О Т З Ы В — 1

на работу В.И. Лотова
"О переходных явлениях в одной граничной задаче
для случайных блужданий "

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0 \qquad \text{и} \qquad 0 < \sigma^2 := \mathbf{E}Y^2 < \infty. \tag{a}$$

Для любого действительного числа ε введем случайные величины:

$$X_k(\varepsilon) := Y_k - \varepsilon \quad \text{и} \quad S_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} X_k(\varepsilon), \quad k, n = 1.2.\ldots. \tag{b}$$

Для некоторых действительных чисел $-a < 0 < b$ рассмотрим полосу $-a < y < b$ на координатной плоскости точек (x, y). Введем случайную величину $N(\varepsilon)$, равную числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n, S_n(\varepsilon)), n = 0, 1, 2, \ldots, \}$, где $S_0(\varepsilon) = 0$.

Цель рецензируемой работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $0 < \varepsilon \to 0$. Оказывается (см. теорему 2), что при некоторых дополнительных предположениях величина $\varepsilon N(\varepsilon)$ имеет в пределе показательное распределение с параметрами, имеющими ясный вероятностный смысл. А в теореме 1, при других дополнительных предположениях, получена оценка $O(\varepsilon)$ для точности такой аппроксимации.

А. Первые замечания

Дочитав данную статью до теоремы 2, я обнаружил в ней ряд непродуманных мест.

Вывод 1. Статья требует серьёзной редакционной правки.

Ниже я отмечу несколько моментов, которые мне не понравились в первую очередь.

А1. В 5-й строке сверху на стр. 12 работы встречается выражение

$$\varepsilon_n \to \infty \ \text{ и } \ \delta_n \to \infty.$$

Конечно, здесь вместо $\varepsilon, \delta \to \infty$ надо использовать другие буквы, поскольку люди привыкли к тому, что в математике обычно $\varepsilon, \delta \to 0$.

А2. Всюду в работе основной параметр $m \to 0$ при условии, что $m > 0$. На мой взгляд, здесь было бы лучше использовать другую букву вместо m, которая часто обозначает натуральные числа. Чтобы не запутаться самому, вместо $m \to 0$ в настоящем отзыве я постоянно использую $0 < \varepsilon \to 0$.

А3. Между формулами (2) и (3) в работе вводятся важные обозначения η_+ и η_-. Их легко спутать с ещё более важным обозначением η, которое вводится на стр. 1. По этой причине в данном отзыве вместо η я использую обозначение $N(\varepsilon)$.

B. О зависимости обозначений от основного параметра ε

В рецензируемой статье последовательно проводится линия не указывать зависимость используемых обозначений от основного параметра ε. Возможно, в некоторых местах доказательства теоремы 1 (до которых я так и не добрался) это оправдано. Однако эта линия неоправданно затрудняет понимание основных результатов и делает невозможным разбор ключевых доказательств.

Вывод 2. Я не разбирал доказательство теоремы 1. Однако в остальных местах работы обязательно нужно указывать зависимость от ε у всех тех величин, которые от этого ε зависят.

B1. В теореме 2 автор предполагает, что "функция распределения $F(y) = P(X < y)$ непрерывна". Похоже автор здесь забыл, что $X = X(\varepsilon)$ есть функция от $\varepsilon \to 0$. Тем самым условие "функция распределения $F(y) = P(X < y)$ непрерывна" некорректно, поскольку здесь накладывается ограничение на класс функций, зависящий от ε.

Естественней наложить условия на функцию распределения $P(Y < y)$.

B2. После формулировок лемм 1 и 2 написано, что "в формулировках этих лемм участвуют константы K_1 и K_2, значения которых определяются свойствами компонент факторизации". Однако эти компоненты факторизации определяются по распределению величины $X = X(\varepsilon)$, которое зависит от $\varepsilon \to 0$. Значит величины $K_i = K_i(\varepsilon)$ сами будут функциями от $\varepsilon \to 0$. Естественным образом возникают вопросы: правомерно ли в этом случае величины $K_i = K_i(\varepsilon)$ называть константами и проходит ли доказательство теоремы 1 в случае, когда $K_i(\varepsilon) \to \infty$ при $0 < \varepsilon \to 0$?

B3. О доказательстве теоремы 2. В 7-й строке сверху на стр. 12 работы написано: " Ясно, что F_n слабо сходится к F." Но здесь $F = F(\varepsilon)$, как уже отмечено выше в замечании B1. То есть молчаливо предполагается, что здесь параметр $\varepsilon > 0$ не зависит от $n \to \infty$. В этом случае можно согласиться с почти очевидностью последнего утверждения в доказательстве теоремы 2: "Сходимость $\rho_n = \rho_n(\varepsilon) \to \rho_0 = \rho_0(\varepsilon)$ следует из [16, Теорема 1]." — Однако этот факт вовсе не доказывает теорему 2.

В гипотетическом исправленном доказательстве теоремы 2 (если в нём идти по предложенному автором пути), нужно предполагать, что $0 < \varepsilon_n \to 0$. В этом случае придётся существенно переделать всё нынешнее доказательство теоремы 2. А самое простое, без чего не обойтись: аккуратно объяснить каким образом сходимость $\rho_n = \rho_n(\varepsilon_n) \to \rho_0 = \rho(0+)$ следует из [16, Теорема 1].

C. О структуре вводных разделов

Вывод 3. На мой взгляд, основные результаты статьи нетрудно сделать доступными более широкому кругу читателей.

C1. Не надо вводить в терминах величины $X = X(\varepsilon)$ обозначения и условия, которые легче выразить в терминах более просто устроенной величины Y.

Во-первых, занумеровать условие (a) из отзыва, использовать его в качестве самого первого предположения в теоремах 1 и 2, и не повторять неуклюжие ограничения на $\mathbf{E}X$. Во-вторых, переписать условие (A_2) в классическом виде:

$$\mathbf{E}e^{\gamma Y} + \mathbf{E}e^{-\gamma Y} < \infty \qquad \text{для некоторого} \qquad \gamma > 0. \tag{c}$$

В-третьих, заменить $m_2 = \mathbf{E}X^2$ на $\sigma^2 = \mathbf{E}Y^2$ по крайней мере в формуле (4).

C2. Все обозначения и формулы, которые вредны для понимания теорем 1 и 2, надо переставить после этих теорем, туда где они нужны.

Во-первых, формула (1) не нужна для понимания теорем 1 и 2, поскольку у нас существует среднее. Во-вторых, приводимые после этой формулы (1) моменты остановки нам понадобятся только перед теоремой 3, куда и надо перенести их определение. Аналогично, все рассуждения про корни, приводимые после условия (A_2), понадобятся только в начале раздела 3, куда их и перенести. Наконец, лишь при $t = 0$ нам нужны в теоремах 1 и 2 все те основные обозначения, которые сейчас вводятся между формулами (2) и (3).

C3. На мой взгляд, раздел 2 лучше начать с основных обозначений при $t = 0$. Действительно, чтобы ввести важное обозначение $\rho(\varepsilon)$, нам достаточно определить при $t = 0$ величины $\eta_\pm = \eta_\pm(\varepsilon)$ и $\chi_\pm = \chi_\pm(\varepsilon)$.

После этого можно сразу сформулировать более простую теорему 2. Затем нужно ввести условие (c) и привести теорему 1, оставив в ней только основное утверждение (4).

Таким образом, $\rho(\varepsilon)$ — это единственное относительно сложное обозначение, которое понадобится чтобы сформулировать теоремы 1 и 2. Поэтому описанный в предыдущих абзацах подход сделает эти теоремы доступными для широкого круга читателей.

C4. После этого можно, в качестве следствия или замечания, привести дополнительное утверждение (3) из теоремы 1. Перед этим нужно ввести простой эквивалент условия (2). Например, можно ввести аналитическую на $(-\gamma, \gamma)$ функцию

$$\epsilon(h) := \frac{1}{h} \log \mathbf{E}e^{hY} \sim \frac{\sigma^2 h}{2} \qquad \text{при} \qquad h \to 0, \tag{2}$$

которая определена и строго возрастает на $[-\gamma, \gamma]$. В этом случае формула (3) верна при $\rho = \rho(\epsilon(h))$, в то время как (4) справедлива при $\rho = \rho(\varepsilon)$.

C5. В статье есть и другие непродуманные моменты. Однако я надеюсь, что при переделке работы автор сам их найдёт и исправит.

30.06.2024 Рецензент