УДК 519.21

О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий [1]

В.И. Лотов

Аннотация

Доказана предельная теорема для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания с малым сносом.

Ключевые слова: предельные теоремы, граничные задачи для случайных блужданий, факторизационный метод, число пересечений полосы, переходные явления.

1 Введение. Постановка задачи

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 > 0. \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ введем новую последовательность

$$X = X(\varepsilon) = Y - \varepsilon, \quad X_k(\varepsilon) = Y_k - \varepsilon, \quad k \geq 1,$$

и пусть

$$S_n = S_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\varepsilon), \quad n \geq 1, \qquad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение случайную величину $N = N(\varepsilon)$, равную числу пересечений полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n(\varepsilon)), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$.

Для этого определим сначала моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ \colon S_n \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- \colon S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$.

Очевидно, $\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon \to 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассмотреть схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания. На этом пути в [1] найдена асимптотика вероятности поглощения в задаче с двумя

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2022-0010).

прямолинейными границами. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено огромное число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А.А. Боровковым [2] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Еще один возможный метод асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см., например, [3, §24] и библиографические замечания там.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящено значительное число публикаций. Начнем перечисление с известного неравенства Дуба для полумартингалов [4, гл. 7, теорема 3.3]. Оценки в виде неравенств для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания найдены в [5]. Точные формулы для этого распределения изучались в [6] для целочисленных случайных блужданий с геометрическими распределениями скачков на полуосях. В [7] приведены представления вероятностей $\mathbf{P}(N \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\mathbf{E}\exp\{\lambda X\}$, там же установлено асимптотическое поведение этой вероятности при условии, что полоса безгранично расширяется и выполнено условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания. В [8] найдены асимптотические представления для $\mathbf{P}(N \geq k)$ при других ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания. В условиях Крамера при $\mathbf{E}X = 0$ для распределения числа пересечений полосы на конечном неограниченно растущем интервале времени в [9] найдены полные асимптотические разложения, если ширина полосы растет согласованно с рассматриваемым интервалом времени. Аналоги этих результатов найдены также для блужданий, заданных на цепи Маркова [10].

Ясно, что общее число пересечений полосы будет неограниченно возрастать, если устремить к нулю снос случайного блуждания. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю сноса получено в [6] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В настоящей работе будет получен аналогичный результат для другого, весьма широкого класса случайных блужданий. Исследование будет проводиться с использованием разработанной ранее факторизационной техники.

2 Формулировка основного результата

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda Y}$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda X} = \psi(\lambda)\, e^{-\lambda\varepsilon}$ и введем в рассмотрение условие (A), включающее следующие два пункта.

(A_1) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A_2) Для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $\psi(\gamma) + \psi(-\gamma) < \infty$ и $\psi(\gamma) > 1$.

Положим также

$$\eta_+ = \eta_+(\varepsilon) = \min\{n \geq 1 :\ S_n(\varepsilon) \geq 0\}, \qquad \eta_- = \eta_-(\varepsilon) = \min\{n \geq 1 :\ S_n(\varepsilon) < 0\},$$

и пусть

$$\chi_\pm = \chi_\pm(\varepsilon) = S_{\eta_\pm}, \qquad \rho = \rho(\varepsilon) = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}.$$

Теорема 1 *Пусть выполнено условие* (A). *Тогда для* $t \ge 0$

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \ge t\biggr) = e^{-t(\rho(\varepsilon)+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

3 Предварительные сведения

Для последующих доказательств нам потребуется ряд сведений из [2], [11].

Пусть для $|z| \le 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$,

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm}\exp\{\lambda\chi_\pm\};\ \eta_\pm < \infty\right). \tag{3}$$

Хорошо известно следующее представление (факторизация Винера–Хопфа):

$$r_{z+}(\lambda)\, r_{z-}(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda), \quad |z| \le 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0. \tag{4}$$

При выполнении условия (A_2) факторизационное тождество (4) справедливо и в более широкой области $-\gamma \le \mathrm{Re}\lambda \le \gamma$. Функция $r_{z+}(\lambda)$ является аналитической по λ при $\mathrm{Re}\lambda < \gamma$, $|z| \le 1$. Аналогичным свойством в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > -\gamma$ обладает $r_{z-}(\lambda)$. Для функций $r_{z\pm}(\lambda)$ известны и другие формулы.

Обозначим через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{5}$$

Как и в [13], введем операторы A и B следующим образом.

Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\bigl[r_{z-}^{-1}(\lambda)\, g(\lambda)\bigr]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\bigl[r_{z+}^{-1}(\lambda)\, g(\lambda)\bigr]^{[b,\infty)},$$

где принято обозначение

$$\Bigl[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y)\Bigr]^D = \int_D e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Если выполнено условие (A_1) и $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, то функции $r_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ также допускают представления вида (5) (см. [2]). Функция g в этом определении может зависеть от z. Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z, но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Область допустимых значений z и λ в этом определении может быть расширена, если это позволяют сделать представления вида (5) для функций $r_{z\pm}^{\pm 1}(\lambda)$.

Положим для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta_+(t) = \min\{n \ge 1:\ S_n \ge t\}, \qquad \eta_-(t) = \min\{n \ge 1:\ S_n \le t\}, \qquad \chi_\pm(t) = S_{\eta_\pm(t)}.$$

Известно ([12], [13]), что введенные операторы позволяют выразить через них двойные преобразования над совместными распределениями пар $\left(\eta_+(b),\ S_{\eta_+(b)}\right)$ и $\left(\eta_-(-a),\ S_{\eta_-(-a)}\right)$, а именно:

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_-(-a)}\exp\{\lambda S_{\eta_-(-a)}\};\ \eta_-(-a)<\infty\right)=(Ae)(z,\lambda),\qquad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\lambda\geq 0,$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_+(b)}\exp\{\lambda S_{\eta_+(b)}\};\ \eta_+(b)<\infty\right)=(Be)(z,\lambda),\qquad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\lambda\leq 0,$$

здесь принято обозначение $e(\lambda)=e(z,\lambda)\equiv 1$.

Кроме того, в [7] установлен более общий результат, состоящий в следующем. Для произвольного момента остановки $\nu\geq 0$ (возможно, несобственного) на событии $\{\nu<\infty\}$ вводятся случайные величины

$$\nu_+(b)=\inf\{n\geq\nu:\ S_n\geq b\},\qquad \nu_-(-a)=\inf\{n\geq\nu:\ S_n\leq -a\}.$$

Отличие от предыдущих рассмотрений состоит в том, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки ν. Эта конструкция потребуется при рассмотрении числа пересечений полосы снизу вверх. Действительно, пересечения полосы формируются следующим образом: мы должны сначала обеспечить в момент τ_1^- достижение нижней границы траекторией, начинающейся в нуле, после чего рассматриваем следующую часть траектории, которая уже начинается в случайный момент τ_1^-. Эта часть траектории должна далее достигнуть впервые верхнюю границу полосы в момент времени τ_1^+, который затем является стартовой точкой для последующей части траектории, идущей к нижней границе, и т.д.

Пусть

$$g(z,\lambda)=\mathbf{E}(z^\nu\exp\{\lambda S_\nu\};\ \nu<\infty).$$

Следующее утверждение получено в [7].

Теорема 2 *Для* $|z|<1$ *и* $\mathrm{Re}\lambda=0$ *справедливо*

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_-(-a)}\exp\{\lambda S_{\nu_-(-a)}\};\ \nu_-(-a)<\infty\right)=(Ag)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_+(b)}\exp\{\lambda S_{\nu_+(b)}\};\ \nu_+(b)<\infty\right)=(Bg)(z,\lambda).$$

Применяя эту теорему, сразу же получаем при $|z|<1$ и $\mathrm{Re}\,\lambda=0$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^-}\exp\{\lambda S_{\tau_1^-}\};\tau_1^-<\infty\right)=(Ae)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^+}\exp\{\lambda S_{\tau_1^+}\};\tau_1^+<\infty\right)=(BAe)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_2^-}\exp\{\lambda S_{\tau_2^-}\};\tau_2^-<\infty\right)=(ABAe)(z,\lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k\geq 1$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+}\exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\};\tau_k^+<\infty\right)=((BA)^k e)(z,\lambda),\tag{6}$$

здесь степень оператора понимается как суперпозиция. Таким образом,

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon)\geq k)=\mathbf{P}(\tau_k^+<\infty)=\lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0).\tag{7}$$

Равенство (7) также отмечено в [7], и это соотношение будет основой для дальнейших рассмотрений.

Отметим, что при выполнении условия (A_2) функция $\varphi(\lambda)$ на интервале $-\gamma \le \lambda \le \gamma$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) < 0$. При некотором $\delta > 0$ и при всех достаточно малых ε выполняется также неравенство

$$z\varphi(\gamma) = z\psi(\gamma)e^{-\gamma\varepsilon} > 1, \qquad z \in [1-\delta, 1].$$

Поэтому функция $1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\psi(\lambda)\,e^{-\lambda\varepsilon}$ имеет ровно два вещественных нуля $\lambda_\pm(z)$, $z \in [1-\delta, 1]$, $\lambda_-(z) \le \lambda_+(z)$. Из условий (A_2) и $\mathbf{E}X < 0$, очевидно, следует $\lambda_-(1) = 0$, $h := \lambda_+(1) > 0$. Нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ распределяются между компонентами факторизации следующим образом:

$$r_{z+}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0.$$

Величины $\lambda_\pm(z)$ будут играть важную роль в последующих рассмотрениях.

Пусть $m_k = \mathbf{E}X^k$, $\varepsilon = -m_1 > 0$. Числа h и ε стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$1 = \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(0) + \dots = 1 - h\varepsilon + \frac{h^2}{2}m_2 + \dots$$

следует

$$\varepsilon = \frac{m_2}{2}\,h + O(h^2) = \frac{\sigma^2 + \varepsilon^2}{2}\,h + O(h^2), \quad h \to 0. \tag{8}$$

Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \to 0$ одновременно есть $o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ и наоборот.

Асимптотическое поведение операторов A и B при $a \to \infty$ и $b \to \infty$ соответственно исследовано в [13], [11]. Приведем нужные нам следствия из вспомогательных лемм в [11], предполагая выполненным условие (A) и $\mathbf{E}X < 0$. Для наших целей достаточно будет ограничиться рассмотрением вещественных значений $z \in (1-\delta, 1)$ при некотором малом $\delta > 0$.

Лемма 1 *Для любой функции* $g(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}dG(y) \in \Pi$ *при некотором* $\delta > 0$ *имеет место представление*

$$Ag(z,\lambda) = u_z(\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}g\big(\lambda_-(z)\big) + r_{z-}(\lambda)\int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y}d\theta_z(y), \quad z \in (1-\delta, 1),\ \mathrm{Re}\lambda \ge 0,$$

в котором $u_z(\lambda) = r_{z-}(\lambda)\Big(\big(\lambda - \lambda_-(z)\big)r'_{z-}\big(\lambda_-(z)\big)\Big)^{-1}$, *и при некотором* $K_1 > 0$

$$\int\limits_{(-\infty,-a]} |d\theta_z(y)| \le K_1 \int\limits_0^\infty |dG(y)|$$

равномерно по $z \in (1-\delta, 1)$.

Лемма 2 *Для всякой функции* $g(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda y}dG(y) \in \Pi$ *при некотором* $\delta > 0$ *имеет место представление*

$$Bg(z,\lambda) = v_z(\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}g(\lambda_+(z)) + r_{z+}(\lambda)\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}d\varphi_z(y),$$

в котором

$$v_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda)\left(\big(\lambda-\lambda_+(z)\big)r'_{z+}\big(\lambda_+(z)\big)\right)^{-1}, \quad z\in(1-\delta,1),\ \mathrm{Re}\lambda\le h.$$

Функция φ_z *при некотором* $K_2>0$ *удовлетворяет оценке*

$$\int_b^\infty |d\varphi_z(y)| \le K_2 \int_{(-\infty,0]} |dG(y)|$$

равномерно по $z\in(1-\delta,1)$.

В формулировках этих лемм в [11] участвуют константы K_1 и K_2, значения которых определяются свойствами компонент факторизации и не зависят от функции g. В наших условиях аналитичность компонент факторизации в соответствующих полуплоскостях (по переменной λ) позволяет выбирать эти константы также не зависящими от малых значений числа ε.

Приведенные в этих леммах представления будут использоваться ниже в доказательстве теоремы.

4 Доказательство теоремы 1

Доказательство основывается на использовании компонент факторизации (4), формул (6) и (7), а также на свойствах операторов A и B, содержащихся в леммах 1 и 2. Везде предполагается, что $z\in(1-\delta,1)$ для некоторого малого числа $\delta>0$, согласующегося с утверждениями лемм.

Для лучшего понимания техники доказательства рассмотрим сначала случайное блуждание $\{S_n\}$, для которого компоненты факторизации весьма просто находятся в явном виде.

Предположим, что

$$\mathbf{P}(X\ge t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t\ge 0,$$
$$\mathbf{P}(X<t) = r\exp\{\beta t\}, \quad t<0, \quad r+q=1, \quad \mathbf{E}X<0, \tag{9}$$

то есть распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным. Покажем, как в этой ситуации найти компоненты факторизации (4). Легко вычислить, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{r\beta}{\lambda+\beta} + \frac{q\alpha}{\alpha-\lambda} = \frac{r\beta(\alpha-\lambda)+q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

и нахождение нулей функции $1-z\varphi(\lambda)$ сведется к решению квадратного уравнения. При $z<1$ корень $\lambda_-(z)$ будет отрицательным, а $\lambda_+(z)$ — положительным.

$$1-z\varphi(\lambda) = 1 - z\,\frac{r\beta(\alpha-\lambda)+q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)} = \frac{(\lambda-\lambda_-(z))(\lambda-\lambda_+(z))}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

то есть

$$1-z\varphi(\lambda) = R_{z-}(\lambda)\,R_{z+}(\lambda), \tag{10}$$

где обозначено

$$R_{z-}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\beta} \qquad R_{z+}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda}.$$

При $z<1$ функция $R_{z+}(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda<\alpha$ и ограничена на границе, функция $R_{z-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>-\beta$, и обе они не обращаются в ноль в упомянутых областях своей аналитичности. Любое представление вида (10) при $\mathrm{Re}\lambda=0$ с такими свойствами компонент называется канонической факторизацией ([14, гл. 12]) и его компоненты определяются однозначно с точностью до множителя, возможно зависящего от z. Представление (4) тоже являет собой каноническую факторизацию при $|z|<1$. Это означает, что при некотором множителе $c=c(z)$ имеет место

$$R_{z+}(\lambda)=c\,r_{z+}(\lambda),\quad R_{z-}(\lambda)=c^{-1}r_{z-}(\lambda).$$

Устремляя $\lambda\to\infty$ в определении $r_{z-}(\lambda)$, убеждаемся, что в данном случае должно выполняться $c(z)\equiv 1$.

Нетрудно вычислить, что в наших условиях $h=-\alpha\beta\,\mathbf{E}X$.

Как следует из доказательств лемм 1 и 2 в [11], для случайных блужданий с условием (9) в формулировках этих лемм остаточные члены в представлениях для $(Ag)(z,\lambda)$ и $(Bg)(z,\lambda)$ будут отсутствовать, поэтому простыми вычислениями убеждаемся, что

$$u(z,\lambda)=\frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda+\beta},\qquad (Ag)(z,\lambda)=u(z,\lambda)\,g(\lambda_-(z))e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$

$$v(z,\lambda)=\frac{\alpha-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda},\qquad (Bg)(z,\lambda)=v(z,\lambda)\,g(\lambda_+(z))\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}.$$

Таким образом, в соответствии с леммами 1 и 2,

$$(Ae)(z,\lambda)=u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$
$$(BAe)(z,\lambda)=v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$
$$(ABAe)(z,\lambda)=u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$
$$(BABAe)(z,\lambda)=v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a}\times$$
$$\times v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

и так далее.

Напомним, что $\lambda_-(1)=0$, $\lambda_+(1)=h>0$. Пусть $H(z)=v(z,\lambda_-(z))\,u(z,\lambda_+(z))$, тогда для любого $k\geq 1$

$$\mathbf{P}(N\geq k)=\lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0)=d^k(h)\,e^{-kh(a+b)}=\mathbf{P}(h\,N\geq kh),$$

где обозначено

$$d(h):=H(1)=v(1,0)\,u(1,h)=\frac{\alpha-h}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta+h}.$$

Полагая $t=kh$, перепишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{P}(h\,N\geq t)=d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)}.$$

Остается заметить, что при $h\to 0$

$$\log d^{t/h}(h)=\frac{t}{h}\log\left(\frac{\alpha-h}{\alpha}\right)+\frac{t}{h}\log\left(\frac{\beta}{\beta+h}\right)=$$

$$=\frac{t}{h}\log\left(1-\frac{h}{\alpha}\right)+\frac{t}{h}\log\left(1-\frac{h}{\beta+h}\right)=-t\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+O(h).$$

Тем самым получено следующее утверждение.

Предложение 1 *Пусть выполнено* (9), *тогда при* $h \to 0$

$$\mathbf{P}(h\,N \ge t) = \exp\left\{ -t\left(a + b + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\right\} + O(h), \qquad t \ge 0.$$

Для того, чтобы перейти теперь к рассмотрению общего случая, охватываемого условием (A), нам потребуется исследовать асимптотику выражений вида $(Ag)(z,\lambda)$ и $(Bg)(z,\lambda)$ при $h \to 0$ в условиях лемм 1 и 2.

Итак, пусть выполнено условие (A) и $\mathbf{E}X < 0$. Сначала рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(N \ge 1) = \lim_{z\to 1}(BAe)(z,0)$. Имеем в силу указанных лемм

$$Ae(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a} + r_{z-}(\lambda) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y} d\theta_z(y),$$

$$(BAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} \times$$

$$\times\left(u(z,\lambda_+(z))\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} + r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y} d\theta_z(y)\right) + r_{z+}(\lambda) \int\limits_b^{\infty} e^{\lambda y} d\varphi_z(y). \tag{11}$$

Обозначим, как и ранее, $H(z) = v(z,\lambda_-(z))\, u(z,\lambda_+(z))$, и пусть

$$d(h) = H(1) = v(1,0)\, u(1,h)).$$

Покажем, что эта величина отделена от нуля при малых h.

Лемма 3 *В условиях теоремы* 1 *при* $h \to 0$ *имеет место соотношение*

$$d(h) = 1 - \rho\, h + O(h^2), \qquad \rho = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}. \tag{12}$$

Доказательство. Запишем разложение функции $r_{z+}(\lambda)$ в точке $\lambda_+(z)$, принимая во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+(z)) = 0$:

$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z)) + \frac{(\lambda-\lambda_+(z))^2}{2}\, r''_{z+}(\lambda_+(z)) + \dots,$$

откуда следует

$$v(z,\lambda_-(z)) = \frac{r_{z+}(\lambda_-(z))}{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z))} = 1 + \frac{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))\, r''_{z+}(\lambda_+(z))}{2\, r'_{z+}(\lambda_+(z))} + \dots.$$

В связи с тем, что в соответствии с (3)

$$r_{1+}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+\};\ \eta_+ < \infty\right),$$

имеем

$$r'_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty), \qquad r''_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty),$$

то есть

$$v(1,0) = 1 - \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2) = \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2). \tag{13}$$

Аналогично получаем

$$r_{z-}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-(z))\, r'_{z-}(\lambda_-(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_-(z))^2}{2}\, r''_{z-}(\lambda_-(z)) + \ldots,$$

откуда следует

$$u(z, \lambda_+(z)) = \frac{r_{z-}(\lambda_+(z))}{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\, r'_{z-}(\lambda_-(z))} = 1 + \frac{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\, r''_{z-}(\lambda_-(z))}{2\, r'_{z-}(\lambda_-(z))} + \ldots,$$

$$u(1, h)) = 1 + \frac{h\, r''_{1-}(0)}{2\, r'_{1-}(0)} + \cdots = 1 + \frac{h\, \mathbf{E}\chi_-^2}{2\, \mathbf{E}\chi_-} + O(h^2). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует утверждение леммы. □

Теперь из (11) выводим

$$\mathbf{P}(N \geq 1) = \lim_{z \to 1} (BAe)(z, 0) = d(h)\, e^{-h(a+b)}$$

$$+ v(1, 0)\, e^{-hb} \lim_{z \to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty, -a]} e^{\lambda_+(z) y} d\theta_z(y) + \lim_{z \to 1} r_{z+}(0) \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y). \tag{15}$$

Проанализируем последние два слагаемых. Здесь

$$r_{z-}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) + r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) + \ldots = r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) + \ldots,$$

и при $z = 1$, $h \to 0$

$$r_{z-}(\lambda_+(z)) = h r'_{1-}(0) + O(h^2).$$

Для z, близких к единице,

$$\Big| \int\limits_{(-\infty, -a]} e^{\lambda_+(z) y} d\theta_z(y) \Big| \leq e^{-ha} \int\limits_{(-\infty, -a]} |d\theta_z(y)| \leq C_1,$$

где повсюду $C_i > 0$ — некоторые константы, не зависящие от ε. Поэтому

$$r_{1-}(h) \int\limits_{(-\infty, -a]} e^{hy} d\theta_1(y) = O(h), \quad h \to 0. \tag{16}$$

Обратимся к последнему слагаемому в (15). Имеем

$$r_{z+}(\lambda) = r_{z+}(\lambda_+(z)) + r'_{z+}(\lambda_+(z))(\lambda - \lambda_+(z)) + \ldots = r'_{z+}(\lambda_+(z))(\lambda - \lambda_+(z)) + \ldots.$$

Отметим, что в силу аналитичности функции $r_{z+}(\lambda)$ по λ значения ее производных равномерно ограничены при всех значениях $\lambda_+(z)$. Поэтому при $h \to 0$ будем иметь

$$r_{1+}(0) = -h r'_{1+}(h) + O(h^2).$$

В силу оценки, содержащейся в лемме 2, имеем

$$\left| \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y) \right| \leq C_2,$$

то есть при $\lambda = 0$ и $h \to 0$

$$\lim_{z\to1} r_{z+}(0) \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y) = O(h). \tag{17}$$

В итоге получаем из (15)–(17) при $h \to 0$

$$\mathbf{P}(N \geq 1) = d(h)\, e^{-h(a+b)} + O(h).$$

Сделаем теперь индуктивное предположение: пусть для некоторого $k \geq 1$ выполнено

$$\mathbf{P}(N \geq k) = \lim_{z\to1}((BA)^k e)(z,0) = d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h). \tag{18}$$

Покажем, что это соотношение выполняется для $k+1$. Для этого с помощью лемм 1 и 2 будем исследовать асимптотику при $h \to 0$ выражений вида $(Ag)(z,\lambda)$ и $(BAg)(z,\lambda)$, если $g(z,\lambda) = ((BA)^k e)(z,\lambda)$.

Как следует из (6), функция g такого вида является двойным преобразованием над распределением пары $(\tau_k^+, S_{\tau_k^+})$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(z,\lambda) = \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y} dG_1(y), \qquad (BAg)(z,\lambda) = \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dG_2(y),$$

величины $\int_{-\infty}^{\infty} |dG_i(y)|$ ограничены равномерно по z, $k \geq 1$ и, разумеется, по ε.

Итак, опять в силу лемм 1 и 2

$$((BA(BA)^k)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} \times$$

$$\times \left(u(z,\lambda_+(z))\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} (BA)^k(z,\lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y} d\theta_z^{(k)}(y) \right) +$$

$$+ r_{z+}(\lambda) \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} d\varphi_z^{(k)}(y).$$

Здесь функция $\theta_z^{(k)}$ возникает вследствие применения леммы 1 к функции $g(z,\lambda) = ((BA)^k e)(z,\lambda)$, а функция $\varphi_z^{(k)}$ — в результате применения леммы 2 к функции $g(z,\lambda) = (A(BA)^k e)(z,\lambda)$.

Как и в (16) и (17), имеем равномерно по k и по z, близким к единице,

$$r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y} d\theta_z^{(k)}(y) = O(h), \quad h \to 0,$$

а также

$$r_{z+}(0) \int\limits_b^\infty d\varphi_z^{(k)}(y) = O(h).$$

Поэтому в соответствии с индуктивным предположением

$$\mathbf{P}(N \geq k+1) = \lim_{z\to1}((BA(BA)^k)(z,0) = \lim_{z\to1} v(z,0) u(z,\lambda_+(z))\, e^{-\lambda_+(z)b + (\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a} \times$$

$$\times\Bigg((BA)^k(z,\lambda_+(z))+r_{z-}(\lambda_+(z))\int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y}d\theta_z^{(k)}(y)\Bigg)+r_{z+}(\lambda)\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}d\varphi_z^{(k)}(y)$$
$$= d(h)e^{-h(a+b)}\big(d^k(h)\,e^{-kh(a+b)}+O(h)\big)+O(h)$$
$$= d^{(k+1)}(h)e^{-(k+1)h(a+b)}+O(h).$$

Тем самым установлена справедливость формулы (18) для всех $k\ge 1$. Из нее выводим при $t=kh$

$$\mathbf{P}(h\,N\ge t)=d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)}+O(h),$$

и далее, применяя формулу (12), получаем

$$\log d^{t/h}(h)=\frac{t}{h}\log(1-\rho h+O(h^2))=-\rho t+O(h),\quad h\to 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2 *Пусть выполнено условие (A). Тогда для $t\ge 0$*

$$\mathbf{P}\Big(hN\ge t\Big)=e^{-t(\rho+a+b)}+O(h),\qquad h\to 0. \tag{19}$$

Напомним, что $O(h)=O(\varepsilon)$ и запишем (8) в виде

$$h=2\varepsilon/\sigma^2+O(\varepsilon^2),\qquad \varepsilon\to 0.$$

Тогда (19) можно переписать:

$$\mathbf{P}\bigg(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}(1+O(\varepsilon))N\ge t\bigg)=\mathbf{P}\bigg(\frac{2\varepsilon}{\sigma^2}N\ge\frac{t}{1+O(\varepsilon)}\bigg)=e^{-t(\rho+a+b)}+O(\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0.$$

Отсюда следует (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что $\rho(\varepsilon)\to\rho(0)$ в условиях теоремы 1. Действительно, функции распределения

$$\mathbf{P}(\chi_+^k(\varepsilon)<x\ ;\ \eta_+(\varepsilon)<\infty)\quad\text{и}\quad \mathbf{P}(|\chi_-|^k(\varepsilon)<x),\qquad k=1,2,$$

при $\varepsilon\to 0$ слабо сходятся соответственно к

$$\mathbf{P}(\chi_+^k(0)<x\ ;\ \eta_+(0)<\infty)\quad\text{и}\quad \mathbf{P}(|\chi_-|^k(0)<x),$$

это следует из [16, теорема 1]. Для сходимости моментов этих распределений достаточно убедиться, например, в наличии равномерных по ε мажорант для соответствующих моментов порядка $k+1$. Здесь помогут неравенство А. Могульского [16, теорема 2]

$$\mathbf{E}\,|\chi_-|^{k+1}(\varepsilon)\le\frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{\mathbf{E}\,|X|^{k+3}}{\mathbf{E}\,|X|^2},$$

правая часть которого ограничена равномерно по ε, и оценка [3, гл. 4, теорема 10]

$$\mathbf{P}(\chi_+(\varepsilon)\ge x\mid\eta_+(\varepsilon)<\infty)\le c_1\mathbf{P}(X\ge x)+c_2\int\limits_x^\infty\mathbf{P}(X\ge t)dt,$$

которая влечет равномерную по ε оценку для $\mathbf{E}(\chi_+^{k+1}(\varepsilon)\mid\eta_+(\varepsilon)<\infty)$. В этом неравенстве константы c_1 и c_2 равномерно ограничены по ε.

Список литературы

[1] С.В. Нагаев, *Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения*, Теория вероятн. и ее примен., **16:**1 (1971), 140–148.

S.V. Nagaev, *An estimate of the convergence rate for the absorption probability*, Theory Probab. Appl., **16**:1 (1971), 147–154.

[2] Боровков А.А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. Сибирский математический журнал, 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.

A.A. Borovkov, *New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms*, In: Select. Transl. Math. Statist. Probab., **5** (1965), 315–372.

[3] Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976.

[4] Дж.Л. Дуб. Вероятностные процессы. Изд-во иностранной литературы, М., 1956.

J.L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley and Sons, NY, 1953.

[5] Лотов В.И., Львов А.П. Неравенства для числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016, т.16, № 4, с. 65–71.

V.I. Lotov and A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Mathematical Sciences, **230**:1 (2018), 112–117.

[6] Лотов В.И., Орлова Н.Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Математический сборник. 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.

V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Sbornik: Mathematics, **194**:6 (2003), 927–939.

[7] Лотов В.И. Об одном подходе в двуграничных задачах. Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева. Москва, 1989, с. 117–121.

V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121.

[8] Лотов В. И. О предельном поведении распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 347–354.

V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54**:2 (2013), 265–270.

[9] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 822–842.

V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., 2004, **45**:4 (2004), 680–698.

[10] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова. Сибирский матем. журнал, 2006, т. 47, № 6, 1303–1322.

V.I. Lotov and N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by a Markov-modulated random walk*, *Siberian Math. J.*, **47**:6 (2006), 1066–1083.

[11] В.И. Лотов. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. Сибирский математический журнал, 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.

V.I. Lotov, *Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Math. J., **40**:5 (1999), 925–937.

[12] J.H.B. Kemperman, *A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary*, Ann. Math. Statist., **34**:4 (1963), 1168–1193.

[13] Лотов В. И. Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала. Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1982. Т. 1: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. С. 18—25.

V.I. Lotov, *The asymptotic behavior of distributions connected with the exit of a nondiscrete random walk from an interval*, Limit theorems of probability theory and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics, **1** (1982), Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 18–25.

[14] А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, URSS, М., 2021.

A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

[15] В.И. Лотов. О свойствах факторизационных операторов в граничных задачах для случайных блужданий. Изв. РАН. Сер. матем., 83:5 (2019), 149–166.

V.I. Lotov, *Properties of factorization operators in boundary crossing problems for random walks*, Izv. Math., **83**:5 (2019), 1050–1065.

[16] А.А. Могульский. Абсолютные оценки для моментов некоторых граничных функционалов. Теория вероятностей и её применения, 18:2 (1973), 350–357.

A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, Theory Probab. Appl., **18**:2 (1973), 340–347.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru