

О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий¹

В.И. Лотов

Аннотация

Доказана предельная теорема для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания с малым сносом.

Ключевые слова: предельные теоремы, граничные задачи для случайных блужданий, факторизационный метод, число пересечений полосы, переходные явления.

1 Введение. Постановка задачи

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0, \quad \mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 > 0. \quad (1)$$

Для $\varepsilon > 0$ введем новую последовательность

$$X = X(\varepsilon) = Y - \varepsilon, \quad X_k = X_k(\varepsilon) = Y_k - \varepsilon, \quad k \geq 1,$$

и пусть

$$S_n = S_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n X_k(\varepsilon), \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение случайную величину $N = N(\varepsilon)$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n(\varepsilon)), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$.

Для этого определим сначала моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ : S_n \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- : S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \emptyset = \infty$.

Очевидно, $\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассмотреть схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания. На этом пути в [1] найдена асимптотика вероятности поглощения в задаче с двумя

¹Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2022-0010).

прямолинейными границами. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено огромное число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А.А. Боровковым [2] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Еще один возможный метод асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см., например, [3, §24] и библиографические замечания там.

Изучению распределения числа пересечений полосы также посвящено значительное число публикаций. Начнем перечисление с известного неравенства Дуба для полумартингалов [4, гл. 7, теорема 3.3]. Оценки в виде неравенств для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания найдены в [5]. Точные формулы для этого распределения изучались в [6] для целочисленных случайных блужданий с геометрическими распределениями скачков на полуосях. В [7] приведены представления вероятностей $\mathbf{P}(N \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\mathbf{E} \exp\{\lambda X\}$, там же установлено асимптотическое поведение этой вероятности при условии, что полоса безгранично расширяется и выполнено условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания. В [8] найдены асимптотические представления для $\mathbf{P}(N \geq k)$ при других ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания. В условиях Крамера при $\mathbf{E}X = 0$ для распределения числа пересечений полосы на конечном неограниченно растущем интервале времени в [9] найдены полные асимптотические разложения, если ширина полосы растет согласованно с рассматриваемым интервалом времени. Аналоги этих результатов найдены также для блужданий, заданных на цепи Маркова [10].

Ясно, что общее число пересечений полосы будет неограниченно возрастать, если устремить к нулю снос случайного блуждания. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю сноса получено в [6] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В настоящей работе будет получен аналогичный результат для другого, весьма широкого класса случайных блужданий. Исследование будет проводиться с использованием разработанной ранее факторизационной техники.

2 Формулировка основного результата

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda Y}$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda X} = \psi(\lambda) e^{-\lambda \varepsilon}$ и введем в рассмотрение условие (A), включающее следующие два пункта.

(A₁) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A₂) Для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $\psi(\gamma) + \psi(-\gamma) < \infty$.

Положим также

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}, \quad \eta_- = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\},$$

и пусть

$$\chi_{\pm} = S_{\eta_{\pm}}, \quad \rho = \frac{\mathbf{E}(\chi_{+}^2; \eta_{+} < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_{+}; \eta_{+} < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_{-}^2}{2\mathbf{E}|\chi_{-}|}.$$

Отметим, что введенные величины зависят от ε . Существование моментов, входящих в определение величины ρ , обеспечивается условием (A_2) .

Теорема 1 Пусть для случайной величины Y , введенной в (1), выполнено условие (A) . Тогда для каждого $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

3 Предварительные сведения

Для последующих доказательств нам потребуется ряд сведений из [2], [11].

Пусть для $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$,

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_{\pm}} \exp\{\lambda\chi_{\pm}\}; \eta_{\pm} < \infty). \quad (3)$$

Хорошо известно следующее представление (факторизация Винера–Хопфа):

$$r_{z+}(\lambda)r_{z-}(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda), \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0. \quad (4)$$

При выполнении условия (A_2) факторизационное тождество (4) справедливо и в более широкой области $-\gamma \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \gamma$. Функция $r_{z+}(\lambda)$ является аналитической по λ при $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$, $|z| \leq 1$. Аналогичным свойством в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -\gamma$ обладает $r_{z-}(\lambda)$. Для функций $r_{z\pm}(\lambda)$ известны и другие формулы.

Обозначим через Π множество функций g , имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \quad (5)$$

Как и в [13], введем операторы A и B следующим образом.

Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z, \lambda) = r_{z-}(\lambda) [r_{z-}^{-1}(\lambda) g(\lambda)]^{(-\infty, -a]},$$

$$(Bg)(z, \lambda) = r_{z+}(\lambda) [r_{z+}^{-1}(\lambda) g(\lambda)]^{[b, \infty)},$$

где принято обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y) \right]^D = \int_D e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Если выполнено условие (A_1) и $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то функции $r_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ также допускают представления вида (5) (см. [2]). Функция g в этом определении может зависеть от z . Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z , но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Область допустимых значений z и λ в этом определении может быть расширена, если это позволяют сделать представления вида (5) для функций $r_{z\pm}^{\pm 1}(\lambda)$.

Положим для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta_+(t) = \min\{n \geq 1 : S_n \geq t\}, \quad \eta_-(t) = \min\{n \geq 1 : S_n \leq t\}, \quad \chi_\pm(t) = S_{\eta_\pm(t)}.$$

Известно ([12], [13]), что введенные операторы позволяют выразить через них двойные преобразования над совместными распределениями пар $(\eta_+(b), S_{\eta_+(b)})$ и $(\eta_-(-a), S_{\eta_-(-a)})$, а именно:

$$\mathbf{E} \left(z^{\eta_-(-a)} \exp\{\lambda S_{\eta_-(-a)}\}; \eta_-(-a) < \infty \right) = (Ae)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$\mathbf{E} \left(z^{\eta_+(b)} \exp\{\lambda S_{\eta_+(b)}\}; \eta_+(b) < \infty \right) = (Be)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0,$$

здесь принято обозначение $e(\lambda) = e(z, \lambda) \equiv 1$.

Кроме того, в [7] установлен более общий результат, состоящий в следующем. Для произвольного момента остановки $\nu \geq 0$ (возможно, несобственного) на событии $\{\nu < \infty\}$ вводятся случайные величины

$$\nu_+(b) = \inf\{n \geq \nu : S_n \geq b\}, \quad \nu_-(-a) = \inf\{n \geq \nu : S_n \leq -a\}.$$

Отличие от предыдущих рассмотрений состоит в том, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки ν . Эта конструкция потребует при рассмотрении числа пересечений полосы снизу вверх. Действительно, пересечения полосы формируются следующим образом: мы должны сначала обеспечить в момент τ_1^- достижение нижней границы траекторией, начинающейся в нуле, после чего рассматриваем следующую часть траектории, которая уже начинается в случайный момент τ_1^- . Эта часть траектории должна далее достигнуть впервые верхнюю границу полосы в момент времени τ_1^+ , который затем является стартовой точкой для последующей части траектории, идущей к нижней границе, и т.д.

Пусть

$$g(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^\nu \exp\{\lambda S_\nu\}; \nu < \infty).$$

Следующее утверждение получено в [7].

Теорема 2 Для $|z| < 1$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ справедливо

$$\mathbf{E} \left(z^{\nu_-(-a)} \exp\{\lambda S_{\nu_-(-a)}\}; \nu_-(-a) < \infty \right) = (Ag)(z, \lambda),$$

$$\mathbf{E} \left(z^{\nu_+(b)} \exp\{\lambda S_{\nu_+(b)}\}; \nu_+(b) < \infty \right) = (Bg)(z, \lambda).$$

Применяя эту теорему, сразу же получаем при $|z| < 1$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$\mathbf{E} \left(z^{\tau_1^-} \exp\{\lambda S_{\tau_1^-}\}; \tau_1^- < \infty \right) = (Ae)(z, \lambda),$$

$$\mathbf{E} \left(z^{\tau_1^+} \exp\{\lambda S_{\tau_1^+}\}; \tau_1^+ < \infty \right) = (BAe)(z, \lambda),$$

$$\mathbf{E} \left(z^{\tau_2^-} \exp\{\lambda S_{\tau_2^-}\}; \tau_2^- < \infty \right) = (ABAE)(z, \lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k \geq 1$

$$\mathbf{E} \left(z^{\tau_k^+} \exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty \right) = ((BA)^k e)(z, \lambda), \quad (6)$$

здесь степень оператора понимается как суперпозиция. Таким образом,

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} ((BA)^k e)(z, 0). \quad (7)$$

Равенство (7) также отмечено в [7], и это соотношение будет основой для дальнейших рассуждений.

Отметим, что при выполнении условия (A_2) функция $\varphi(\lambda)$ на интервале $-\gamma \leq \lambda \leq \gamma$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) < 0$, $\psi(\gamma) > 1$. При некотором $\delta > 0$ и при всех достаточно малых ε выполняется также неравенство

$$z\varphi(\gamma) = z\psi(\gamma)e^{-\gamma\varepsilon} > 1, \quad z \in [1 - \delta, 1].$$

Поэтому функция $1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\psi(\lambda)e^{-\lambda\varepsilon}$ имеет ровно два вещественных нуля $\lambda_{\pm}(z)$, $z \in [1 - \delta, 1]$, $\lambda_-(z) \leq \lambda_+(z)$. Из условий (A_2) и $\mathbf{E}X < 0$, очевидно, следует $\lambda_-(1) = 0$, $h := \lambda_+(1) > 0$. Нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ распределяются между компонентами факторизации следующим образом:

$$r_{z+}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0.$$

Величины $\lambda_{\pm}(z)$ будут играть важную роль в последующих рассмотрениях.

Пусть $m_k = \mathbf{E}X^k$, $\varepsilon = -m_1 > 0$. Из геометрических соображений ясно, что $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Более того, числа h и ε стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$1 = \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(0) + \dots = 1 - h\varepsilon + \frac{h^2}{2}m_2 + \dots$$

следует

$$\varepsilon = \frac{m_2}{2}h + O(h^2) = \frac{\sigma^2 + \varepsilon^2}{2}h + O(h^2), \quad h \rightarrow 0. \quad (8)$$

Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \rightarrow 0$ одновременно есть $o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и наоборот.

Асимптотическое поведение операторов A и B при $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ соответственно исследовано в [11], [13]. Для исследования асимптотики этих операторов при $\varepsilon \rightarrow 0$ приведем аналоги вспомогательных лемм из [11], предполагая выполненным условие (A) и $\mathbf{E}X < 0$. Для наших целей достаточно будет ограничиться рассмотрением вещественных значений $z \in (1 - \delta, 1)$ при некотором малом $\delta > 0$.

Итак, для произвольного $t \in \mathbb{R}$, следуя [2], введем множества

$$\Pi(t) = \{g(\lambda) : g(\lambda + t) \in \Pi\},$$

$$\Pi_-(t) = \left\{ g(\lambda) \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{(-\infty, 0]} e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = t \right\},$$

$$\Pi_+(t) = \left\{ g(\lambda) \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{([0, \infty))} e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = t \right\}.$$

Лемма 1 ([11]) *Существует $\delta > 0$ такое, что для $z \in (1 - \delta, 1)$ справедливы представления*

$$r_{z\pm}^{-1}(\lambda) = ((\lambda - \lambda_{\pm}(z))r'_{z\pm}(\lambda_{\pm}(z))^{-1} + \psi_{z\pm}(\lambda),$$

в которых $\psi_{z\pm}(\lambda) \in \Pi_{\pm}(\lambda_{\pm}(1) \pm \delta_{\pm})$ для некоторых $\delta_{\pm} > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$w_{z+}(\lambda) = \frac{r_{z+}(\lambda)(\lambda + \gamma + 1)}{\lambda - \lambda_+(z)}, \quad w_{z-}(\lambda) = \frac{r_{z-}(\lambda)(\lambda - \gamma - 1)}{\lambda - \lambda_-(z)}. \quad (9)$$

Эти функции при некоторых $\delta > 0$, $\delta_{\pm} > 0$ обеспечивают каноническую V-факторизацию (см. [2]) функции

$$\frac{(1 - z\varphi(\lambda))(\lambda + \gamma + 1)(\lambda - \gamma - 1)}{(\lambda - \lambda_+(z))(\lambda - \lambda_-(z))} = w_{z+}(\lambda)w_{z-}(\lambda)$$

при $z \in (1 - \delta, 1)$, $\lambda_- - \delta_- \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_+ + \delta_+$. Это означает, в частности, что

$$w_{z+}^{\pm 1}(\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ + \delta_+), \quad w_{z-}^{\pm 1}(\lambda) \in \Pi_-(\lambda_- - \delta_-).$$

Из (9) получаем

$$\begin{aligned} r_{z+}^{-1}(\lambda) &= \frac{\lambda + \gamma + 1}{\lambda - \lambda_+(z)} w_{z+}^{-1}(\lambda) \\ &= w_{z+}^{-1}(\lambda) + \frac{\lambda_+(z) + \gamma + 1}{\lambda - \lambda_+(z)} \left[w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z)) + (\lambda - \lambda_+(z)) \frac{w_{z+}^{-1}(\lambda) - w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z))}{\lambda - \lambda_+(z)} \right] \\ &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z))} + w_{z+}^{-1}(\lambda) + (\lambda_+(z) + \gamma + 1) \frac{w_{z+}^{-1}(\lambda) - w_{z+}^{-1}(\lambda_+(z))}{\lambda - \lambda_+(z)} \\ &\equiv \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z))} + \psi_{z+}(\lambda), \end{aligned}$$

где $\psi_{z+}(\lambda) \in \Pi_+(\lambda_+(1) + \delta_+)$ наряду с $w_{z+}^{-1}(\lambda)$ (см. [2]).

Утверждение для $r_{z-}^{-1}(\lambda)$ доказывается аналогично. $\square$

Далее нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2 Пусть функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_u^{\infty} e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad u \geq -a,$$

тогда для любого $\beta < 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{(-\infty, -a]} = g(\beta) \frac{e^{-(\lambda - \beta)a}}{\lambda - \beta}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\lambda - \beta} = \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda - \beta)t} dt, \quad g(\lambda) = \int_u^{\infty} e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad u \geq -a.$$

Произведение преобразований Лапласа–Стилтьеса равняется преобразованию от свертки:

$$\frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} \left(\int_{\max(u, t)}^{\infty} e^{-\beta(t-y)} dG(y) \right) dt.$$

Далее берем сужение внешнего интеграла на множество $(-\infty, -a]$:

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{(-\infty, -a]} = \int_{(-\infty, -a]} e^{\lambda t} \left(\int_u^\infty e^{-\beta(t-y)} dG(y) \right) dt = g(\beta) \int_{-\infty}^{-a} e^{(\lambda-\beta)t} dt = g(\beta) \frac{e^{-(\lambda-\beta)a}}{\lambda - \beta}.$$

Аналогично получается и другая лемма.

Лемма 3 Пусть функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^v e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad v \leq b,$$

тогда для любого $\beta > 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \beta} \right]^{[b, \infty)} = g(\beta) \frac{e^{(\lambda-\beta)b}}{\lambda - \beta}.$$

Используя леммы 1–3, получаем следующие представления.

Пусть функция $g(\lambda) = \int_{(-\infty, 0]} e^{\lambda t} dG(t) \in \Pi_-(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} [r_{z+}^{-1}(\lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)} &= \frac{1}{r'_{z+}(\lambda_+(z))} \left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(z)} \right]^{[b, \infty)} + [\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)} \\ &= \frac{g(\lambda_+(z))e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z))} + [\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}, \end{aligned}$$

то есть

$$(Bg)(z, \lambda) = v_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} g(\lambda_+(z)) + r_{z+}(\lambda) [\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}, \quad (10)$$

где обозначено

$$v_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda) \left((\lambda - \lambda_+(z)) r'_{z+}(\lambda_+(z)) \right)^{-1}, \quad z \in (1 - \delta, 1).$$

Аналогично имеем для $g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} dG(t) \in \Pi_+(0)$

$$(Ag)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a} g(\lambda_-(z)) + r_{z-}(\lambda) [\psi_{z-}(\lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, -a]}, \quad (11)$$

где

$$u_z(\lambda) = r_{z-}(\lambda) \left((\lambda - \lambda_-(z)) r'_{z-}(\lambda_-(z)) \right)^{-1}, \quad z \in (1 - \delta, 1).$$

В соответствии с (7) нам предстоит воспользоваться представлениями (10)–(11).

Последние слагаемые в правых частях этих представлений содержат выражения вида $[\psi_{z\pm}(\lambda)g(\lambda)]^A$. В дальнейшем их нужно будет оценивать. Явные выражения функций $\psi_{z\pm}(\lambda)$ через $w_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ приведены в лемме 1. Отметим, что наряду с $w_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ функции $\psi_{z\pm}(\lambda)$ аналитичны по совокупности аргументов (z, λ) каждая в своей области (см. [2]) и, следовательно, ограничены по модулю некоторыми константами, не зависящими от z :

$$|\psi_{z-}(\lambda)| \leq K_-, \quad |\psi_{z+}(\lambda)| \leq K_+.$$

Напомним, что вместе с компонентами факторизации эти константы зависят от малого параметра: $K_{\pm} = K_{\pm}(\varepsilon)$ и тем самым возникает вопрос о равномерности этих оценок по малым значениям ε . Заметим, однако, что представления (10)–(11) будут

использоваться только при $\lambda = 0$ и $z \rightarrow 1$, что упрощает ситуацию. В доказательстве теоремы 1 предстоит проанализировать изучаемую вероятность при $\varepsilon \rightarrow 0$. Формула (8) связывает величины ε и h ; сходимость выражений при $\varepsilon \rightarrow 0$ эквивалентна сходимости при $h \rightarrow 0$ и порядок малости при $h \rightarrow 0$ совпадает с порядком малости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нам будет удобнее сначала исследовать ситуацию, когда $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим оценки для $\lim_{z \rightarrow 1} r_{z\pm}(\lambda)$. Для этого запишем сначала разложение функций $r_{z\pm}(\lambda)$ соответственно в точках $\lambda_{\pm}(z)$, принимая во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+(z)) = 0$, $r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0$:

$$r_{z-}(\lambda) = r_{z-}(\lambda_-(z)) + r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda - \lambda_-(z)) + \dots = r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda - \lambda_-(z)) + \dots, \quad (12)$$

$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(z)) r'_{z+}(\lambda_+(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(z))^2}{2} r''_{z+}(\lambda_+(z)) + \dots \quad (13)$$

Производные по λ аналитических функций $r_{z\pm}(\lambda)$ тоже обладают свойством аналитичности. Из известных соотношений

$$r_{z-}(\lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda(T_n - n\varepsilon)\}; T_n < n\varepsilon) \right\}, \quad T_n = Y_1 + \dots + Y_n,$$

$$r_{z+}(\lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda(T_n - n\varepsilon)\}; T_n \geq n\varepsilon) \right\}, \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

нетрудно видеть, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $r_{z\pm}(\lambda)$ и их производные стремятся соответственно к компонентам факторизации и их производным, построенным по случайному блужданию $\{T_n\}$. При $z \rightarrow 1$ выполняется $\lambda_+(z) \rightarrow h > 0$, $\lambda_-(z) \rightarrow 0$, поэтому из (12)–(13) получаем

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z+}(0) = -hr'_{1+}(h) + \frac{h^2}{2} r''_{1+}(h) - \frac{h^3}{6} r'''_{1+}(h) + \dots = -hr'_{1+}(h) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) = hr'_{1-}(0) + \frac{h^2}{2} r''_{1-}(0) + \frac{h^3}{6} r'''_{1-}(0) + \dots = hr'_{1-}(0) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0. \quad (15)$$

Асимптотические формулы (14)–(15) потребуются в дальнейшем. Далее, из (13) и доказательства леммы 1 следует

$$\begin{aligned} \psi_{z+}(\lambda) &= r_{z+}^{-1}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z))} \\ &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z)) + (\lambda - \lambda_+(z))^2 r''_{z+}(\lambda_+(z))/2 + \dots} - \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(z))r'_{z+}(\lambda_+(z))}, \\ \lim_{z \rightarrow 1} \psi_{z+}(\lambda) &= \frac{1}{(\lambda - h)r'_{1+}(h) + (\lambda - h)^2 r''_{1+}(h)/2 + \dots} - \frac{1}{(\lambda - h)r'_{1+}(h)}. \end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \psi_{z+}(0) = \frac{1}{-hr'_{1+}(h) + O(h^2)} - \frac{1}{-hr'_{1+}(h)} = \frac{1}{-hr'_{1+}(h)} \left(\frac{1}{1 + O(h)} - 1 \right) = O(1). \quad (16)$$

Аналогично получаем

$$\psi_{z-}(\lambda) = r_{z-}^{-1}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_-(z))r'_{z-}(\lambda_-(z))}$$

$$= \frac{1}{(\lambda - \lambda_-(z))r'_{z-}(\lambda_-(z)) + (\lambda - \lambda_-(z))^2 r''_{z-}(\lambda_-(z))/2 + \dots} - \frac{1}{(\lambda - \lambda_-(z))r'_{z-}(\lambda_-(z))},$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \psi_{z-}(\lambda_+(z)) = \frac{1}{hr'_{1-}(0) + h^2 r''_{1-}(0)/2 + \dots} - \frac{1}{hr'_{1-}(0)} = O(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (17)$$

Заметим, что в соответствии с (3)

$$r_{1+}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}(\exp\{\lambda\chi_+\}; \eta_+ < \infty), \quad r_{1-}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}(\exp\{\lambda\chi_-\}), \quad (18)$$

поэтому, к примеру,

$$\begin{aligned} r'_{1-}(0) &= -\mathbf{E}\chi_-, & r''_{1-}(0) &= -\mathbf{E}\chi_-^2, \\ r'_{1+}(h) &= -\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+}; \eta_+ < \infty), & r''_{1+}(h) &= -\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+}; \eta_+ < \infty). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, для z , близких к единице, функции $\psi_{z\pm}(\lambda)$ ограничены равномерно по h (и по ε) в окрестности нуля.

Еще раз отметим, что приведенные выше формулы одновременно обосновывают сходимость этих величин при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В дальнейшем с помощью формул (10)–(11) будет анализироваться асимптотика при $h \rightarrow 0$ выражений вида $(Ag)(z, \lambda)$ и $(BAg)(z, \lambda)$, если, в свою очередь, функция g имеет вид $g(z, \lambda) = ((BA)^k e)(z, \lambda)$ при разных k .

Как следует из (6), функция g такого вида является двойным преобразованием над распределением пары $(\tau_k^+, S_{\tau_k^+})$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(z, \lambda) = \int_{(-\infty, -a]} e^{\lambda y} dG_1(y), \quad (BAg)(z, \lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda y} dG_2(y),$$

величины $\int_{-\infty}^{\infty} |dG_i(y)|$ при каждом $k \geq 0$ ограничены равномерно по z , и, разумеется, по ε . Следовательно, в этих случаях выражения вида $[\psi_{z\pm}(\lambda)g(\lambda)]^A$ также ограничены константами равномерно по ε .

4 Доказательство теоремы 1

Доказательство основывается на использовании компонент факторизации (4), формул (6) и (7), а также на свойствах операторов A и B , содержащихся в представлениях (10)–(11). Везде предполагается, что $z \in (1 - \delta, 1)$ для некоторого малого числа $\delta > 0$, согласующегося с утверждениями лемм.

Для лучшего понимания факторизационной техники доказательства рассмотрим на время несколько другую конструкцию случайного блуждания с малым сносом $\{S_n\}$, для которого компоненты факторизации весьма просто находятся в явном виде.

Предположим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq t) &= q \exp\{-\alpha t\}, \quad t \geq 0, \\ \mathbf{P}(X < t) &= r \exp\{\beta t\}, \quad t < 0, \quad r + q = 1, \quad \mathbf{E} X < 0, \end{aligned} \quad (20)$$

то есть распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным. Покажем, как в этой ситуации найти компоненты факторизации (4). Легко вычислить, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{r\beta}{\lambda + \beta} + \frac{q\alpha}{\alpha - \lambda} = \frac{r\beta(\alpha - \lambda) + q\alpha(\lambda + \beta)}{(\lambda + \beta)(\alpha - \lambda)},$$

и нахождение нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ сведется к решению квадратного уравнения. При $z < 1$ корень $\lambda_-(z)$ будет отрицательным, а $\lambda_+(z)$ — положительным.

$$1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z \frac{r\beta(\alpha - \lambda) + q\alpha(\lambda + \beta)}{(\lambda + \beta)(\alpha - \lambda)} = \frac{(\lambda - \lambda_-(z))(\lambda - \lambda_+(z))}{(\lambda + \beta)(\alpha - \lambda)},$$

то есть

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_{z-}(\lambda) R_{z+}(\lambda), \quad (21)$$

где обозначено

$$R_{z-}(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta}, \quad R_{z+}(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(z)}{\alpha - \lambda}.$$

При $z < 1$ функция $R_{z+}(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$ и ограничена на границе, функция $R_{z-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\beta$, и обе они не обращаются в ноль в упомянутых областях своей аналитичности. Любое представление вида (21) при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ с такими свойствами компонент называется канонической факторизацией ([15, гл. 12]) и его компоненты определяются однозначно с точностью до множителя, возможно зависящего от z . Представление (4) тоже являет собой каноническую факторизацию при $|z| < 1$. Это означает, что при некотором множителе $c = c(z)$ имеет место

$$R_{z+}(\lambda) = c r_{z+}(\lambda), \quad R_{z-}(\lambda) = c^{-1} r_{z-}(\lambda).$$

Устремляя $\lambda \rightarrow \infty$ в определении $r_{z-}(\lambda)$, убеждаемся, что в данном случае должно выполняться $c(z) \equiv 1$.

Нетрудно вычислить, что в наших условиях $h = -\alpha\beta \mathbf{E}X$.

Простыми вычислениями убеждаемся, что для случайных блужданий с условием (20) в представлениях (10)–(11) имеет место $|\psi_{z\pm}(\lambda)| \equiv 1$, поэтому **выражения** $[\psi_{z+}(\lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}$ и $[\psi_{z-}(\lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, a]}$ в этих формулах отсутствуют за счет срезок на соответствующих уровнях при $b > 0$, $-a < 0$, то есть

$$u(z, \lambda) = \frac{\lambda_-(z) + \beta}{\lambda + \beta}, \quad (Ag)(z, \lambda) = u(z, \lambda) g(\lambda_-(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda)a},$$

$$v(z, \lambda) = \frac{\alpha - \lambda_+(z)}{\alpha - \lambda}, \quad (Bg)(z, \lambda) = v(z, \lambda) g(\lambda_+(z)) e^{(\lambda - \lambda_+(z))b}.$$

Таким образом, в соответствии с (10)–(11)

$$(Ae)(z, \lambda) = u(z, \lambda) e^{(\lambda_-(z) - \lambda)a},$$

$$(BAe)(z, \lambda) = v(z, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_+(z))b} u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a},$$

$$(AB Ae)(z, \lambda) = u(z, \lambda) e^{(\lambda_-(z) - \lambda)a} v(z, \lambda_-(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))b} u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a},$$

$$(BAB Ae)(z, \lambda) = v(z, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_+(z))b} u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a} \times$$

$$\times v(z, \lambda_-(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))b} u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a},$$

и так далее.

Напомним, что $\lambda_-(1) = 0$, $\lambda_+(1) = h > 0$. Пусть $H(z) = v(z, \lambda_-(z)) u(z, \lambda_+(z))$, тогда для любого $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(N \geq k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((BA)^k e)(z, 0) = d^k(h) e^{-kh(a+b)} = \mathbf{P}(hN \geq kh),$$

где обозначено

$$d(h) := H(1) = v(1, 0) u(1, h) = \frac{\alpha - h}{\alpha} \frac{\beta}{\beta + h}.$$

Полагая $t = kh$, перепишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{P}(h N \geq t) = d^{t/h}(h) e^{-t(a+b)}.$$

Остается заметить, что при $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \log d^{t/h}(h) &= \frac{t}{h} \log \left(\frac{\alpha - h}{\alpha} \right) + \frac{t}{h} \log \left(\frac{\beta}{\beta + h} \right) = \\ &= \frac{t}{h} \log \left(1 - \frac{h}{\alpha} \right) + \frac{t}{h} \log \left(1 - \frac{h}{\beta + h} \right) = -t \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + O(h). \end{aligned}$$

Тем самым получено следующее утверждение.

Предложение 1 Пусть выполнено (20), тогда для всех $t \geq 0$

$$\mathbf{P}(h N \geq t) = \exp \left\{ -t \left(a + b + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \right\} + O(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Далее, пусть по-прежнему выполнено (1), $X = Y - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и выполнено условие (A). Сначала рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(N \geq 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (BAe)(z, 0)$. Имеем в силу (10)–(11)

$$\begin{aligned} (Ae)(z, \lambda) &= u_z(\lambda) e^{(\lambda_-(z) - \lambda)a} + r_{z-}(\lambda) [\psi_{z-}(\lambda)]^{(-\infty, -a]}, \\ (BAe)(z, \lambda) &= v(z, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_+(z))b} \times \\ &\times \left(u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a} + r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} \right) + r_{z+}(\lambda) [\psi_{z+}(\lambda) (Ae)(z, \lambda)]^{[b, \infty)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим, как и ранее, $H(z) = v(z, \lambda_-(z)) u(z, \lambda_+(z))$, и пусть

$$d(h) = H(1) = v(1, 0) u(1, h).$$

Покажем, что эта величина отделена от нуля при малых h .

Лемма 4 В условиях теоремы 1 при $h \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$d(h) = 1 - \rho h + O(h^2), \quad \rho = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2; \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+; \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\mathbf{E}|\chi_-|}. \quad (23)$$

Доказательство. Из (12) следует

$$v(z, \lambda_-(z)) = \frac{r_{z+}(\lambda_-(z))}{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z)) r'_{z+}(\lambda_+(z))} = 1 + \frac{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z)) r''_{z+}(\lambda_+(z))}{2 r'_{z+}(\lambda_+(z))} + \dots$$

Как и выше, применим соотношения (18) и (19), получая в итоге

$$v(1, 0) = 1 - \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+}; \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+}; \eta_+ < \infty)} + O(h^2) = \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2; \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+; \eta_+ < \infty)} + O(h^2). \quad (24)$$

Аналогично получаем из (12) и (18)

$$u(z, \lambda_+(z)) = \frac{r_{z-}(\lambda_+(z))}{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) r'_{z-}(\lambda_-(z))} = 1 + \frac{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) r''_{z-}(\lambda_-(z))}{2 r'_{z-}(\lambda_-(z))} + \dots,$$

$$u(1, h)) = 1 + \frac{h r_{1-}''(0)}{2 r_{1-}'(0)} + \dots = 1 + \frac{h \mathbf{E} \chi_-^2}{2 \mathbf{E} \chi_-} + O(h^2). \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует утверждение леммы. $\square$

Теперь из (22) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N \geq 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (BAe)(z, 0) = d(h) e^{-h(a+b)} \\ &+ v(1, 0) e^{-hb} \lim_{z \rightarrow 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} + \lim_{z \rightarrow 1} r_{z+}(0) [\psi_{z+}(\lambda) Ae(z, \lambda)]_{\lambda=0}^{[b, \infty)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Проанализируем последние два слагаемых. В силу (15) и (17) имеем равномерно по ε

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} = O(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (27)$$

Для последнего слагаемого в (26) выводим из (14) и (16)

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z+}(0) [\psi_{z+}(\lambda) Ae(z, \lambda)]_{\lambda=0}^{[b, \infty)} = O(h). \quad (28)$$

В итоге получаем из (26)–(28) при $h \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}(N \geq 1) = d(h) e^{-h(a+b)} + O(h).$$

Сделаем теперь индуктивное предположение: пусть для некоторого $k \geq 1$ выполнено

$$\mathbf{P}(N \geq k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((BA)^k e)(z, 0) = d^k(h) e^{-kh(a+b)} + O(h). \quad (29)$$

Покажем, что это соотношение выполняется для $k+1$.

Итак, опять в силу соотношений (10)–(11)

$$\begin{aligned} (BA(BA)^k)(z, \lambda) &= v(z, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_+(z))b} \times \\ &\times \left(u(z, \lambda_+(z)) e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a} (BA)^k(z, \lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda) (BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} \right) + \\ &+ r_{z+}(\lambda) [\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=0}^{[b, \infty)}. \end{aligned}$$

Как и в (27) и (28), имеем равномерно по ε

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda) (BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} = O(h), \quad h \rightarrow 0,$$

а также

$$\lim_{z \rightarrow 1} r_{z+}(0) [\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=0}^{[b, \infty)} = O(h).$$

Поэтому в соответствии с индуктивным предположением

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N \geq k+1) &= \lim_{z \rightarrow 1} ((BA(BA)^k)(z, 0) = \lim_{z \rightarrow 1} v(z, 0) u(z, \lambda_+(z)) e^{-\lambda_+(z)b + (\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a} \times \\ &\times \left((BA)^k(z, \lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) [\psi_{z-}(\lambda) (BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=\lambda_+(z)}^{(-\infty, -a]} \right) \\ &+ r_{z+}(0) [\psi_{z+}(\lambda) A(BA)^k(z, \lambda)]_{\lambda=0}^{[b, \infty)} = d(h) e^{-h(a+b)} (d^k(h) e^{-kh(a+b)} + O(h)) + O(h) \\ &= d^{(k+1)}(h) e^{-(k+1)h(a+b)} + O(h). \end{aligned}$$

Тем самым установлена справедливость формулы (29) для всех $k \geq 1$. Из нее выводим при $t = kh$

$$\mathbf{P}(hN \geq t) = d^{t/h}(h) e^{-t(a+b)} + O(h),$$

и далее, применяя формулу (23), получаем

$$\log d^{t/h}(h) = \frac{t}{h} \log(1 - \rho h + O(h^2)) = -\rho t + O(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2 Пусть выполнено условие (A). Тогда для $t \geq 0$

$$\mathbf{P}(hN \geq t) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (30)$$

Напомним, что $O(h) = O(\varepsilon)$ и запишем (8) в виде

$$h = 2\varepsilon/\sigma^2 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда (30) можно переписать:

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}(1 + O(\varepsilon))N \geq t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}N \geq \frac{t}{1 + O(\varepsilon)}\right) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. Как обозначено выше, число $\rho = \rho(\varepsilon)$ определяется по случайному блужданию $\{S_n\}$. Обозначим $\rho^{(0)}$ эту же характеристику, вычисленную по случайному блужданию, порожденному последовательностью $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ с нулевым сносом. В условиях теоремы 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость $\rho \rightarrow \rho^{(0)}$. Действительно, введенные по последовательности $\{S_n\}$ функции распределения

$$\mathbf{P}(\chi_+^k < x; \eta_+ < \infty) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(|\chi_-|^k < x), \quad k = 1, 2,$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо сходятся к аналогичным распределениям, вычисленным по случайному блужданию, порожденному последовательностью $\{Y_1, Y_2, \dots\}$, это следует, в частности, из [14, теорема 1]. Для сходимости моментов этих распределений достаточно убедиться, например, в наличии равномерных по ε мажорант для соответствующих моментов порядка $k + 1$. Здесь помогут неравенство А. Могульского [14, теорема 2]

$$\mathbf{E} |\chi_-|^{k+1} \leq \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{\mathbf{E} |X|^{k+3}}{\mathbf{E} |X|^2},$$

правая часть которого ограничена равномерно по ε , и оценка [3, гл. 4, теорема 10]

$$\mathbf{P}(\chi_+ \geq x \mid \eta_+ < \infty) \leq c_1 \mathbf{P}(X \geq x) + c_2 \int_x^\infty \mathbf{P}(X \geq t) dt,$$

которая влечет равномерную по ε оценку для $\mathbf{E}(\chi_+^{k+1} \mid \eta_+ < \infty)$. В этом неравенстве константы c_1 и c_2 равномерно ограничены по ε .

Автор выражает свою благодарность В.И. Вахтелю и А.И. Саханенко за ряд полезных замечаний, направленных на улучшение работы.

Список литературы

- [1] С.В. Нагаев, *Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения*, Теория вероятн. и ее примен., **16:1** (1971), 140–148.
S.V. Nagaev, *An estimate of the convergence rate for the absorption probability*, Theory Probab. Appl., **16:1** (1971), 147–154.
- [2] Боровков А.А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. Сибирский математический журнал, 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.
A.A. Borovkov, *New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms*, In: Select. Transl. Math. Statist. Probab., **5** (1965), 315–372.
- [3] Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976.
- [4] Дж.Л. Дуб. Вероятностные процессы. Изд-во иностранной литературы, М., 1956.
J.L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley and Sons, NY, 1953.
- [5] Лотов В.И., Львов А.П. Неравенства для числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016, т.16, № 4, с. 65–71.
V.I. Lotov and A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Mathematical Sciences, **230:1** (2018), 112–117.
- [6] Лотов В.И., Орлова Н.Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Математический сборник. 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.
V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Sbornik: Mathematics, **194:6** (2003), 927–939.
- [7] Лотов В.И. Об одном подходе в двуграничных задачах. Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева. Москва, 1989, с. 117–121.
V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121.
- [8] Лотов В. И. О предельном поведении распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 347–354.
V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54:2** (2013), 265–270.
- [9] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 822–842.
V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., 2004, **45:4** (2004), 680–698.

- [10] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова. Сибирский матем. журнал, 2006, т. 47, № 6, 1303–1322.
V.I. Lotov and N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by a Markov-modulated random walk*, *Siberian Math. J.*, **47**:6 (2006), 1066–1083.
- [11] В.И. Лотов. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. Сибирский математический журнал, 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.
V.I. Lotov, *Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks*, *Siberian Math. J.*, **40**:5 (1999), 925–937.
- [12] J.H.B. Kemperman, *A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary*, *Ann. Math. Statist.*, **34**:4 (1963), 1168–1193.
- [13] Лотов В. И. Об асимптотике распределений, связанных с выходом не дискретного случайного блуждания из интервала. Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1982. Т. 1: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. С. 18–25.
V.I. Lotov, *The asymptotic behavior of distributions connected with the exit of a nondiscrete random walk from an interval*, *Limit theorems of probability theory and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics*, **1** (1982), Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 18–25.
- [14] А.А. Могольский. Абсолютные оценки для моментов некоторых граничных функционалов. Теория вероятностей и её применения, 18:2 (1973), 350–357.
A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, *Theory Probab. Appl.*, **18**:2 (1973), 340–347.
- [15] А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, URSS, М., 2021.
A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru