $\sigma \neq 1$. Полагая $\mathbf{a} = (1-\sigma)\mathbf{m}$, выразим $\mathbf{m}$:
$\mathbf{m} = (1-\sigma)^{-1}\mathbf{a}$. Воспользовавшись теоремой 12, получим для уравнений (36), (37) указанные решения. □

Следствие 4. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши* $\boldsymbol{JK}_{III_m} - \boldsymbol{JK}_{IV_m}$ *при гомотетии* $k(\boldsymbol{x}) = a^{(1-\sigma)^{-1}}\boldsymbol{x}$, $a > 0$ *и* $\sigma \neq 1$ *принимают вид*

$$1)\ f(a\boldsymbol{x}_1^{p_1} \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m^{p_m}) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m), \tag{38}$$

$$2)\qquad f(a\boldsymbol{x}_1^{p_1} \cdot ... \cdot \boldsymbol{x}_m^{p_m}) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m} \tag{39}$$

и имеют соответственно решения:

$$1)\ \boldsymbol{b} * log_c\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_{\oplus}, \quad 2)\ \pm c^{\boldsymbol{b}_{\oplus}} \cdot \boldsymbol{x}^{\star\boldsymbol{b}}, \quad где \quad c = a^{-(1-\sigma)^{-1}},$$

а знаки определяются как в теореме 11.

В частности, если $\sigma = 0$, *то решения имеют соответственно вид:*

$$1')\ \boldsymbol{b}_{\oplus} - \boldsymbol{b} * log_a\boldsymbol{x}, \qquad 2')\ a^{-\boldsymbol{b}_{\oplus}} \cdot \boldsymbol{x}^{\star\boldsymbol{b}}.$$

Доказательство. Обратное отображение к гомотетии $k(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$ есть гомотетия $k^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{t}\mathbf{x}$. Тогда: $k\left(p_1 \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_1) + ... + p_m \cdot k^{-1}(\mathbf{x}_m)\right) =$

$$= t \cdot \left(p_1 \cdot \frac{1}{t}\mathbf{x}_1 + ... + p_m \cdot \frac{1}{t}\mathbf{x}_m\right) = p_1\mathbf{x}_1 + ... + p_m\mathbf{x}_m.$$

$$k\left((k^{-1}(\mathbf{x}_1))^{p_1} \cdot ... \cdot (k^{-1}(\mathbf{x}_m))^{p_m}\right) = t\left(\frac{1}{t}\mathbf{x}_1\right)^{p_1} \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{t}\mathbf{x}_m\right)^{p_m} = t^{(1-\sigma)}\mathbf{x}_1^{p_1} \cdot ... \cdot \mathbf{x}_m^{p_m}.$$

Таким образом, при гомотетии уравнения $\mathbf{JK}_{I_m}$, $\mathbf{JK}_{II_m}$ принимают вид (28), (29), а уравнения $\mathbf{JK}_{III_m}$, $\mathbf{JK}_{IV_m}$ при $\sigma = 1$ принимают вид (30), (31) и ничего не добавляют к нашим знаниям.

Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда, полагая $a = t^{(1-\sigma)}$, выразим t: $t = a^{(1-\sigma)^{-1}}$, откуда имеем:

$$k(\mathbf{x}) = a^{(1-\sigma)^{-1}}\mathbf{x}, \qquad k^{-1}(\mathbf{x}) = a^{-(1-\sigma)^{-1}}\mathbf{x},$$

и уравнения $\mathbf{JK}_{III_m}$, $\mathbf{JK}_{IV_m}$ принимают вид (38), (39). Воспользуемся теоремой 12, взяв за основание логарифма число $c = a^{-(1-\sigma)^{-1}}$. Применяя предложения 2(7,8) и 3(7,2), получим решения:

1) $$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * log_c k^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * log_c c\mathbf{x} = log_c\left(c^{\mathbf{b}_\oplus} \cdot \mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}\right) = log_c c^{\mathbf{b}_\oplus} + log_c(\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}) =$$

$$= \mathbf{b}_\oplus + \mathbf{b} * log_c\mathbf{x}.$$

2) $f(\mathbf{x}) = \pm\left(k^{-1}(\mathbf{x})\right)^{\star\mathbf{b}} = \pm(c\mathbf{x})^{\star\mathbf{b}} = \pm c^{\mathbf{b}_\oplus} \cdot \mathbf{x}^{\star\mathbf{b}}$. □

Следствие 5. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши* $\boldsymbol{JK}_{I_m}, \boldsymbol{JK}_{II_m}$ *при гомеоморфизме* $k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\frac{1}{r}} : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)^n$ *и* $p_i > 0$, $i = 1,...,m$ *принимают вид*

(40) $$1)\ f\left(\sqrt[r]{p_1\boldsymbol{x}_1^r + ... + p_m\boldsymbol{x}_m^r}\right) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m)$$

(41) $$2)\ f\left(\sqrt[r]{p_1\boldsymbol{x}_1^r + ... + p_m\boldsymbol{x}_m^r}\right) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m}$$

и имеют соответственно решения:

$$1)\ \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x}^r, \quad \textit{при} \quad \sigma \neq 1, \quad \textit{и} \quad \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x}^r + b_0, \quad \textit{при} \quad \sigma = 1,$$

$$2)\ \pm a^{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{x}^r} \quad \textit{при} \quad \sigma \neq 1, \quad \textit{и} \quad \pm a^{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{x}^r + b_0} \quad \textit{при} \quad \sigma = 1,$$

$$f(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad p_i > 0,\ i = 1, 2, ...$$

При этом, если хотя бы одно из чисел p_i, $i = 1,...,m$, *– нецелое, то функции берутся со знаком* $+$; *если все* p_i, $i = 1,...,m$, *– целые числа, то со знаком* $+$, *если* σ *– чётное число, и с обоими знаками, если* σ *– нечётное число.*

Следствие 6. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши* $\boldsymbol{JK}_{I_m}, \boldsymbol{JK}_{II_m}$ *при гомеоморфизме* $k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^r : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)^n$ *и* $p_i > 0$, $i = 1,...,m$ *принимают вид*

$$1)\ f\left((p_1\sqrt[r]{\boldsymbol{x}_1} + ... + p_m\sqrt[r]{\boldsymbol{x}_m})^r\right) = p_1 \cdot f(\boldsymbol{x}_1) + ... + p_m \cdot f(\boldsymbol{x}_m)$$

$$2)\ f\left((p_1\sqrt[r]{\boldsymbol{x}_1} + ... + p_m\sqrt[r]{\boldsymbol{x}_m})^r\right) = f(\boldsymbol{x}_1)^{p_1} \cdot ... \cdot f(\boldsymbol{x}_m)^{p_m}$$

и имеют соответственно решения:

$$1)\ \boldsymbol{b} * \sqrt[r]{\boldsymbol{x}}, \quad \textit{при} \quad \sigma \neq 1, \quad \textit{и} \quad \boldsymbol{b} * \sqrt[r]{\boldsymbol{x}} + b_0, \quad \textit{при} \quad \sigma = 1,$$

$$2)\ \pm a^{\boldsymbol{b}*\sqrt[r]{\boldsymbol{x}}} \quad \textit{при} \quad \sigma \neq 1, \quad \textit{и} \quad \pm a^{\boldsymbol{b}*\sqrt[r]{\boldsymbol{x}} + b_0} \quad \textit{при} \quad \sigma = 1.$$

$$f(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad p_i > 0,\ i = 1, 2, ...$$

При этом, если хотя бы одно из чисел p_i, $i = 1,...,m$, *– нецелое, то функции берутся со знаком* $+$; *если все* p_i, $i = 1,...,m$, *– целые числа, то со знаком* $+$, *если* σ *– чётное число, и с обоими знаками, если* σ *– нечётное число.*

Замечание 8. При гомеоморфизмах $k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\frac{1}{r}} : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)^n$ и $k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^r : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)^n$ уравнения $\mathbf{JK}_{III_m}, \mathbf{JK}_{IV_m}$ принимают вид (30), (31), и не дают нового знания.

Замечание 9. При $p = q = 1$, $m = 2$ уравнение (40), как указано в ([5], упражнение 4), рассматривалось для функции одной переменной Тиельманом (1949), а уравнение (41), при $p = q = 1$ и $m = 2$, $r = 2$ для функций одной переменной известно как уравнение Гаусса.

7. Заключение.

Итак, мы получили решения обобщённых уравнений Йенсена-Коши, обобщающих известные уравнения Йенсена и Коши не только по размерности искомых функций, но и по количеству мультиаргументов, по составу коэффициентов (степеней), а также по включению в формулу произвольного гомеоморфмзма. Поскольку гомеоморфизмов задать можно сколь угодно много, то формулы имеют бесчисленное множество интерпретаций, охватывающих как ранее известные (для случая функции одной переменной) результаты, так и новые. В разделе 6 приведены наиболее красивые. Например, формулы (32)-(35) устанавливают зависимость между значениями функции от среднеарифметического и среднегеометрического m точек и среднеарифметическим и среднегеометрическим значений функций в этих точках в разных комбинациях. Для того, чтобы вывод формул был нагляден, а формулы имели эстетичный вид, нам пришлось ввести в рассмотрение мультифункции и связанные с ними операции $*$ и $\star$, изучить их свойства. Надеемся, они найдут применения в теории функций многих переменных.

References

[1] Detlef Gronaw, *Translation equation and sincov's equation - a historical remark* Proceedings and surveys, 2014, v. 46, 43-46.

[2] Moszner, *L' e'quation de translation et l' e'quation de Sincov du type de Pexider*, The Thrty-fifth International Symposium on Functional Equations, September 7-14, 1997 — Gras-Mariatrost, Austria, Aequationes.

[3] A.D. Polianin, A.I. Zhurov, *Solutions of Functionals Eqiations by Argument Elimination Method*, 11 January, 2005, http://eqworld.ipmnet.ru

[4] http://eqworld.ipmnet.ru

[5] J. Aczel, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, M., FIZMATLIT, 2003, 432.

[6] D. Reem, *The Cauchy functional equations as an initial valume problem*, ArXiv:1002.3721v1[math.CA] 19Feb 2010.

[7] I.V. Polikanova, *Functional equations for functions of several variables*, Trudy seminara po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu, 9, 2023, 30-45.

[8] J. Aczel, *Some general methods in the theory of functional equations in one variable. New applications of functional equations*, Uspekhi Mat. Nauk, 11:3(69), 1956, 3–68.

[9] B. Zh. Omarova, Zh. A. Sartabanov, *On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field*, Eurasian Math. J., 2021, v. 12, № 1, 68–81.

Irina Viktorovna Polikanova
Altai State Pedagogical University,
6(1), Soviet st.,
656002, Barnaul, Russia
E-mail address: anirix1@yandex.ru