УДК 519.21

О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий [1]

В.И. Лотов

Аннотация

Доказаны предельные теоремы для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания с малым сносом.

Ключевые слова: предельные теоремы, граничные задачи для случайных блужданий, факторизационный метод, число пересечений полосы, переходные явления.

1 Введение. Постановка задачи

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbf{E}Y = 0$, $\mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 > 0$. Введем новую последовательность

$$X = Y - m, \quad X_k = Y_k - m, \quad k \geq 1,$$

и пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение число пересечений полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$. Известно, что число пересечений конечно с вероятностью единица, если сходится один из рядов

$$\sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n > 0) < \infty \qquad \text{или} \qquad \sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n < 0) < \infty, \tag{1}$$

для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathbf{E}X \neq 0$. К примеру, если сходится первый из рядов (1), то траектория случайного блуждания уходит вниз, и с вероятностью единица максимум частных сумм конечен, а нижняя грань последовательности частных сумм равна $-\infty$.

Определим моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ \colon S_n \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- \colon S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$.

Пусть выполнено (1). Введем случайную величину η, равную числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n, S_n), n \geq 0\}$. Очевидно, $\mathbf{P}(\eta \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины η при условии, что $\mathbf{E}X = -m < 0$, $m \to 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2022-0010).

вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассмотреть схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания. На этом пути в [1] найдена асимптотика вероятности поглощения в задаче с двумя прямолинейными границами. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено огромное число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А.А. Боровковым [2] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Еще один возможный метод асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см., например, [3, §24] и библиографические замечания там.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящено значительное число публикаций. Начнем перечисление с известного неравенства Дуба для полумартингалов [4, гл. 7, теорема 3.3]. Оценки в виде неравенств для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания найдены в [5]. Точные формулы для распределения случайной величины η изучались в [6] для целочисленных случайных блужданий с геометрическими распределениями скачков на полуосях. В [7] приведены представления вероятностей $\mathbf{P}(\eta \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\mathbf{E}\exp\{\lambda X\}$, там же установлено асимптотическое поведение этой вероятности при условии, что полоса безгранично расширяется и выполнено условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания. В [8] найдены асимптотические представления для $\mathbf{P}(\eta \geq k)$ при других ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания. В условиях Крамера при $\mathbf{E}X = 0$ для распределения числа пересечений полосы на конечном неограниченно растущем интервале времени в [9] найдены полные асимптотические разложения, если ширина полосы растет согласованно с рассматриваемым интервалом времени. Аналоги этих результатов найдены также для блужданий, заданных на цепи Маркова [10].

Ясно, что общее число пересечений полосы будет неограниченно возрастать, если устремить к нулю снос случайного блуждания. Предельное распределение числа пересечений полосы при сходимости к нулю сноса получено в [6] для целочисленных случайных блужданий с двусторонним геометрическим распределением скачков. В настоящей работе будут получены аналогичные результаты для других, весьма широких классов случайных блужданий. Исследование будет проводиться с использованием разработанной ранее факторизационной техники.

2 Формулировка основного результата

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda Y}$, $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda X} = \psi(\lambda)\, e^{-\lambda m}$, и пусть $\mathbf{E}X = -m < 0$. Введем в рассмотрение условие (A), включающее следующие два пункта.

(A_1) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A_2) Для некоторого $\gamma > 0$ $|\psi(\lambda)| < \infty$ при $|\mathrm{Re}\lambda| \le \gamma$ и $\psi(\gamma) > 1$.

При выполнении условия (A_2) функция $\varphi(\lambda)$ на интервале $-\gamma \le \lambda \le \gamma$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) < 0$. При некотором $\delta > 0$ и при всех достаточно малых m выполняется также неравенство

$$z\varphi(\gamma) = z\psi(\gamma)e^{-\gamma m} > 1, \qquad z \in [1-\delta, 1].$$

Поэтому функция $1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\psi(\lambda)\, e^{-\lambda m}$ имеет ровно два вещественных нуля $\lambda_\pm(z)$, $z \in [1-\delta, 1]$, $\lambda_-(z) \le \lambda_+(z)$. Из условий (A_2) и $\mathbf{E}X < 0$, очевидно, следует $\lambda_-(1) = 0$, $h := \lambda_+(1) > 0$. Нули $\lambda_\pm(z)$ будут играть важную роль в последующих рассмотрениях.

Пусть $m_k = \mathbf{E}X^k$, $m = -m_1 > 0$. Числа h и m стремятся к нулю одновременно. Действительно, из разложения

$$1 = \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(0) + \dots = 1 - hm + \frac{h^2}{2}m_2 + \dots$$

следует

$$m = \frac{m_2}{2}\, h + o(h) = \frac{\sigma^2 + m^2}{2}\, h + o(h), \quad h \to 0. \tag{2}$$

Это означает также, что величина $o(1)$ при $h \to 0$ одновременно есть $o(1)$ при $m \to 0$ и наоборот.

Положим для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta_+(t) = \min\{n \ge 1 :\ S_n \ge t\}, \qquad \eta_-(t) = \min\{n \ge 1 :\ S_n \le t\},$$

$$\chi_\pm(t) = S_{\eta_\pm(t)}, \qquad \eta_\pm = \eta_\pm(0), \qquad \chi_\pm = \chi_\pm(0),$$

$$\rho = \rho(m) = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}, \qquad \rho_0 := \lim_{m\to 0} \rho(m).$$

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1 *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$ *и выполнено условие* (A)*. Тогда для* $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(h\,\eta \ge t) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(h), \qquad h \to 0, \tag{3}$$

и одновременно

$$\mathbf{P}\left(\frac{2m}{m_2}\,\eta \ge t\right) = e^{-t(\rho+a+b)} + O(m), \qquad m \to 0. \tag{4}$$

Здесь $h > 0$ *— корень уравнения* $\varphi(\lambda) = 1$.

Теорема 2 *Предположим, что функция распределения* $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$ *непрерывна и содержит абсолютно непрерывную компоненту в некоторой окрестности нуля, и по-прежнему* $\mathbf{E}X = -m < 0$*. Тогда*

$$\lim_{m\to 0} \mathbf{P}\left(\frac{2m}{\sigma^2}\,\eta \ge t\right) = e^{-t(\rho_0+a+b)}. \tag{5}$$

3 Предварительные сведения

Для последующего доказательства нам потребуется ряд сведений из [2], [11].

Пусть для $|z| \le 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$,

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm} \exp\{\lambda\chi_\pm\};\ \eta_\pm < \infty\right). \tag{6}$$

Хорошо известно следующее представление (факторизация Винера–Хопфа):

$$r_{z+}(\lambda) r_{z-}(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda), \quad |z| \le 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0. \tag{7}$$

При выполнении условия (A_2) факторизационное тождество (7) справедливо и в более широкой области $-\gamma \le \mathrm{Re}\lambda \le \gamma$. Функция $r_{z+}(\lambda)$ является аналитической по λ при $\mathrm{Re}\lambda < \gamma$, $|z| \le 1$. Аналогичным свойством в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > -\gamma$ обладает $r_{z-}(\lambda)$. Для функций $r_{z\pm}(\lambda)$ известны и другие формулы. Нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ распределяются между компонентами факторизации следующим образом:

$$r_{z+}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0.$$

Функции $\lambda_\pm(z)$ могут быть также аналитически продолжены в некоторую окрестность отрезка $[1-\delta, 1]$. При этом $\lambda_\pm(z)$ по-прежнему остаются нулями функции $1 - z\varphi(\lambda)$. Эти и ряд других используемых в дальнейшем сведений подробно изложены в [2].

Обозначим через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{8}$$

Как и в [13], введем операторы A и B следующим образом.

Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\left[r_{z-}^{-1}(\lambda) g(\lambda)\right]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\left[r_{z+}^{-1}(\lambda) g(\lambda)\right]^{[b,\infty)},$$

где принято обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y)\right]^D = \int_D e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Если выполнено условие (A_1) и $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$, то функции $r_{z\pm}^{-1}(\lambda)$ также допускают представления вида (8) (см. [2]). Функция g в этом определении может зависеть от z. Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z, но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Область допустимых значений z и λ в этом определении может быть расширена, если это позволяют сделать представления вида (8) для функций $r_{z\pm}^{\pm 1}(\lambda)$.

Известно ([12], [13]), что введенные операторы позволяют выразить через них двойные преобразования над совместными распределениями пар $\left(\eta_+(b),\ S_{\eta_+(b)}\right)$ и $\left(\eta_-(-a),\ S_{\eta_-(-a)}\right)$, а именно:

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_-(-a)} \exp\{\lambda S_{\eta_-(-a)}\};\ \eta_-(-a) < \infty\right) = (Ae)(z,\lambda), \quad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\lambda \ge 0,$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\eta_+(b)}\exp\{\lambda S_{\eta_+(b)}\};\ \eta_+(b)<\infty\right)=(Be)(z,\lambda),\qquad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\lambda\le 0,$$

здесь принято обозначение $e(\lambda)=e(z,\lambda)\equiv 1$.

Кроме того, в [7] установлен более общий результат, состоящий в следующем. Для произвольного момента остановки $\nu\ge 0$ (возможно, несобственного) на событии $\{\nu<\infty\}$ вводятся случайные величины

$$\nu_+(b)=\inf\{n\ge\nu:\ S_n\ge b\},\qquad \nu_-(-a)=\inf\{n\ge\nu:\ S_n\le -a\}.$$

Отличие от предыдущих рассмотрений состоит в том, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки ν. Эта конструкция потребуется при рассмотрении числа пересечений полосы снизу вверх. Действительно, пересечения полосы формируются следующим образом: мы должны сначала обеспечить в момент τ_1^- достижение нижней границы траекторией, начинающейся в нуле, после чего рассматриваем следующую часть траектории, которая уже начинается в случайный момент τ_1^-. Эта часть траектории должна далее достигнуть впервые верхнюю границу полосы в момент времени τ_1^+, который затем является стартовой точкой для последующей части траектории, идущей к нижней границе, и т.д.

Пусть

$$g(z,\lambda)=\mathbf{E}(z^\nu\exp\{\lambda S_\nu\};\ \nu<\infty).$$

Следующее утверждение получено в [7].

Теорема 3 *Для* $|z|<1$ *и* $\mathrm{Re}\lambda=0$ *справедливо*

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_-(-a)}\exp\{\lambda S_{\nu_-(-a)}\};\ \nu_-(-a)<\infty\right)=(Ag)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\nu_+(b)}\exp\{\lambda S_{\nu_+(b)}\};\ \nu_+(b)<\infty\right)=(Bg)(z,\lambda).$$

Применяя эту теорему, сразу же получаем при $|z|<1$ и $\mathrm{Re}\,\lambda=0$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^-}\exp\{\lambda S_{\tau_1^-}\};\tau_1^-<\infty\right)=(Ae)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_1^+}\exp\{\lambda S_{\tau_1^+}\};\tau_1^+<\infty\right)=(BAe)(z,\lambda),$$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_2^-}\exp\{\lambda S_{\tau_2^-}\};\tau_2^-<\infty\right)=(ABAe)(z,\lambda),$$

и так далее, то есть при любом $k\ge 1$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+}\exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\};\tau_k^+<\infty\right)=((BA)^k e)(z,\lambda),\tag{9}$$

здесь степень оператора понимается как суперпозиция. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\eta\ge k)=\mathbf{P}(\tau_k^+<\infty)=\lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0).\tag{10}$$

Равенство (10) также отмечено в [7], и это соотношение будет основой для дальнейших рассмотрений.

Асимптотическое поведение операторов A и B при $a\to\infty$ и $b\to\infty$ соответственно исследовано в [13], [11]. Приведем нужные нам следствия из вспомогательных лемм в [11], предполагая выполненным условие (A) и $\mathbf{E}X<0$. Для наших целей достаточно будет ограничиться рассмотрением вещественных значений $z\in(1-\delta,1)$ при некотором малом $\delta>0$.

Лемма 1 *Для любой функции* $g(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} dG(y) \in \Pi$ *при некотором* $\delta > 0$ *имеет место представление*

$$Ag(z,\lambda) = u_z(\lambda)\, e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a} g\big(\lambda_-(z)\big) + r_{z-}(\lambda) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y} d\theta_z(y), \quad z \in (1-\delta,1), \ \mathrm{Re}\lambda \geq 0,$$

в котором $u_z(\lambda) = r_{z-}(\lambda)\Big(\big(\lambda - \lambda_-(z)\big) r'_{z-}\big(\lambda_-(z)\big)\Big)^{-1}$, *и при некотором* $K_1 > 0$

$$\int\limits_{(-\infty,-a]} |d\theta_z(y)| \leq K_1 \int\limits_0^\infty |dG(y)|$$

равномерно по $z \in (1-\delta, 1)$.

Лемма 2 *Для всякой функции* $g(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\lambda y} dG(y) \in \Pi$ *при некотором* $\delta > 0$ *имеет место представление*

$$Bg(z,\lambda) = v_z(\lambda)\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} g(\lambda_+(z)) + r_{z+}(\lambda) \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} d\varphi_z(y),$$

в котором

$$v_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda) \left(\big(\lambda - \lambda_+(z)\big) r'_{z+}\big(\lambda_+(z)\big)\right)^{-1}, \quad z \in (1-\delta,1), \ \mathrm{Re}\lambda \leq h.$$

Функция φ_z *при некотором* $K_2 > 0$ *удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_b^\infty |d\varphi_z(y)| \leq K_2 \int\limits_{(-\infty,0]} |dG(y)|$$

равномерно по $z \in (1-\delta, 1)$.

В формулировках этих лемм участвуют константы K_1 и K_2, значения которых определяются свойствами компонент факторизации и не зависят от функции g.

Приведенные в этих леммах представления помогут ниже установить асимптотику распределения числа пересечений полосы при малых значениях сноса блуждания.

4 Доказательства теорем 1-2

Доказательства основываются на использовании компонент факторизации (7), формул (9) и (10), а также на свойствах операторов A и B, содержащихся в леммах 1 и 2. Везде предполагается, что $z \in (1-\delta, 1)$ для некоторого малого числа $\delta > 0$, согласующегося с утверждениями лемм.

Рассмотрим сначала случайное блуждание простейшего вида. Предположим, что

$$\mathbf{P}(X \geq t) = q \exp\{-\alpha t\}, \quad t \geq 0,$$
$$\mathbf{P}(X < t) = r \exp\{\beta t\}, \quad t < 0, \quad r + q = 1, \quad \mathbf{E}\, X < 0, \tag{11}$$

то есть распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным. В этой ситуации компоненты факторизации (7) могут быть найдены в явном виде. Легко вычислить, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{r\beta}{\lambda+\beta} + \frac{q\alpha}{\alpha-\lambda} = \frac{r\beta(\alpha-\lambda)+q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

и нахождение нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ сведется к решению квадратного уравнения. При $z < 1$ корень $\lambda_-(z)$ будет отрицательным, а $\lambda_+(z)$ — положительным.

$$1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\,\frac{r\beta(\alpha-\lambda)+q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)} = \frac{(\lambda-\lambda_-(z))(\lambda-\lambda_+(z))}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)},$$

то есть

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_{z-}(\lambda)R_{z+}(\lambda), \tag{12}$$

где обозначено

$$R_{z-}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\beta} \qquad R_{z+}(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda}.$$

При $z < 1$ функция $R_{z+}(\lambda)$ аналитична в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$ и ограничена на границе, функция $R_{z-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости и обе они не обращаются в ноль в упомянутых областях своей аналитичности. Любое представление вида (12) при $\mathrm{Re}\lambda = 0$ с такими свойствами компонент называется канонической факторизацией ([14, гл. 12]) и его компоненты определяются однозначно с точностью до множителя, возможно зависящего от z. Представление (7) тоже являет собой каноническую факторизацию при $|z| < 1$. Это означает, что при некотором множителе $c = c(z)$ имеет место

$$R_{z+}(\lambda) = cr_{z+}(\lambda), \quad R_{z-}(\lambda) = c^{-1}r_{z-}(\lambda).$$

Устремляя $\lambda \to \infty$ в определении $r_{z-}(\lambda)$, убеждаемся, что в данном случае должно выполняться $c(z) \equiv 1$.

Нетрудно вычислить, что в наших условиях $h = -\alpha\beta\,\mathbf{E}X$.

Как следует из доказательств лемм 1 и 2 в [11], для случайных блужданий с условием (11) в формулировках этих лемм остаточные члены в представлениях для $(Ag)(z,\lambda)$ и $(Bg)(z,\lambda)$ будут отсутствовать, поэтому простыми вычислениями убеждаемся, что

$$u(z,\lambda) = \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda+\beta}, \qquad (Ag)(z,\lambda) = u(z,\lambda)g(\lambda_-(z))e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$

$$v(z,\lambda) = \frac{\alpha-\lambda_+(z)}{\alpha-\lambda}, \qquad (Bg)(z,\lambda) = v(z,\lambda)g(\lambda_+(z))\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}.$$

Таким образом, в соответствии с леммами 1 и 2,

$$(Ae)(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a},$$

$$(BAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

$$(ABAe)(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

$$(BABAe)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a}\times$$

$$\times v(z,\lambda_-(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))b}u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a},$$

и так далее. Напомним, что $\lambda_-(1)=0$, $\lambda_+(1)=h>0$. Пусть $H(z)=v(z,\lambda_-(z))\,u(z,\lambda_+(z))$, тогда для любого $k\ge 1$

$$\mathbf{P}(\eta\ge k)=\lim_{z\to1}((BA)^k e)(z,0)=d^k(h)\,e^{-kh(a+b)}=\mathbf{P}(h\,\eta\ge kh),$$

где обозначено

$$d(h):=H(1)=v(1,0)\,u(1,h)=\frac{\alpha-h}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta+h}.$$

Полагая $t=kh$, перепишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{P}(h\,\eta\ge t)=d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)}.$$

Остается заметить, что при $h\to0$

$$\log d^{t/h}(h)=\frac{t}{h}\log\left(\frac{\alpha-h}{\alpha}\right)+\frac{t}{h}\log\left(\frac{\beta}{\beta+h}\right)=$$

$$=\frac{t}{h}\log\left(1-\frac{h}{\alpha}\right)+\frac{t}{h}\log\left(1-\frac{h}{\beta+h}\right)=-t\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+O(h).$$

Тем самым получено следующее утверждение.

Предложение 1 *Пусть выполнено* (11)*, тогда при* $h\to0$

$$\mathbf{P}(h\,\eta\ge t)=\exp\left\{-t\left(a+b+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right\}+O(h),\qquad t\ge0.$$

Для того, чтобы перейти теперь к рассмотрению общего случая, охватываемого условием (A), нам потребуется исследовать асимптотику выражений вида $(Ag)(z,\lambda)$ и $(Bg)(z,\lambda)$ при $h\to0$ в условиях лемм 1 и 2.

Итак, пусть выполнено условие (A) и $\mathbf{E}X<0$. Сначала рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(\eta\ge1)=\lim_{z\to1}(BAe)(z,0)$. Имеем в силу указанных лемм

$$Ae(z,\lambda)=u_z(\lambda)\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda)a}+r_{z-}(\lambda)\int\limits_{(-\infty,-a]}e^{\lambda y}d\theta_z(y),$$

$$(BAe)(z,\lambda)=v(z,\lambda)\,e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\times$$

$$\times\Bigg(u(z,\lambda_+(z))\,e^{(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a}+r_{z-}(\lambda_+(z))\int\limits_{(-\infty,-a]}e^{\lambda_+(z)y}d\theta_z(y)\Bigg)+r_{z+}(\lambda)\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}d\varphi_z(y). \tag{13}$$

Обозначим, как и ранее, $H(z)=v(z,\lambda_-(z))\,u(z,\lambda_+(z))$, и пусть

$$d(h)=H(1)=v(1,0)\,u(1,h)).$$

Покажем, что эта величина отделена от нуля при малых h.

Лемма 3 *В условиях теоремы* 1 *при* $h\to0$ *имеет место соотношение*

$$d(h)=1-\rho\,h+O(h^2),\qquad \rho=\frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+<\infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+<\infty)}+\frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}. \tag{14}$$

Доказательство. Запишем разложение функции $r_{z+}(\lambda)$ в точке $\lambda_+(z)$, принимая во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+(z)) = 0$:

$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(z))^2}{2}\, r''_{z+}(\lambda_+(z)) + \dots,$$

откуда следует

$$v(z, \lambda_-(z)) = \frac{r_{z+}(\lambda_-(z))}{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z))} = 1 + \frac{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))\, r''_{z+}(\lambda_+(z))}{2\, r'_{z+}(\lambda_+(z))} + \dots .$$

В связи с тем, что в соответствии с (6)

$$r_{1+}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+\};\ \eta_+ < \infty\right),$$

имеем

$$r'_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty), \qquad r''_{1+}(h) = -\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty),$$

то есть

$$v(1,0) = 1 - \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2 e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+ e^{h\chi_+};\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2) = \frac{h\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + O(h^2). \tag{15}$$

Аналогично получаем

$$r_{z-}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-(z))\, r'_{z-}(\lambda_-(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_-(z))^2}{2}\, r''_{z-}(\lambda_-(z)) + \dots,$$

откуда следует

$$u(z, \lambda_+(z)) = \frac{r_{z-}(\lambda_+(z))}{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\, r'_{z-}(\lambda_-(z))} = 1 + \frac{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))\, r''_{z-}(\lambda_-(z))}{2\, r'_{z-}(\lambda_-(z))} + \dots,$$

$$u(1,h)) = 1 + \frac{h\, r''_{1-}(0)}{2\, r'_{1-}(0)} + \dots = 1 + \frac{h\,\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}\chi_-} + O(h^2). \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует утверждение леммы. □

Теперь из (13) выводим

$$\mathbf{P}(\eta \ge 1) = \lim_{z\to 1}(BAe)(z,0) = d(h)e^{-h(a+b)}$$

$$+v(1,0)e^{-hb} \lim_{z\to 1} r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y} d\theta_z(y) + \lim_{z\to 1} r_{z+}(0) \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y). \tag{17}$$

Проанализируем последние два слагаемых. Здесь

$$r_{z-}(\lambda_+(z)) = r_{z-}(\lambda_-(z)) + r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) + \ldots = r'_{z-}(\lambda_-(z))(\lambda_+(z) - \lambda_-(z)) + \ldots,$$

и при $z = 1$, $h \to 0$

$$r_{z-}(\lambda_+(z)) = hr'_{1-}(0) + O(h^2).$$

Для z, близких к единице,

$$\Big|\int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y} d\theta_z(y)\Big| \le e^{-ha} \int\limits_{(-\infty,-a]} |d\theta_z(y)| \le C_1,$$

где повсюду $C_i > 0$ — некоторые константы. Поэтому

$$r_{1-}(h) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{hy} d\theta_1(y) = O(h), \quad h \to 0. \tag{18}$$

Обратимся к последнему слагаемому в (17). Имеем

$$r_{z+}(\lambda) = r_{z+}(\lambda_+(z)) + r'_{z+}(\lambda_+(z))(\lambda - \lambda_+(z)) + \ldots = r'_{z+}(\lambda_+(z))(\lambda - \lambda_+(z)) + \ldots .$$

Отметим, что в силу аналитичности функции $r_{z+}(\lambda)$ по λ значения ее производных равномерно ограничены при всех значениях $\lambda_+(z)$. Поэтому при $h \to 0$ будем иметь

$$r_{1+}(0) = -h r'_{1+}(h) + O(h^2).$$

В силу оценки, содержащейся в лемме 2, имеем

$$\left| \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y) \right| \le C_2,$$

то есть при $\lambda = 0$ и $h \to 0$

$$\lim_{z \to 1} r_{z+}(0) \int\limits_b^\infty d\varphi_z(y) = O(h). \tag{19}$$

В итоге получаем из (17)–(19) при $h \to 0$

$$\mathbf{P}(\eta \ge 1) = d(h) e^{-h(a+b)} + O(h).$$

Сделаем теперь индуктивное предположение: пусть для некоторого $k \ge 1$ выполнено

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \lim_{z \to 1} ((BA)^k e)(z, 0) = d^k(h)\, e^{-kh(a+b)} + O(h). \tag{20}$$

Покажем, что это соотношение выполняется для $k+1$. Для этого с помощью лемм 1 и 2 будем исследовать асимптотику при $h \to 0$ выражений вида $(Ag)(z,\lambda)$ и $(BAg)(z,\lambda)$, если $g(z,\lambda) = ((BA)^k e)(z,\lambda)$.

Как следует из (9), функция g такого вида является двойным преобразованием над распределением пары $(\tau_k^+, S_{\tau_k^+})$, поэтому в представлениях

$$(Ag)(z,\lambda) = \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda y} dG_1(y), \qquad (BAg)(z,\lambda) = \int\limits_b^\infty e^{\lambda y} dG_2(y),$$

величины $\int_{-\infty}^\infty |dG_i(y)|$ ограничены равномерно по z и $k \ge 1$.

Итак, опять в силу лемм 1 и 2

$$((BA(BA)^k)(z,\lambda) = v(z,\lambda)\, e^{(\lambda - \lambda_+(z))b} \times$$

$$\times \Big(u(z, \lambda_+(z))\, e^{(\lambda_-(z) - \lambda_+(z))a} (BA)^k(z, \lambda_+(z)) + r_{z-}(\lambda_+(z)) \int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z) y} d\theta_z^{(k)}(y) \Big) +$$

$$+r_{z+}(\lambda)\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}d\varphi_z^{(k)}(y).$$

Здесь функция $\theta_z^{(k)}$ возникает вследствие применения леммы 1 к функции $g(z,\lambda)=((BA)^k e)(z,\lambda)$, а функция $\varphi_z^{(k)}$ — в результате применения леммы 2 к функции $g(z,\lambda)=(A(BA)^k e)(z,\lambda)$.

Как и в (18) и (19), имеем равномерно по k и по z, близким к единице,

$$r_{z-}(\lambda_+(z))\int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y}d\theta_z^{(k)}(y)=O(h),\quad h\to 0,$$

а также

$$r_{z+}(0)\int\limits_b^\infty d\varphi_z^{(k)}(y)=O(h).$$

Поэтому в соответствии с индуктивным предположением

$$\mathbf{P}(\eta\ge k+1)=\lim_{z\to 1}((BA(BA)^k)(z,0)=\lim_{z\to 1}v(z,0)u(z,\lambda_+(z))\,e^{-\lambda_+(z)b+(\lambda_-(z)-\lambda_+(z))a}\times$$

$$\times\left((BA)^k(z,\lambda_+(z))+r_{z-}(\lambda_+(z))\int\limits_{(-\infty,-a]} e^{\lambda_+(z)y}d\theta_z^{(k)}(y)\right)+r_{z+}(\lambda)\int\limits_b^\infty e^{\lambda y}d\varphi_z^{(k)}(y)$$

$$=d(h)e^{-h(a+b)}\big(d^k(h)\,e^{-kh(a+b)}+O(h)\big)+O(h)$$

$$=d^{(k+1)}(h)e^{-(k+1)h(a+b)}+O(h).$$

Тем самым установлена справедливость формулы (20) для всех $k\ge 1$. Из нее выводим при $t=kh$

$$\mathbf{P}(h\,\eta\ge t)=d^{t/h}(h)\,e^{-t(a+b)}+O(h),$$

и далее, применяя формулу (14), получаем

$$\log d^{t/h}(h)=\frac{t}{h}\log(1-\rho h+O(h^2))=-\rho t+O(h),\quad h\to 0.$$

Справедливость формулы (3) установлена.

Соотношение (2) можно переписать как

$$h=2m/m_2+o(h),\qquad \frac{m_2}{2m}=\frac{1}{h}+\frac{o(1)}{h},\qquad h\to 0,$$

и это позволяет в условиях теоремы 1 без труда установить утверждение (4) по аналогии с (3). Полагая теперь $t=2mk/m_2$, имеем в силу (20)

$$\mathbf{P}(\eta\ge k)=\mathbf{P}\left(\frac{2m}{m_2}\eta\ge t\right)=d^{\,tm_2/(2m)}(h)\,\exp\left\{-\frac{tm_2h}{2m}(a+b)\right\}+O(h)$$

$$=d^{(t/h)(1+o(1))}\exp\{-t(a+b)(1+o(1))\}+O(h)=e^{-t(\rho+a+b)}+O(h),$$

и остается напомнить, что $O(h)=O(m)$. Теорема 1 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 2. Покажем здесь, что утверждение этой теоремы можно получить без условия (A_2).

Будем предполагать теперь, что функция распределения $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$ непрерывна и содержит абсолютно непрерывную компоненту в некоторой окрестности нуля. Введем последовательность срезанных случайных величин $X^{(n)}$ таких, что $X^{(n)} = X$, если $X \in [-\delta_n, \varepsilon_n]$, и $X^{(n)} = 0$ в противном случае. Числа δ_n и ε_n выбираются такими, что $\delta_n \to \infty$, $\varepsilon_n \to \infty$ и сохраняется $\mathbf{E}\, X^{(n)} = \mathbf{E}\, X = -m$. Такой выбор срезок возможен в силу непрерывности функции F. Обозначим $F_n(y) = \mathbf{P}(X^{(n)} < y)$. Ясно, что F_n слабо сходится к F. Пусть верхний индекс (n) у операторов A и B, у величин ρ, η и m_2 означает, что эти объекты построены по случайному блужданию с распределением скачков F_n. Это блуждание удовлетворяет условиям теоремы 1, в соответствии с которой

$$\mathbf{P}\left(\frac{2m}{m_2^{(n)}}\,\eta^{(n)} \geq t\right) = \exp\{-t(\rho^{(n)} + a + b)\} + O(m), \qquad m \to 0. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\eta^{(n)} \geq k) = \lim_{z\to 1}((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0),$$

и здесь можно воспользоваться следующим утверждением, установленным в [15].

Теорема 4 *Пусть $F_n \Rightarrow F$ и F непрерывна. Пусть последовательность функций $g_n \in \Pi$ такова, что $g_n(\lambda) \to g(\lambda) \in \Pi$, и в представлении (8) функция G непрерывна на множестве $[b, \infty)$. Тогда при $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0$ выполняется*

$$(B^{(n)}g_n)(z, \lambda) \to (Bg)(z, \lambda), \qquad n \to \infty.$$

Если функция G непрерывна на множестве $(-\infty, -a]$, то

$$(A^{(n)}g_n)(z, \lambda) \to (Ag)(z, \lambda), \qquad n \to \infty.$$

Применение этой теоремы влечет при всех $k \geq 1$ и $z \in (1 - \delta, 1)$ соотношение

$$((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0) \to ((BA)^k e)(z, 0), \qquad n \to \infty.$$

Действительно, для $g \in \Pi$ функция $(Ag)(z, \lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$, а $(Bg)(z, \lambda)$ в свою очередь аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$, что с запасом обеспечивает условия непрерывности на функцию g в теореме. Поэтому при $n \to \infty$

$$(A^{(n)}e)(z, 0) \to (Ae)(z, 0),$$

$$((B^{(n)}A^{(n)})e)(z, 0) \to ((BA)e)(z, 0),$$
$$((A^{(n)}B^{(n)}A^{(n)})e)(z, 0) \to ((ABA)e)(z, 0),$$

и т.д. Заметим попутно, что в силу (9) $((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0)$ и $((BA)^k e)(z, 0)$ являются непрерывными неубывающими функциями переменной $z \in (1 - \delta, 1)$, то есть одновременно

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z, 0) = \sup_{z\in(\delta,1)}((BA)^k e)(z, 0),$$

$$\mathbf{P}(\eta^{(n)} \geq k) = \lim_{z\to 1}((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0) = \sup_{z\in(\delta,1)}((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0).$$

Получаем в итоге при $t = 2mk/m_2^{(n)}$

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \sup_{z\in(\delta,1)}((BA)^k e)(z, 0) = \sup_{z\in(\delta,1)}\lim_{n\to\infty}((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z, 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in(\delta,1)} ((B^{(n)}A^{(n)})^k e)(z,0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta^{(n)} \geq k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2m}{m_2^{(n)}}\,\eta^{(n)} \geq t\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\{-t(\rho^{(n)} + a + b)\} = \exp\{-t(\rho_0 + a + b)\},$$

где $\rho_0 = \lim_{n\to\infty} \rho^{(n)}$. Сходимость $\rho^{(n)} \to \rho_0$ следует из [16, Теорема 1].

Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] С.В. Нагаев, *Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения*, Теория вероятн. и ее примен., **16:**1 (1971), 140–148.

S.V. Nagaev, *An estimate of the convergence rate for the absorption probability*, Theory Probab. Appl., **16**:1 (1971), 147–154.

[2] Боровков А.А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. Сибирский математический журнал, 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.

A.A. Borovkov, *New limit theorems in boundary problems for sums of independent terms*, In: Select. Transl. Math. Statist. Probab., **5** (1965), 315–372.

[3] Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976.

[4] Дж.Л. Дуб. Вероятностные процессы. Изд-во иностранной литературы, М., 1956.

J.L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley and Sons, NY, 1953.

[5] Лотов В.И., Львов А.П. Неравенства для числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016, т.16, № 4, с. 65–71.

V.I. Lotov and A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Mathematical Sciences, **230**:1 (2018), 112–117.

[6] Лотов В.И., Орлова Н.Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Математический сборник. 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.

V.I. Lotov, N.G. Orlova, *On the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk*, Sbornik: Mathematics, **194**:6 (2003), 927–939.

[7] Лотов В.И. Об одном подходе в двуграничных задачах. Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева. Москва, 1989, с. 117–121.

V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121.

[8] Лотов В. И. О предельном поведении распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 347–354.

V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54**:2 (2013), 265–270.

[9] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания. Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 822–842.

V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., 2004, **45**:4 (2004), 680–698.

[10] Лотов В.И., Орлова Н.Г. Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова. Сибирский матем. журнал, 2006, т. 47, № 6, 1303–1322.

V.I. Lotov and N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by a Markov-modulated random walk*, *Siberian Math. J.*, **47**:6 (2006), 1066–1083.

[11] В.И. Лотов. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. Сибирский математический журнал, 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.

V.I. Lotov, *Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Math. J., **40**:5 (1999), 925–937.

[12] J.H.B. Kemperman, *A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary*, Ann. Math. Statist., **34**:4 (1963), 1168–1193.

[13] Лотов В. И. Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала. Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1982. Т. 1: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. С. 18—25.

V.I. Lotov, *The asymptotic behavior of distributions connected with the exit of a nondiscrete random walk from an interval*, Limit theorems of probability theory and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics, **1** (1982), Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 18–25.

[14] А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, URSS, M., 2021.

A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

[15] В.И. Лотов. О свойствах факторизационных операторов в граничных задачах для случайных блужданий. Изв. РАН. Сер. матем., 83:5 (2019), 149–166.

V.I. Lotov, *Properties of factorization operators in boundary crossing problems for random walks*, Izv. Math., **83**:5 (2019), 1050–1065.

[16] А.А. Могульский. Абсолютные оценки для моментов некоторых граничных функционалов. Теория вероятностей и её применения, 18:2 (1973), 350–357.

A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, Theory Probab. Appl., **18**:2 (1973), 340–347.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru