УДК 519.21

О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий [1]

В.И. Лотов

Аннотация

Доказана предельная теорема для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания с малым сносом.

Ключевые слова: предельные теоремы, граничные задачи для случайных блужданий, факторизационный метод, число пересечений полосы, переходные явления.

1 Введение. Постановка задачи

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 > 0. \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ введем новую последовательность

$$X = X(\varepsilon) = Y - \varepsilon, \quad X_k = X_k(\varepsilon) = Y_k - \varepsilon, \quad k \geq 1,$$

и пусть

$$S_n = S_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\varepsilon), \quad n \geq 1, \qquad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение случайную величину $N = N(\varepsilon)$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n(\varepsilon)), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$.

Для этого определим сначала моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ : S_n \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- : S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$.

Очевидно, $\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon \to 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассмотреть схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания. На этом пути в [1] найдена асимптотика вероятности поглощения в задаче с двумя

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2022-0010).

прямолинейными границами. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено огромное число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А.А. Боровковым [2] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Еще один возможный метод асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см., например, [3, §24] и библиографические замечания там.

Изучению распределения числа пересечений полосы также посвящено значительное число публикаций. Начнем перечисление с известного неравенства Дуба для полумартингалов [4, гл. 7, теорема 3.3]. Оценки в виде неравенств для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания найдены в [5]. Точные формулы для этого распределения изучались в [6] для целочисленных случайных блужданий с геометрическими распределениями скачков на полуосях. В [7] приведены представления вероятностей $\mathbf{P}(N \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\mathbf{E}\exp\{\lambda X\}$, там же установлено асимптотическое поведение этой вероятности при условии, что полоса безгранично расширяется и выполнено условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания. В [8] найдены асимптотические представления для $\mathbf{P}(N \geq k)$ при других ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания. В условиях Крамера при $\mathbf{E}X = 0$ для распределения числа пересечений полосы на конечном неограниченно растущем интервале времени в [9] найдены полные асимптотические разложения, если ширина полосы растет согласованно с рассматриваемым интервалом времени. Аналоги этих результатов найдены также для блужданий, заданных на цепи Маркова [10].

Ясно, что общее число пересечений полосы будет неограниченно возрастать, если устремить к нулю снос случайного блуждания. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю сноса получено в [6] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В настоящей работе будет получен аналогичный результат для другого, весьма широкого класса случайных блужданий. Исследование будет проводиться с использованием разработанной ранее факторизационной техники.

2 Формулировка основного результата

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda Y}$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda X} = \psi(\lambda)\, e^{-\lambda\varepsilon}$ и введем в рассмотрение условие (A), включающее следующие два пункта.

(A_1) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A_2) Для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $\psi(\gamma) + \psi(-\gamma) < \infty$.

Положим также

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 :\ S_n \geq 0\}, \qquad \eta_- = \min\{n \geq 1 :\ S_n < 0\},$$

и пусть

$$\chi_\pm = S_{\eta_\pm}, \qquad \rho = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}.$$

Отметим, что введенные величины зависят от ε. Существование моментов, входящих в определение величины ρ, обеспечивается условием (A_2).

Теорема 1 *Пусть для случайной величины Y, введенной в* (1), *выполнено условие* (A). *Тогда для каждого* $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

3 Предварительные сведения

Для последующих доказательств нам потребуется ряд сведений из [2], [11].

Пусть для $|z| \leq 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$,

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm}\exp\{\lambda\chi_\pm\};\ \eta_\pm < \infty\right). \tag{3}$$

Хорошо известно следующее представление (факторизация Винера–Хопфа):

$$r_{z+}(\lambda)\,r_{z-}(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda), \quad |z| \leq 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0. \tag{4}$$

При выполнении условия (A_2) факторизационное тождество (4) справедливо и в более широкой области $-\gamma \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \gamma$. Функция $r_{z+}(\lambda)$ является аналитической по λ при $\mathrm{Re}\lambda < \gamma$ и любом фиксированном $|z| \leq 1$. Аналогичным свойством в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > -\gamma$ обладает $r_{z-}(\lambda)$. Для функций $r_{z\pm}(\lambda)$ известны и другие формулы.

Обозначим через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}dG(y), \qquad \mathrm{Re}\lambda = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{5}$$

Здесь G — произвольная функция с конечной полной вариацией.

Как и в [13], введем операторы A и B следующим образом.

Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\big[r_{z-}^{-1}(\lambda)\,g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\big[r_{z+}^{-1}(\lambda)\,g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

где принято обозначение

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}dG(y)\Big]^D = \int_D e^{\lambda y}dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Если выполнено условие (A_1) и $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, то функции $r_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ также допускают представления вида (5) (см. [2]). Функция g в этом определении может зависеть от z. Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z, но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Область допустимых значений z и λ в этом определении может быть расширена, если это позволяют сделать представления вида (5) для функций $r_{z\pm}^{\pm 1}(\lambda)$.

Положим для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta_+(t) = \min\{n \geq 1: \ S_n \geq t\}, \qquad \eta_-(t) = \min\{n \geq 1: \ S_n \leq t\}, \qquad \chi_\pm(t) = S_{\eta_\pm(t)}.$$

Известно ([12], [13]), что введенные операторы позволяют выразить через них двойные преобразования над совместными распределениями пар $\big(\eta_+(b), \ S_{\eta_+(b)}\big)$ и $\big(\eta_-(-a), \ S_{\eta_-(-a)}\big)$, а именно:

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_-(-a)} \exp\{\lambda S_{\eta_-(-a)}\}; \ \eta_-(-a) < \infty\right) = (Ae)(z,\lambda), \quad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda \geq 0,$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_+(b)} \exp\{\lambda S_{\eta_+(b)}\}; \ \eta_+(b) < \infty\right) = (Be)(z,\lambda), \quad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda \leq 0,$$

здесь принято обозначение $e(\lambda) = e(z,\lambda) \equiv 1$.

Кроме того, в [7] установлен более общий результат, состоящий в следующем. Для произвольного момента остановки $\nu \geq 0$ (возможно, несобственного) на событии $\{\nu < \infty\}$ вводятся случайные величины

$$\nu_+(b) = \inf\{n \geq \nu: \ S_n \geq b\}, \qquad \nu_-(-a) = \inf\{n \geq \nu: \ S_n \leq -a\}.$$

Отличие от предыдущих рассмотрений состоит в том, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки ν. Эта конструкция потребуется при рассмотрении числа пересечений полосы снизу вверх. Действительно, пересечения полосы формируются следующим образом: мы должны сначала обеспечить в момент τ_1^- достижение нижней границы траекторией, начинающейся в нуле, после чего рассматриваем следующую часть траектории, которая уже начинается в случайный момент τ_1^-. Эта часть траектории должна далее достигнуть впервые верхнюю границу полосы в момент времени τ_1^+, который затем является стартовой точкой для последующей части траектории, идущей к нижней границе, и т.д.

Пусть

$$g(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^\nu \exp\{\lambda S_\nu\}; \ \nu < \infty).$$

Следующее утверждение получено в [7].

Теорема 2 *Для* $|z| < 1$ *и* $\mathrm{Re}\lambda = 0$ *справедливо*

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_-(-a)} \exp\{\lambda S_{\nu_-(-a)}\}; \ \nu_-(-a) < \infty\right) = (Ag)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_+(b)} \exp\{\lambda S_{\nu_+(b)}\}; \ \nu_+(b) < \infty\right) = (Bg)(z,\lambda).$$

Применяя эту теорему, сразу же получаем при $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^-} \exp\{\lambda S_{\tau_1^-}\}; \tau_1^- < \infty\right) = (Ae)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^+} \exp\{\lambda S_{\tau_1^+}\}; \tau_1^+ < \infty\right) = (BAe)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_2^-} \exp\{\lambda S_{\tau_2^-}\}; \tau_2^- < \infty\right) = (ABAe)(z,\lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k \geq 1$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+} \exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\right) = ((BA)^k e)(z,\lambda), \tag{6}$$

здесь степень оператора понимается как суперпозиция. Таким образом,

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0). \tag{7}$$

Равенство (7) также отмечено в [7], и это соотношение будет основой для дальнейших рассмотрений.

Отметим, что при выполнении условия (A_2) функция $\varphi(\lambda)$ на интервале $-\gamma \leq \lambda \leq \gamma$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) < 0$, $\psi(\gamma) > 1$. При некотором $\delta > 0$ и при всех достаточно малых ε выполняется также неравенство

$$z\varphi(\gamma) = z\psi(\gamma)e^{-\gamma\varepsilon} > 1, \qquad z \in [1-\delta, 1].$$

Поэтому функция $1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\psi(\lambda)\,e^{-\lambda\varepsilon}$ имеет ровно два вещественных нуля $\lambda_\pm(z)$, $z \in [1-\delta, 1]$, $\lambda_-(z) \leq \lambda_+(z)$. Из условий (A_2) и $\mathbf{E}X < 0$, очевидно, следует $\lambda_-(1) = 0$, $h := \lambda_+(1) > 0$. Нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ распределяются между компонентами факторизации следующим образом:

$$r_{z+}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0.$$

Это сразу следует из определения (3), поскольку, к примеру, при $\lambda = \lambda_-(z) < 0$ и $z \in [1-\delta, 1)$ функция $r_{z+}(\lambda)$ в ноль не может обратиться. Следовательно, $r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0$. Величины $\lambda_\pm(z)$ будут играть важную роль в последующих рассмотрениях.

Пусть $m_k = \mathbf{E}X^k$, $\varepsilon = -m_1 > 0$. Из геометрических соображений ясно, что $h = h(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. Более того, числа h и ε стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$1 = \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(0) + \dots = 1 - h\varepsilon + \frac{h^2}{2}m_2 + \dots$$

следует

$$\varepsilon = \frac{m_2}{2}\,h + O(h^2) = \frac{\sigma^2}{2}\,h + O(h^2), \quad h \to 0. \tag{8}$$

Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \to 0$ одновременно есть $o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ и наоборот.

Асимптотическое поведение операторов A и B при $a \to \infty$ и $b \to \infty$ соответственно исследовано в [11], [13]. Для исследования асимптотики этих операторов при $\varepsilon \to 0$ приведем аналоги вспомогательных лемм из [11], предполагая выполненным условие (A) и $\mathbf{E}X < 0$. Для наших целей достаточно будет ограничиться рассмотрением вещественных значений $z \in (1-\delta, 1)$ при некотором малом $\delta > 0$.

Итак, для произвольного $t \in \mathbb{R}$, следуя [2], введем множества

$$\Pi(t) = \{g(\lambda): \ g(\lambda + t) \in \Pi\},$$

$$\Pi_-(t) = \left\{ g(\lambda) \in \Pi(t): \ \ g(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda y}\,dG(y), \ \ \operatorname{Re}\lambda = t \right\},$$

$$\Pi_+(t) = \left\{ g(\lambda) \in \Pi(t): \ \ g(\lambda) = \int\limits_{([0,\infty)} e^{\lambda y}\,dG(y), \ \ \operatorname{Re}\lambda = t \right\}.$$

Лемма 1 ([11]) *Существует $\delta > 0$ такое, что для $z \in (1-\delta, 1)$ справедливы представления*

$$r_{z\pm}^{-1}(\lambda) = \big((\lambda - \lambda_\pm(z))r'_{z_\pm}(\lambda_\pm(z)\big)^{-1} + \psi_{z\pm}(\lambda),$$

в которых $\psi_{z\pm}(\lambda) \in \Pi_\pm(\lambda_\pm(1) \pm \delta_\pm)$ для некоторых $\delta_\pm > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$w_{z+}(\lambda) = \frac{r_{z+}(\lambda)(\lambda+\gamma+1)}{\lambda-\lambda_+(z)}, \qquad w_{z-}(\lambda) = \frac{r_{z-}(\lambda)(\lambda-\gamma-1)}{\lambda-\lambda_-(z)}. \tag{9}$$

Эти функции при некоторых $\delta > 0$, $\delta_\pm > 0$ обеспечивают каноническую V–факторизацию (см. [2]) функции

$$\frac{(1-z\varphi(\lambda))(\lambda+\gamma+1)(\lambda-\gamma-1)}{(\lambda-\lambda_+(z))(\lambda-\lambda_-(z))} = w_{z+}(\lambda)w_{z-}(\lambda)$$

при $z \in (1-\delta, 1)$, $\lambda_- - \delta_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+ + \delta_+$. Это означает, в частности, что

$$w_{z+}^{\pm 1}(\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ + \delta_+), \qquad w_{z-}^{\pm 1}(\lambda) \in \Pi_-(\lambda_- - \delta_-).$$

Из (9) получаем

$$r_{z+}^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda+\gamma+1}{\lambda-\lambda_+(z)} w_{z+}^{-1}(\lambda)$$

$$= w_{z+}^{-1}(\lambda) + \frac{\lambda_+(z)+\gamma+1}{\lambda-\lambda_+(z)}\left[w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z)) + (\lambda-\lambda_+(z))\frac{w_{z+}^{-1}(\lambda)-w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z))}{\lambda-\lambda_+(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{(\lambda-\lambda_+(z))r'_{z_+}(\lambda_+(z))} + w_{z+}^{-1}(\lambda) + (\lambda_+(z)+\gamma+1)\frac{w_{z+}^{-1}(\lambda)-w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z))}{\lambda-\lambda_+(z)}$$

$$\equiv \frac{1}{(\lambda-\lambda_+(z))r'_{z_+}(\lambda_+(z))} + \psi_{z+}(\lambda),$$

где $\psi_{z+}(\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+(1)+\delta_+)$ наряду с $w_{z+}^{-1}(\lambda)$ (см. [2]).

Утверждение для $r_{z-}^{-1}(\lambda)$ доказывается аналогично. $\square$

Далее нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2 *Пусть функция $g \in \Pi$ имеет вид*

$$g(\lambda) = \int\limits_u^\infty e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad u \ge -a,$$

тогда для любого $\beta < 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,-a]} = g(\beta)\frac{e^{-(\lambda-\beta)a}}{\lambda-\beta}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\lambda-\beta} = \int\limits_{-\infty}^0 e^{(\lambda-\beta)t}dt, \qquad g(\lambda) = \int\limits_u^\infty e^{\lambda t}dG(t), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad u \ge -a.$$

Произведение преобразований Лапласа–Стилтьеса равняется преобразованию от свертки:

$$\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta} = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{\lambda t}\Bigg(\int\limits_{\max(u,t)}^\infty e^{-\beta(t-y)}dG(y)\Bigg)dt.$$

Далее берем сужение внешнего интеграла на множество $(-\infty, -a]$:

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,-a]} = \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda t}\Big(\int\limits_{u}^{\infty} e^{-\beta(t-y)}dG(y)\Big)dt = g(\beta)\int\limits_{-\infty}^{-a} e^{(\lambda-\beta)t}dt = g(\beta)\frac{e^{-(\lambda-\beta)a}}{\lambda-\beta}.$$

Аналогично получается и другая лемма.

Лемма 3 *Пусть функция $g \in \Pi$ имеет вид*

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{v} e^{\lambda t}dG(t), \quad Re\lambda = 0, \quad v \le b,$$

тогда для любого $\beta > 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{[b,\infty)} = g(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)b}}{\lambda-\beta}.$$

Используя леммы 1–3, получаем следующие представления.

Пусть функция $g(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda t}dG(t) \in \Pi_-(0)$. Тогда

$$[r_{z+}^{-1}(\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)} = \frac{1}{r'_{z_+}(\lambda_+(z))}\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_+(z)}\right]^{[b,\infty)} + \big[\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)}$$

$$= \frac{g(\lambda_+(z))e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}}{(\lambda-\lambda_+(z))r'_{z_+}(\lambda_+(z))} + \big[\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

то есть

$$(Bg)(z,\lambda) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}g(\lambda_+(z)) + r_{z+}(\lambda)\big[\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)}, \tag{10}$$

где обозначено

$$v_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda)\left(\big(\lambda-\lambda_+(z)\big)r'_{z+}\big(\lambda_+(z)\big)\right)^{-1}, \quad z \in (1-\delta, 1).$$

Аналогично имеем для $g(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda t}dG(t) \in \Pi_+(0)$

$$(Ag)(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}g(\lambda_-(z)) + r_{z-}(\lambda)\big[\psi_{z-}(\lambda)g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]}, \tag{11}$$

где

$$u_z(\lambda) = r_{z-}(\lambda)\left(\big(\lambda-\lambda_-(z)\big)r'_{z-}\big(\lambda_-(z)\big)\right)^{-1}, \quad z \in (1-\delta, 1).$$

В соответствии с (7) нам предстоит воспользоваться представлениями (10)–(11). Последние слагаемые в правых частях этих представлений содержат выражения вида $[\psi_{z\pm}(\lambda)g(\lambda)]^A$. В дальнейшем их нужно будет оценивать. Явные выражения функций $\psi_{z\pm}(\lambda)$ через $w_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ приведены в лемме 1. Отметим, что наряду с $w_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ функции $\psi_{z\pm}(\lambda)$ аналитичны по совокупности аргументов (z,λ) каждая в своей области (см. [2]) и, следовательно, ограничены по модулю некоторыми константами, не зависящими от z:

$$|\psi_{z-}(\lambda)| \le K_-, \qquad |\psi_{z+}(\lambda)| \le K_+.$$

Напомним, что вместе с компонентами факторизации эти константы зависят от малого параметра: $K_\pm = K_\pm(\varepsilon)$ и тем самым возникает вопрос о равномерности этих оценок по малым значениям ε. Заметим, однако, что представления (10)–(11) будут использоваться только при $\lambda = 0$ и $z \to 1$, что упрощает ситуацию. В доказательстве теоремы 1 предстоит проанализировать изучаемую вероятность при $\varepsilon \to 0$. Формула (8) связывает величины ε и h; сходимость выражений при $\varepsilon \to 0$ эквивалентна сходимости при $h \to 0$ и порядок малости при $h \to 0$ совпадает с порядком малости при $\varepsilon \to 0$. Нам будет удобнее предполагать, что $h \to 0$.

Рассмотрим оценки для $\lim_{z\to 1} r_{z\pm}(\lambda)$. Для этого запишем сначала разложение функций $r_{z\pm}(\lambda)$ соответственно в точках $\lambda_\pm(z)$, принимая во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+(z)) = 0$, $r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0$:

$$r_{z-}(\lambda) = r_{z-}(\lambda_-(z)) + r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda - \lambda_-(z)) + ... = r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda - \lambda_-(z)) + ..., \quad (12)$$

$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(z))^2}{2}\, r''_{z+}(\lambda_+(z)) + \dots . \quad (13)$$

Производные по λ аналитических функций $r_{z\pm}(\lambda)$ тоже обладают свойством аналитичности. Из известных соотношений

$$r_{z-}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\, \mathbf{E}\,(\exp\{\lambda(T_n - n\varepsilon)\};\, T_n < n\varepsilon\,)\right\}, \qquad T_n = Y_1 + \dots Y_n,$$

$$r_{z+}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\, \mathbf{E}\,(\exp\{\lambda(T_n - n\varepsilon)\};\, T_n \geq n\varepsilon\,)\right\}, \qquad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0,$$

нетрудно видеть, что при $\varepsilon \to 0$ функции $r_{z\pm}(\lambda)$ и их производные стремятся соответственно к компонентам факторизации и их производным, построенным по случайному блужданию $\{T_n\}$. При $z \to 1$ выполняется $\lambda_+(z) \to h > 0$, $\lambda_-(z) \to 0$, поэтому из (12)–(13) получаем

$$\lim_{z\to 1} r_{z+}(0)) = -hr'_{1+}(h) + \frac{h^2}{2}\, r''_{1+}(h) - \frac{h^3}{6}\, r'''_{1+}(h) + \dots = -hr'_{1+}(h) + O(h^2), \quad h \to 0, \quad (14)$$

$$\lim_{z\to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) = hr'_{1-}(0) + \frac{h^2}{2}\, r''_{1-}(0) + \frac{h^3}{6}\, r'''_{1-}(0) + \dots = hr'_{1-}(0) + O(h^2), \quad h \to 0. \quad (15)$$

Асимптотические формулы (14)–(15) потребуются в дальнейшем. Далее, из (13) и доказательства леммы 1 следует

$$\psi_{z+}(\lambda) = r^{-1}_{z_+}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z)) r'_{z_+}(\lambda_+(z))}$$

$$= \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z)) r'_{z+}(\lambda_+(z)) + (\lambda - \lambda_+(z))^2 r''_{z+}(\lambda_+(z))/2 + ...} - \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z)) r'_{z_+}(\lambda_+(z))},$$

$$\lim_{z\to 1} \psi_{z+}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - h) r'_{1+}(h) + (\lambda - h)^2 r''_{1+}(h)/2 + ...} - \frac{1}{(\lambda - h) r'_{1+}(h)}.$$

При $h \to 0$ имеем

$$\lim_{z\to 1} \psi_{z+}(0) = \frac{1}{-hr'_{1+}(h) + O(h^2)} - \frac{1}{-hr'_{1+}(h)} = \frac{1}{-hr'_{1+}(h)}\left(\frac{1}{1 + O(h)} - 1\right) = O(1). \quad (16)$$

Аналогично получаем

$$\psi_{z-}(\lambda) = r^{-1}_{z_-}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_-(z)) r'_{z_-}(\lambda_-(z))}$$

$$= \frac{1}{(\lambda-\lambda_-(z))r'_{z-}(\lambda_-(z))+(\lambda-\lambda_-(z))^2 r''_{z-}(\lambda_-(z))/2+...} - \frac{1}{(\lambda-\lambda_-(z))r'_{z-}(\lambda_-(z))},$$

$$\lim_{z\to 1}\psi_{z-}(\lambda_+(z)) = \frac{1}{hr'_{1-}(0)+h^2 r''_{1-}(0)/2+...} - \frac{1}{hr'_{1-}(0)} = O(1), \quad h\to 0. \qquad (17)$$

Заметим, что в соответствии с (3)

$$r_{1+}(\lambda) = 1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+\};\ \eta_+<\infty\right), \qquad r_{1-}(\lambda) = 1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_-\}\right), \qquad (18)$$

поэтому, к примеру,

$$r'_{1-}(0) = -\mathbf{E}\chi_-, \qquad r''_{1-}(0) = -\mathbf{E}\chi_-^2,$$
$$r'_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+<\infty), \qquad r''_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+<\infty). \qquad (19)$$

Таким образом, для z, близких к единице, функции $\psi_{z\pm}(\lambda)$ ограничены равномерно по h (и по ε) в окрестности нуля.

Еще раз отметим, что приведенные выше формулы одновременно обосновывают сходимость этих величин при $\varepsilon\to 0$.

В дальнейшем с помощью формул (10)–(11) будет анализироваться асимптотика при $h\to 0$ выражений вида $(Ag)(z,\lambda)$ и $(BAg)(z,\lambda)$, если, в свою очередь, функция g имеет вид $g(z,\lambda) = ((BA)^k e)(z,\lambda)$ при разных k.

Как следует из (6), функция g такого вида является двойным преобразованием над распределением пары $(\tau_k^+, S_{\tau_k^+})$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(z,\lambda) = \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y} dG_1(y), \qquad (BAg)(z,\lambda) = \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dG_2(y),$$

величины $\int_{-\infty}^{\infty}|dG_i(y)|$ при каждом $k\ge 0$ ограничены равномерно по z, и, разумеется, по ε. Следовательно, в этих случаях выражения вида $[\psi_{z\pm}(\lambda)g(\lambda)]^A$ также ограничены константами равномерно по ε.

4 Доказательство теоремы 1

Доказательство основывается на использовании компонент факторизации (4), формул (6) и (7), а также на свойствах операторов A и B, содержащихся в представлениях (10)–(11). Везде предполагается, что $z\in(1-\delta,1)$ для некоторого малого числа $\delta>0$, согласующегося с утверждениями лемм.

Для лучшего понимания факторизационной техники доказательства рассмотрим на время несколько другую конструкцию случайного блуждания с малым сносом $\{S_n\}$, для которого компоненты факторизации весьма просто находятся в явном виде.

Предположим, что

$$\mathbf{P}(X\ge t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t\ge 0,$$
$$\mathbf{P}(X<t) = r\exp\{\beta t\}, \quad t<0, \quad r+q=1, \quad \mathbf{E}X<0, \qquad (20)$$

то есть распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным. Покажем, как в этой ситуации найти компоненты факторизации (4). Легко вычислить, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{r\beta}{\lambda+\beta} + \frac{q\alpha}{\alpha-\lambda} = \frac{r\beta(\alpha-\lambda)+q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

и нахождение нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ сведется к решению квадратного уравнения. При $z < 1$ корень $\lambda_-(z)$ будет отрицательным, а $\lambda_+(z)$ — положительным.

$$1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\,\frac{r\beta(\alpha-\lambda) + q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)} = \frac{(\lambda-\lambda_-(z))(\lambda-\lambda_+(z))}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

то есть

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_{z-}(\lambda)\,R_{z+}(\lambda), \tag{21}$$

где обозначено

$$R_{z-}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\beta}, \qquad R_{z+}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda}.$$

При $z < 1$ функция $R_{z+}(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < \alpha$ и ограничена на границе, функция $R_{z-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > -\beta$, и обе они не обращаются в ноль в упомянутых областях своей аналитичности. Любое представление вида (21) при $\mathrm{Re}\lambda = 0$ с такими свойствами компонент называется канонической факторизацией ([15, гл. 12]) и его компоненты определяются однозначно с точностью до множителя, возможно зависящего от z. Представление (4) тоже являет собой каноническую факторизацию при $|z| < 1$. Это означает, что при некотором множителе $c = c(z)$ имеет место

$$R_{z+}(\lambda) = c\,r_{z+}(\lambda), \quad R_{z-}(\lambda) = c^{-1} r_{z-}(\lambda).$$

Устремляя $\lambda \to \infty$ в определении $r_{z-}(\lambda)$, убеждаемся, что в данном случае должно выполняться $c(z) \equiv 1$.

Нетрудно вычислить, что в наших условиях $h = -\alpha\beta\,\mathbf{E}X$.

Простыми вычислениями убеждаемся, что для случайных блужданий с условием (20) в представлениях (10)–(11) имеет место $|\psi_{z\pm}(\lambda)| \equiv 1$, поэтому выражения $[\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}$ и $[\psi_{z-}(\lambda)g(\lambda)]^{(-\infty,a]}$ в этих формулах отсутствуют за счет срезок на соответствующих уровнях при $b > 0$, $-a < 0$, то есть

$$u(z,\lambda) = \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda+\beta}, \qquad (Ag)(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,g(\lambda_-(z))e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$

$$v(z,\lambda) = \frac{\alpha-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda}, \qquad (Bg)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,g(\lambda_+(z))\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}.$$

Таким образом, в соответствии с (10)–(11)

$$(Ae)(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$

$$(BAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

$$(ABAe)(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

$$(BABAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a}\times$$
$$\times v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

и так далее.

Напомним, что $\lambda_-(1) = 0$, $\lambda_+(1) = h > 0$. Пусть $H(z) = v(z,\lambda_-(z))\,u(z,\lambda_+(z))$, тогда для любого $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(N \geq k) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0) = d^k(h)\,e^{-kh(a+b)} = \mathbf{P}(h\,N \geq kh),$$

где обозначено

$$d(h) := H(1) = v(1,0)\,u(1,h) = \frac{\alpha - h}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta + h}.$$

Полагая $t = kh$, перепишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{P}(h\,N \ge t) = d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)}.$$

Остается заметить, что при $h \to 0$

$$\log d^{t/h}(h) = \frac{t}{h}\log\left(\frac{\alpha - h}{\alpha}\right) + \frac{t}{h}\log\left(\frac{\beta}{\beta + h}\right) =$$

$$= \frac{t}{h}\log\left(1 - \frac{h}{\alpha}\right) + \frac{t}{h}\log\left(1 - \frac{h}{\beta + h}\right) = -t\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + O(h).$$

Тем самым получено следующее утверждение.

Предложение 1 *Пусть выполнено* (20), *тогда для всех* $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(h\,N \ge t) = \exp\left\{-t\left(a + b + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\right\} + O(h), \qquad h \to 0.$$

Далее, пусть по-прежнему выполнено (1), $X = Y - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и выполнено условие (A). Сначала рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(N \ge 1) = \lim_{z \to 1}(BAe)(z,0)$. Имеем в силу (10)–(11)

$$(Ae)(z,\lambda) = u_z(\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a} + r_{z-}(\lambda)\big[\psi_{z-}(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(BAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\times$$

$$\times\left(u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} + r_{z-}(\lambda_+(z))\big[\psi_{z-}(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]}_{\lambda=\lambda_+(z)}\right) + r_{z+}(\lambda)\big[\psi_{z+}(\lambda)\,(Ae)(z,\lambda)\big]^{[b,\infty)}. \tag{22}$$

Обозначим, как и ранее, $H(z) = v(z,\lambda_-(z))\,u(z,\lambda_+(z))$, и пусть

$$d(h) = H(1) = v(1,0)\,u(1,h)).$$

Покажем, что эта величина отделена от нуля при малых h.

Лемма 4 *В условиях теоремы* 1 *при* $h \to 0$ *имеет место соотношение*

$$d(h) = 1 - \rho\,h + O(h^2), \qquad \rho = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}. \tag{23}$$

Доказательство. Из (12) следует

$$v(z,\lambda_-(z)) = \frac{r_{z+}(\lambda_-(z))}{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))\,r'_{z+}(\lambda_+(z))} = 1 + \frac{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))\,r''_{z+}(\lambda_+(z))}{2\,r'_{z+}(\lambda_+(z))} + \dots .$$

Как и выше, применим соотношения (18) и (19), получая в итоге

$$v(1,0) = 1 - \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2) = \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2). \tag{24}$$

Аналогично получаем из (12) и (18)

$$u(z,\lambda_+(z)) = \frac{r_{z-}(\lambda_+(z))}{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\,r'_{z-}(\lambda_-(z))} = 1 + \frac{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\,r''_{z-}(\lambda_-(z))}{2\,r'_{z-}(\lambda_-(z))} + \dots,$$

$$u(1,h)) = 1 + \frac{h\, r''_{1-}(0)}{2\, r'_{1-}(0)} + \cdots = 1 + \frac{h\,\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}\chi_-} + O(h^2). \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует утверждение леммы. □

Теперь из (22) выводим

$$\mathbf{P}(N \ge 1) = \lim_{z\to 1}(BAe)(z,0) = d(h)\, e^{-h(a+b)}$$

$$+v(1,0)\, e^{-hb} \lim_{z\to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) \big[\psi_{z-}(\lambda)\big]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty,-a]} + \lim_{z\to 1} r_{z+}(0) \big[\psi_{z+}(\lambda)\, Ae(z,\lambda)\big]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}. \tag{26}$$

Проанализируем последние два слагаемых. В силу (15) и (17) имеем имеем равномерно по ε

$$\lim_{z\to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) \big[\psi_{z-}(\lambda)\big]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty,-a]} = O(h), \quad h\to 0. \tag{27}$$

Для последнего слагаемого в (26) выводим из (14) и (16)

$$\lim_{z\to 1} r_{z+}(0) \big[\psi_{z+}(\lambda)\, Ae(z,\lambda)\big]_{\lambda=0}^{[b,\infty)} = O(h). \tag{28}$$

В итоге получаем из (26)–(28) при $h \to 0$

$$\mathbf{P}(N \ge 1) = d(h)\, e^{-h(a+b)} + O(h).$$

Сделаем теперь индуктивное предположение: пусть для некоторого $k \ge 1$ выполнено

$$\mathbf{P}(N \ge k) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0) = d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h). \tag{29}$$

Покажем, что это соотношение выполняется для $k+1$.

Итак, опять в силу соотношений (10)–(11)

$$(BA(BA)^k)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} \times$$

$$\times\Big(u(z,\lambda_+(z))\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} (BA)^k(z,\lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) \big[\psi_{z-}(\lambda)(BA)^k(z,\lambda)\big]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty,-a]} \Big) +$$

$$+r_{z+}(\lambda) \big[\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z,\lambda)\big]^{[b,\infty)}.$$

Как и в (27) и (28), имеем равномерно по ε

$$\lim_{z\to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) \big[\psi_{z-}(\lambda)(BA)^k(z,\lambda)\big]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty,-a]} = O(h), \quad h \to 0,$$

а также

$$\lim_{z\to 1} r_{z+}(0) \big[\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z,\lambda)\big]_{\lambda=0}^{[b,\infty)} = O(h).$$

Поэтому в соответствии с индуктивным предположением

$$\mathbf{P}(N \ge k+1) = \lim_{z\to 1}((BA(BA)^k)(z,0) = \lim_{z\to 1} v(z,0) u(z,\lambda_+(z))\, e^{-\lambda_+(z)b+(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} \times$$

$$\times\Big((BA)^k(z,\lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) \big[\psi_{z-}(\lambda)(BA)^k(z,\lambda)\big]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty,-a]} \Big)$$

$$+r_{z+}(0) \big[\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z,\lambda)\big]_{\lambda=0}^{[b,\infty)} = d(h) e^{-h(a+b)} \big(d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h)\big) + O(h)$$

$$= d^{(k+1)}(h) e^{-(k+1)h(a+b)} + O(h).$$

Тем самым установлена справедливость формулы (29) для всех $k \geq 1$. Из нее выводим при $t = kh$

$$\mathbf{P}(h\,N \geq t) = d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)} + O(h),$$

и далее, применяя формулу (23), получаем

$$\log d^{t/h}(h) = \frac{t}{h}\log(1 - \rho h + O(h^2)) = -\rho t + O(h), \quad h \to 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2 *Пусть выполнено условие* (A). *Тогда для* $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\Big(hN \geq t\Big) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(h), \qquad h \to 0. \tag{30}$$

Напомним, что $O(h) = O(\varepsilon)$ и запишем (8) в виде

$$h = 2\varepsilon/\sigma^2 + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Тогда (30) можно переписать:

$$\mathbf{P}\bigg(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}(1 + O(\varepsilon))N \geq t\bigg) = \mathbf{P}\bigg(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}N \geq \frac{t}{1 + O(\varepsilon)}\bigg) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. Как обозначено выше, число $\rho = \rho(\varepsilon)$ определяется по случайному блужданию $\{S_n\}$. Обозначим $\rho^{(0)}$ эту же характеристику, вычисленную по случайному блужданию, порожденному последовательностью $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ с нулевым сносом. В условиях теоремы 1 при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $\rho \to \rho^{(0)}$. Действительно, введенные по последовательности $\{S_n\}$ функции распределения

$$\mathbf{P}(\chi_+^k < x\ ;\ \eta_+ < \infty) \quad \text{и} \qquad \mathbf{P}(|\chi_-|^k < x), \quad k = 1, 2,$$

при $\varepsilon \to 0$ слабо сходятся к аналогичным распределениям, вычисленным по случайному блужданию, порожденному последовательностью $\{Y_1, Y_2, \dots\}$, это следует, в частности, из [14, теорема 1]. Для сходимости моментов этих распределений достаточно убедиться, например, в наличии равномерных по ε мажорант для соответствующих моментов порядка $k+1$. Здесь помогут неравенство А. Могульского [14, теорема 2]

$$\mathbf{E}\,|\chi_-|^{k+1} \leq \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{\mathbf{E}\,|X|^{k+3}}{\mathbf{E}\,|X|^2},$$

правая часть которого ограничена равномерно по ε, и оценка [3, гл. 4, теорема 10]

$$\mathbf{P}(\chi_+ \geq x \mid \eta_+ < \infty) \leq c_1\mathbf{P}(X \geq x) + c_2\int_x^\infty \mathbf{P}(X \geq t)dt,$$

которая влечет равномерную по ε оценку для $\mathbf{E}(\chi_+^{k+1} \mid \eta_+ < \infty)$. В этом неравенстве константы c_1 и c_2 равномерно ограничены по ε.

Автор выражает свою благодарность В.И. Вахтелю и А.И. Саханенко за ряд полезных замечаний, направленных на улучшение работы.

Список литературы

[1] S.V. Nagaev, *An estimate of the convergence rate for the absorption probability*, Theory Probab. Appl., **16**:1 (1971), 147–154.

[2] A.A. Borovkov, *New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms*, In: Select. Transl. Math. Statist. Probab., **5** (1965), 315–372.

[3] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976.

[4] J.L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley and Sons, NY, 1953.

[5] V.I. Lotov and A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Mathematical Sciences, **230**:1 (2018), 112–117.

[6] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Sbornik: Mathematics, **194**:6 (2003), 927–939.

[7] V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121.

[8] V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54**:2 (2013), 265–270.

[9] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., 2004, **45**:4 (2004), 680–698.

[10] V.I. Lotov and N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by a Markov-modulated random walk*, Siberian Math. J., **47**:6 (2006), 1066–1083.

[11] V.I. Lotov, *Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Math. J., **40**:5 (1999), 925–937.

[12] J.H.B. Kemperman, *A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary*, Ann. Math. Statist., **34**:4 (1963), 1168–1193.

[13] V.I. Lotov, *The asymptotic behavior of distributions connected with the exit of a nondiscrete random walk from an interval*, Limit theorems of probability theory and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics, **1** (1982), Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 18–25.

[14] A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, Theory Probab. Appl., **18**:2 (1973), 340–347.

[15] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru