

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 16, стр. 144–144 (2019)*  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 519.214  
MSC 60F05О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ  
ВЕЛИЧИН СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С.В. ЧЕБОТАРЕВ

**ABSTRACT.** We consider some properties of limit distributions of sums of random variables of stationary sequences. We obtained conditions for the normality of the limit distribution without using the concepts of weak dependence and mixing.

**Keywords:** stationary sequences of random variables, limit distributions of sums of stationary sequences, normality of the limit distribution.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема предельного распределения сумм зависимых случайных величин в том числе и стационарных в узком смысле последовательностей обсуждается в литературе начиная с начала прошлого века. Одной из первых работ посвященной этой тематике является работе Бернштейна [1]. Большое внимание решению этой проблемы уделяется в работе Ибрагимова, Линника [2]. Более поздние работы в этой области, такие как [3] - [5] показывают актуальность этой проблемы и в наши дни. В этой статье предпринята попытка пополнить существующие результаты, отказавшись от использования понятия слабой сходимости и понятия перемешивания. Результат базируется на использовании полученных автором результатах из [7],[8] применительно к случаю стационарных в узком смысле последовательностей.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Рассмотрим последовательности центрированных абсолютно непрерывных случайных величин  $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t \in I_n}$ , где  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . По аналогии с [7],[8]

---

CHEBOTAREV, S.V., ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF SUMS OF RANDOM VARIABLES OF STATIONARY SEQUENCES.

© 2022 ЧЕБОТАРЕВ С.В.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

обозначим через  $v_I = v_I(\xi_{(n)})$  начальный смешанный момент  $m$  случайных величин  $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}$  порядка  $|I| = m$ :

$$v_I(\xi_{(n)}) = m_{1, \dots, 1}(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}) = \mathbf{M}(\xi_{t_1})^1 \cdots (\xi_{t_m})^1.$$

Введем в рассмотрение суммарный смешанный момент порядка  $m$ :

$$(1) \quad v_m(\xi_{(n)}) = \sum_{|I|=m} v_I(\xi_{(n)}), \quad \forall m = 1, \dots, n, \text{ положив } v_0 = 1,$$

а также усредненные смешанные моменты порядка  $m$ :

$$\ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}} \text{ и } \dot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{C_n^m}, \quad \forall m = 1, \dots, n.$$

Для рассматриваемых последовательностей в [8] получено выражение для плотности предельного распределения сумм этих случайных величин. Воспользуемся этими результатами при изучении предельных свойств распределения конечных сумм случайных величин стационарной в узком смысле последовательности  $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t \in I_n}$ , где  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Обозначим

$$R_n(\xi_{t_1}, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \mathbf{M}\xi_{t_1}\xi_{t_2} \cdots \xi_{t_m},$$

где

$$(2) \quad I = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \in I_n, \text{ а } t_2 - t_1 = k_1, t_3 - t_2 = k_2, \dots, t_m - t_{m-1} = k_{m-1}.$$

Известно, что для стационарных последовательностей эта величина не зависит от  $\xi_{t_i}$ , то есть

$$R_n(\xi_{t_1}, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = v_I, \text{ где } I = \{t_1 = 1, t_2, \dots, t_m\}.$$

В нашем случае

$$v_I(\xi_{(n)}) = \int_{x_1} \int_{x_2} \cdots \int_{x_{t_m}} x_1 x_2 \cdots x_{t_m} \mathbf{P}(x_1, x_2, \dots, x_{t_m}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{t_m}.$$

Положим  $k^r = k_1 + \dots + k_r$ . Докажем для стационарной в узком смысле последовательности следующее утверждение:

**Утверждение 1.** Пусть дана конечная центрированная стационарная в узком смысле последовательность  $\xi_{(n)} = (\xi_t)_{t \in I_n}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega_{I_n}, \mathfrak{A}_{I_n}, \mathbf{P}_{\xi_{I_n}})$ . Тогда для  $2 \leq m \leq n$  справедливы соотношения

$$(3) \quad v_m(\xi_{(n)}) = \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \cdots \sum_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} (n-k^{m-1}) R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}).$$

*Доказательство.* Действительно, при фиксированных значениях  $k_1, \dots, k_{m-1}$  мы имеем ровно  $n - k^{m-1}$  наборов переменных, которые определяют коэффициент при  $R(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$  в выражении (3). А именно, набор индексов  $\{t_1, t_1 + k_1, t_1 + k_1 + k_2, \dots, t_1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}\}$  можно сдвигать на единицу от  $t_1 = 1$  до  $t_1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} = n$ , то есть  $n - k^{m-1}$  раз. При этом диапазон для каждой переменной  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  меняется от единицы до  $n - k^{i-1} - 1 - (m - 1 - i) = n - k^{i-1} - m + i$  с учетом уже фиксированных значений предыдущих переменных и минимально возможных значений последующих.  $\square$

Учитывая, что

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \text{ и } \ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}},$$

имеем

$$(4) \quad \ddot{v}_m(\xi_{(n)}) = \sqrt{m!} \frac{\sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} (n-k^{m-1}) R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})}{\sqrt{n(n-1)\dots(n-m+1)}}$$

Рассмотрим бесконечные стационарные последовательности. Для них, если существуют предельные величины, имеем

$$(5) \quad R(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}).$$

и

$$(6) \quad \ddot{v}_m(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{v}_m(\xi_{(n)}).$$

В этом случае справедливо следующее утверждение:

**Утверждение 2.** Пусть дана центрированная стационарная в узком смысле последовательность  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$ , где  $I = \{1, 2, \dots\}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega_I, \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$ . Тогда  $\forall m \geq 2$  имеет место следующее соотношение:

$$(7) \quad \ddot{v}_m(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m!}{n^m}} \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_i=1}^{n-k^{i-1}-m+i} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-1}),$$

где  $k^r = k_1 + \dots + k_r$ .

*Доказательство.* Соотношение (7) сразу следует из (4) и (6) с учетом того, что

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} = 1$$

в предположение, что предел (6) существует, что, в свою очередь, следует из условий теоремы.  $\square$

Обозначим условное математическое ожидание случайной величины  $\xi_{t_m}$  при условии, что  $\xi_1 = x_1, \xi_{t_2} = x_{t_2}, \dots, \xi_{t_{m-1}} = x_{t_{m-1}}$ , где  $(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})$  - произвольный вектор в  $\mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_{t_2} \times \dots \times \mathbb{R}_{t_{m-1}}$  (в дальнейшем, если набор координат вектора не указан, то мы предполагаем, что данное соотношение справедливо для любого допустимого набора  $m-1$  координат из  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\mathbf{M}(\xi_{t_m} | \xi_1 = x_1, \xi_{t_2} = x_{t_2}, \dots, \xi_{t_{m-1}} = x_{t_{m-1}}) = \int_{x_{t_m}} x_{t_m} \frac{\mathbf{p}(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_m})}{\mathbf{p}(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})} dx_{t_m}.$$

И рассмотрим функцию

$$K_n(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t_m=t_{m-1}+1}^n \mathbf{M}(\xi_{t_m} | \xi_1 = x_1, \xi_{t_2} = x_{t_2}, \dots, \xi_{t_{m-1}} = x_{t_{m-1}}).$$

В дальнейшем, в предположении что область значений функции

$$K_n((x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})) \in (M^-, M^+), \forall (x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

где

$$M^- = \inf_{(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1}} \{K_n(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})\},$$

$$M^+ = \sup_{(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1}} \{K_n(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})\},$$

воспользуемся тем свойством, что найдется число  $K_n^*(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})$  в области значений этой функции, что справедливо

$$\int_{x_1} \int_{x_{t_2}} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} x_1, \dots, x_{t_{m-1}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) K_n(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) dx_1 \dots dx_{t_{m-1}} =$$

$$= K_n^*(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) \int_{x_1} \int_{x_{t_2}} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} x_1, \dots, x_{t_{m-1}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) dx_1 \dots dx_{t_{m-1}},$$

Это справедливо из того, что существуют и конечны оба интеграла. Первый интеграл – суть слагаемое из  $v_m(\xi_{(n)})$ , а второй – суть  $v_I(\xi_{(n)})$ , где  $I = \{1, \dots, t_{m-1}\}$ . в предположении, что

$$\int_{x_1} \int_{x_{t_2}} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} x_1, \dots, x_{t_{m-1}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) dx_1 \dots dx_{t_{m-1}} \neq 0.$$

### 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Будем рассматривать центрированные стационарные в узком смысле последовательности  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega_I, \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$ , для которых существует нетривиальный слабый предел сумм  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

**Лемма 1.** Пусть дана центрированная стационарная в узком смысле последовательность  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega_I, \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$ . Тогда, при  $n \rightarrow \infty$  и любом фиксированном  $m \geq 2$ , справедливо следующее соотношение:

$$(9) \quad |\ddot{v}_m(\xi_{(n)})| \sim \sqrt{m} |K_{n,m}^*| |\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|,$$

где  $K_{n,m}^*$  – некоторое конечное число.

*Доказательство.* Воспользуемся соотношениями (4) и (8). Тогда при достаточно больших  $n$  будем иметь

$$(10) \quad |\ddot{v}_m(\xi_{(n)})| \sim \left| \sqrt{\frac{m!}{n^m}} \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_{m-2}=1}^{n-k_1-3} \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k_1-2} R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-1}) \right|$$

Рассмотрим составной элемент правой части соотношения (10)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-1}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} \int_{x_1} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} \int_{x_{t_m}} x_1 \dots x_{t_{m-1}} x_{t_m} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}, x_{t_m}) \times \\
&\times dx_{t_m} dx_{t_{m-1}} \dots dx_1 = \\
&= \int_{x_1} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k_{m-1}=1}^{n-k^{m-2}-1} \int_{x_{t_m}} x_{t_m} \frac{\mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}, x_{t_m})}{\mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}})} \times \right. \\
&\times \left. dx_{t_m} \right) dx_{t_{m-1}} \dots dx_1 = \\
&= \int_{x_1} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} x_1 \dots x_{t_{m-1}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) K_n(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) dx_{t_{m-1}} \dots dx_1 = \\
&= K_n^*(x_1, \dots, t_{m-1}) \int_{x_1} \dots \int_{x_{t_{m-1}}} x_1 \dots x_{t_{m-1}} \mathbf{p}(x_1, \dots, x_{t_{m-1}}) dx_{t_{m-1}} \dots dx_1 = \\
&= K_n^*(x_1, \dots, t_{m-1}) \mathbf{M} \xi_1 \dots \xi_{t_{m-1}} = K_n^*(x_1, \dots, t_{m-1}) R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-2}).
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в правую часть соотношения (10) получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{\frac{m!}{n^{m-1}}} \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_{m-2}=1}^{n-k^{m-3}-2} K_n^*(x_1, \dots, t_{m-1}) R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-2}) \right| = \\
&= |K_{n,m}^*| \left| \sqrt{\frac{m!}{n^{m-1}}} \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_{m-2}=1}^{n-k^{m-3}-2} R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-2}) \right|.
\end{aligned}$$

Или, учитывая, что

$$|\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})| \sim \left| \sqrt{\frac{(m-1)!}{(n-1)^{m-1}}} \sum_{k_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{k_{m-2}=1}^{n-k^{m-3}-2} R(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-2}) \right|$$

получаем

$$|\ddot{v}_m(\xi_{(n)})| \sim \sqrt{m \left( \frac{n-1}{n} \right)^{(m-1)}} |K_{n,m}^*| \cdot |\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|$$

откуда и следует утверждение.  $\square$

Прежде чем перейти к формулировке основного результата, установим связь между элементами последовательности  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in I}$ , в которую разлагается исходная последовательность  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  по аналогии с тем, как это делалось в

[8] воспользовавшись соотношением

$$\xi_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{t,j}.$$

Отметим, что разложение последовательности  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  используя принцип равномерности можно сделать как по распределению суммы элементов этой последовательности так и по распределению самих элементов этой последовательности и их связей. Во втором случае мы будем обозначать полученную последовательность как  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in I}$ , а в первом случае будем обозначать полученную последовательность как  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_t)_{t \in I}$ . Кроме того, учитывая способы получения этих последовательностей, для них согласно теореме 2.3 ([6]) справедливо свойство  $\dot{v}_m(\gamma_{(n)}) = \dot{v}_m(\hat{\gamma}_{(n)}) \forall m, n$ . Отметим также, что суммарные смешанные моменты порядка  $m$  последовательности  $\xi_{(n)}$  (1) можно считать как по наборам индексов  $I$  ( $|I| = m$ ) последовательности  $\gamma_{(nn)}$  и тогда  $\dot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{n^m C_n^m}$  так и по наборам индексов  $I$  ( $|I| = m$ ) последовательности  $\xi_{(n)}$  и тогда  $\dot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{C_{nn}^m}$ .

Кроме того оговорим условия, которым должны удовлетворять эти последовательности. Для этого рассмотрим разложение

$$(11) \quad \ddot{v}_m(\gamma_{(nn)}) = \frac{v_m(\gamma_{(nn)})}{\sqrt{C_{nn}^m}} = \frac{C_{nn}^m \cdot \dot{v}_m(\gamma_{(nn)})}{\sqrt{C_{nn}^m}} = \frac{v_m(\xi_{(n)}) + V_m(\gamma_{(nn)})}{\sqrt{C_{nn}^m}} =$$

Откуда

$$\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) = \frac{n^m C_n^m (\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1) + (C_{nn}^m - n^m C_n^m) (\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) - \Delta_2)}{\sqrt{C_{nn}^m}},$$

где средние смешанные моменты  $m$ -го порядка  $\dot{v}_m(\xi_{(n)})$  взяты по наборам индексов последовательности  $\gamma_{(nn)}$  (до формулы (13)), а именно:

$$\dot{v}_m(\xi_{(n)}) = \frac{v_m(\xi_{(n)})}{n^m C_n^m} = \dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1 \text{ и } \dot{V}_m(\gamma_{(nn)}) = \frac{V_m(\gamma_{(nn)})}{C_{nn}^m - n^m C_n^m} = \dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) - \Delta_2.$$

Из

$$n^m C_n^m \Delta_1 - (C_{nn}^m - n^m C_n^m) \Delta_2 = 0 \text{ получаем } \Delta_2 = \frac{n^m C_n^m}{C_{nn}^m - n^m C_n^m} \Delta_1.$$

Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\frac{V_m(\gamma_{(nn)})}{\sqrt{C_{nn}^m}}}{\frac{v_m(\xi_{(n)})}{\sqrt{C_{nn}^m}}} &= \frac{V_m(\gamma_{(nn)})}{v_m(\xi_{(n)})} = \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m) (\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) - \Delta_2)}{n^m C_n^m (\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1)} = \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \\ &\cdot \frac{(\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1 - (\Delta_1 + \Delta_2))}{\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1} = \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \left( 1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1} \right) = \\ &= \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} - \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1}. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1} = \frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \cdot \frac{\Delta_1 \left( 1 + \frac{n^m C_n^m}{C_{nn}^m - n^m C_n^m} \right)}{\dot{v}_m(\gamma_{(nn)}) + \Delta_1} =$$

$$\frac{(C_{nn}^m - n^m C_n^m)}{n^m C_n^m} \frac{\Delta_1}{\dot{v}_m(\gamma(nn)) + \Delta_1} + \frac{\Delta_1}{\dot{v}_m(\gamma(nn)) + \Delta_1}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m C_n^m}{C_{nn}^m} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{nn}^m - n^m C_n^m}{C_{nn}^m} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta_1}{\dot{v}_m(\gamma(nn)) + \Delta_1} = \frac{\dot{v}_m(\xi(n)) - \dot{v}_m(\gamma(nn))}{\dot{v}_m(\xi(n))},$$

потребуем чтобы выполнялось условие

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{v}_m(\xi(n)) - \dot{v}_m(\gamma(nn))}{\dot{v}_m(\xi(n))} = 0$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{V_m(\gamma(nn))}{\sqrt{C_{nn}^m}} \right) / \left( \frac{v_m(\xi(n))}{\sqrt{C_{nn}^m}} \right) = 0$$

и из (11)

$$(13) \quad \ddot{v}_m(\gamma(nn)) \sim \frac{v_m(\xi(n))}{\sqrt{C_{nn}^m}} = \frac{\sqrt{C_n^m} \ddot{v}_m(\xi(n))}{\sqrt{C_{nn}^m}} \sim \frac{\ddot{v}_m(\xi(n))}{\sqrt{n^m}}.$$

Теперь сформулируем основной результат:

**Теорема 1.** Пусть дана центрированная стационарная в узком смысле последовательность  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega_I, \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$  и для этой последовательности существует нетривиальный слабый предел сумм  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Последовательность  $\xi = (\xi_t)_{t \in I}$  и последовательность  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in I}$ , в которую разлагается исходная последовательность удовлетворяют условию (12). Для того, чтобы предельное распределение было нормальным необходимо и достаточно чтобы

1.

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n R(k) = 0,$$

2.  $\forall m > 2$  существовало такое число  $C_m < \infty$ , что для почти для всех  $(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ , где  $\mathbb{R}^{m-1}$  - произвольное подпространство  $\mathbb{R}^n$ , выполнялось условие

$$(15) \quad |K_n(x_1, x_{t_2}, \dots, x_{t_{m-1}})| \leq C_m \sqrt{n} \left| \frac{\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})}{\sqrt{(n-1)^{m-1}}} \right|^{-\alpha},$$

при  $\alpha \in (0, 1)$  и любого  $n$  начиная с некоторого  $n_0$ .

*Доказательство.* Необходимость: Пусть предельное распределение нормально. Тогда, согласно следствию 1 теоремы 2 [8],  $\ddot{v}_m(\hat{\gamma}) = 0 \quad \forall m \geq 2$ .

Для  $m = 2$  выполнение (14) сразу следует из (7), (13).

Рассмотрим выполнение (15)  $\forall m > 2$  для достаточно больших  $n$ . Согласно (9) имеем

$$\frac{|\ddot{v}_m(\xi(n))|}{\sqrt{n^m}} \sim \sqrt{m} \frac{|K_{n,m}^*|}{\sqrt{n}} \frac{|\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|}{\sqrt{(n-1)^{m-1}}}$$

Потребуем, чтобы последовательность

$$\frac{|K_{n,m}^*| |\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|}{\sqrt{n} \sqrt{(n-1)^{m-1}}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что для этого необходимо чтобы величины  $|K_{n,m}^*|$  росли не быстрее чем указано в условии (15), иначе возникнет противоречие связанное с тем, что при  $\ddot{v}_m(\gamma) = 0$  соотношение (13) не будет выполняться.

Достаточность: Пусть выполнены условия (14) и (15). Надо показать, что  $\ddot{v}_m(\gamma) = 0 \quad \forall m \geq 2$ . Для  $m = 2$  это следует из (7),(13) и (14). Рассмотрим случай, когда  $m > 2$  при условии, что для  $m' < m$  это выполняется. Используя соотношения (13),(9) и (15) будем иметь при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|\ddot{v}_m(\xi)|}{\sqrt{n^m}} \sim \sqrt{m} \frac{|K_{n,m}^*| |\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|}{\sqrt{n} \sqrt{(n-1)^{m-1}}} \leq \sqrt{m} \cdot C_m \cdot \left( \frac{|\ddot{v}_{m-1}(\xi_{(n-1)})|}{\sqrt{(n-1)^{m-1}}} \right)^{1-\alpha} \rightarrow 0.$$

Откуда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{v}_m(\gamma_{(n)}) = 0$ . □

#### REFERENCES

- [1] S.N. Bernshtein, Extending the limit theorem of the theory of probability on sums of dependent variables, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1944, no. 10, 65–114
- [2] I.A. Ibragimov, Yu.V. Linnik Independent and stationary random variables, Nauka, M., 1965.
- [3] S.A. Utev On the central limit theorem for  $\varphi$ -mixing arrays of random variables. - *Theory Probab. Appl.*, 1990, v. 35, no. 1, 110 - 117.
- [4] A.G. Grin On minimal conditions of the weak dependence in limit theorems for stationary sequences. - *Theory Probab. Appl.*, 2009, v. 54, no. 2, 344-354.
- [5] A.G. Grin On a local limit theorem for functions of dependent variables. - *Mathematical Structures and Modeling*. 2019. 1(49), 22-29.
- [6] S. V.Chebotarev. About sequences of random variables with averages links. - *Vestnik AltGPA*, serija: estestvenye i tochnye nauki. 7(2011). 28-37.
- [7] S. V.Chebotarev. About limit distribution of sums of random variables. - *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 2016, 1, 17-29
- [8] S. V.Chebotarev. On the limit distribution of sums of real random variables. - *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 2017, 10(3), 310-313

SERGEY VSEVOLODOVICH CHEBOTAREV  
 ALTAY STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY,  
 MOLODEZNAJA ST., 55,  
 656031, BARNAUL, RUSSIA  
*Email address: svcheb@gmail.com*