S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК ???.?? 517.956.4
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC ??X??35K58

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА-ДИФФУЗИИ С НЕПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ

А. Немдили, Х. Фуджита Яшима

Представлено ???

Abstract: The transport-diffusion equation with a non-constant diffusion coefficient in the whole space $\mathbb{R}^d$ is considered and a family of approximate solutions is defined by using the fundamental solution of the heat equation (heat kernel) and the translation corresponding to transport on each step of time discretization. Under appropriate conditions on the regularity of the date, the uniform convergence of approximate solutions to a function which satisfies the transport-diffusion equation is proved. To estimate and to prove the convergence of approximate solutions, we first estimate and prove the convergence of the "positions" with respect to which we apply the integral operator with the heat kernel. We also improve the convergence of the time derivative of approximate solutions.

Keywords: transport-diffusion equation, non-constant diffusion coefficient, approximation by time discretization, heat kernel.

Nemdili, A., Fujita Yashima, H., On the approximation of the solution of transport-diffusion equation with a non-constant coefficient of diffusion.

Поступила ???, опубликована ???

1 Введение

Как типичное параболическое уравнение, уравнение переноса-диффузии

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = \kappa \Delta u + f \tag{1}$$

изучалось во многих работах в рамках исследования уравнений параболического типа. Как хорошо известно, наличие слагаемого $\kappa\Delta u$ позволяет получить хорошие оценки, как в пространстве Соболева, так и в пространстве Гёльдера, и с помощью этих оценок показывается разрешимость уравнения (1) с рядом условий (см., например, [9, 10, 8]). Напомним также метод стохастического представления решения, т.е. обратного уравнения Колмогорова (см., например, [7], гл. VIII). Использование этого метода позволило охарактеризовать на языке теории вероятностей поведение решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю (см. [3]).

Недавно предложилось также приближение решения уравнения переноса-диффузии, основанное на использовании ядра теплопроводности (фундаментального решения уравнения теплопроводности) и перемещении, соответствующем переносу, на каждом шаге дискретизованного времени, сначала в целом пространстве $\mathbb{R}^d$ (см. [12, 11]), потом в полупространстве с однородным граничным условием Дирихле (см. [2, 5]) и с однородным граничным условием Неймана (см. [6]). Гладкость решения, полученная при оценке этого приближения, ниже, чем полученная другими методами (как в [9]), но это приближение и его оценки позволяют охарактеризовать, прямо на язвке математического анализа, поведение решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю (см. [1, 4]).

В работах [1, 4, 5, 6, 11, 12] рассматривался только коэффициент диффузии κ, не зависящий от $x \in \mathbb{R}^d$, что позволяло избежать сложностей, связанных с зависимостью коэффициента κ от x. В настоящей работе рассматриваем уравнение переноса-диффузии с коэффициентом диффузии $\kappa = \kappa(x)$, зависящим от $x \in \mathbb{R}^d$, и покажем, что приближенные решения, построенные использованием ядра теплопроводности и перемещением, соответствующим переносу, на каждом шаге дискретизованного времени, сходятся к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии и начальному условию в $\mathbb{R}^d$. Чтобы преодолеть сложности, связанные с зависимостью коэффициента κ от x, рассматриваем последовательность положений $X_{k,y}^{n,h}(x)$, по которым вычислится интеграл с ядром теплопроводности в каждом шаге дискретизованного времени. Действительно, как увидим ниже, оценки приближенных решений опираются на оценки $X_{k,y}^{n,h}(x)$, и сходимость приближенных решений опирается на сходимость $X_{k,y}^{n,h}(x)$. Оценки $X_{k,y}^{n,h}(x)$ и доказательство сходимости $X_{k,y}^{n,h}(x)$ требуют значительной разработки. Построение последовательности $X_{k,y}^{n,h}(x)$ и их связь со значениями приближенных решений имеют несколько схожих аспектов со стохастическим представлением решения. Но, в данной работе все рассуждения делаются без использования понятия вероятности.

В данной работе докажем также равномерную сходимость производной справа по t приближенных решений к производной по t решения уравнения. Напомним, что в предыдущих работах доказывалась только сходимость в интегральном смысле производной по t (определенной на $\mathbb{R}_+$, за исключением счетного множества t) приближенных решений к обобщенной производной по t решения уравнения.

В настоящей работе рассматриваем уравнение (1) со слагаемым f, не зависящей от искомой функции u. Нам кажется, что можно обобщить наш результат на случай, когда f зависит от u с естественными условиями. Однако, для этого нам понадобится оценка нового типа. Поэтому в данной работе мы ограничимся случаем, когда f не зависит от u, и будем изучать случай зависимой от u функции f в следующей работе.

2 Определение приближенных решений и основной результат

Определим семейство приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$, $n=1,2,\cdots$, для уравнения

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x)\cdot\nabla u(t,x) = \kappa(x)\Delta u(t,x) + f(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \tag{3}$$

где $\nabla = (\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_d})^T$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$, а $v(t,x)$, $f(t,x)$, $\kappa(x)$ ($\kappa(x)>0$), $u_0(x)$ — заданные функции. Для этого, введем, прежде всего, дискретизацию по времени

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \cdots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \cdots, \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n, \qquad \delta_n = \frac{1}{2^n}, \tag{4}$$

для $n=1,2,\cdots$, и обозначим через $\Theta_n(\cdot)$ ядро теплопроводности для $t=\delta_n$, т. е.

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n)^{d/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{4\delta_n}), \qquad x\in\mathbb{R}^d. \tag{5}$$

Обозначив

$$a(x) = \sqrt{\kappa(x)}, \tag{6}$$

определим приближенные решения $u^{[n]}(t,x)$, $n=1,2,\cdots$, соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]},x) = u_0(x), \tag{7}$$

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x-\delta_n v(t_k^{[n]},x) - a(x)y)dy + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x),$$
$$k=1,2,\cdots, \tag{8}$$

$$u^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]}-t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t-t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]},x)$$
$$\text{при} \quad t_{k-1}^{[n]} \le t \le t_k^{[n]}, \quad k=1,2,\cdots. \qquad (9)$$

Заметим, что (8) эквивалентно формуле

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa(x))^{d/2}} \exp(-\frac{|y|^2}{4\delta_n\kappa(x)})\times$$
$$\times u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x-\delta_n v(t_k^{[n]},x)-y)dy + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x), \quad k=1,2,\cdots. \qquad (10)$$

Эта эквивалентность вытекает непосредственно из замены переменных $y' = a(x)y = \sqrt{\kappa(x)}y$.

Далее будем использовать следующие обозначения

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_j \ge 0.$$

Через $C_b(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать класс непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^d$ функций, а через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d))$ — класс непрерывных на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ и ограниченных на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ при любого $\tau>0$ функций.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $q\in\mathbb{Z}$, $q\ge 1$. Предположим, что*

$$D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q, \qquad (11)$$

$$D_x^\alpha \kappa(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q, \qquad (12)$$

$$D_x^\alpha f(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q, \qquad (13)$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q, \qquad (14)$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q-1, \qquad (15)$$

$$\partial_t D_x^\alpha f(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \le q-1. \qquad (16)$$

Тогда функции $u^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (7)–(9) и их производные $D_x^\alpha u^{[n]}(t,x)$, $|\alpha| \le q-1$, сходятся равномерно на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ соответственно к одной функции $u(t,x)$ и к ее производным $D_x^\alpha u(t,x)$ при $n\to\infty$ для любого $\tau>0$.

Если, кроме того, $q\ge 3$, то производная справа $(\partial_t u^{[n]})_+(t,x)$ функции $u^{[n]}(t,x)$ по t сходятся к $\partial_t u(t,x)$ равномерно на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ при $n\to\infty$ для любого $\tau>0$, причем предельная функция $u(t,x)$ удовлетворяет поточечно уравнению (2) на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ и начальному условию (3) на $\mathbb{R}^d$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, заметим, что можно переписать (8) в более удобный для наших рассуждений вид. Действительно, если пишем y^1 вместо y и вводим обозначение

$$X_{k,y}^{n,1}(x) = x - \delta_n v(t_k^{[n]},x) - a(x)y^1,$$

то можно писать $u^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ в виде

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y^1)u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},X_{k,y}^{n,1}(x))dy^1+\delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x).$$

Функция $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\cdot)$, в свою очередь, может быть выражена через функцию $X_{k,y}^{n,2}(x)$ и так далее. Поэтому, если определяем

$$X_{k,y}^{n,0}(x)=x, \tag{17}$$

$$X_{k,y}^{n,h}(x)=X_{k,y}^{n,h-1}(x)-\delta_n v(t_{k-h+1}^{[n]},X_{k,y}^{n,h-1}(x))-a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))y^h, \quad h=1,\cdots,k \tag{18}$$

(здесь h в обозначении y^h является простом индексом и не обозначает степень), то можно писать $u^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ в виде

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x)=\int_{(\mathbb{R}^d)^k}(\prod_{h=1}^{k}\Theta_n(y^h))u_0(X_{k,y}^{n,k}(x))dy^1\cdots dy^k+$$
$$+\delta_n\sum_{h=1}^{k-1}\int_{(\mathbb{R}^d)^h}(\prod_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'}))f(t_{k-h-1}^{[n]},X_{k,y}^{n,h}(x))dy^1\cdots dy^h+\delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x), \tag{19}$$

где $\int_{(\mathbb{R}^d)^k}\cdots\ dy^1\cdots dy^k$ — это аббревиатура от $\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\ dy^1\cdots dy^k$ и аналогично для $\int_{(\mathbb{R}^d)^h}\cdots\ dy^1\cdots dy^h$. В дальнейшем используем выражение (19) для (8).

3 Оценки производных функций $X_{k,y}^{n,h}(x)$

В этом разделе проведем оценки производных функций $X_{k,y}^{n,h}(x)$, определенных соотношениями (17)–(18).

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18). Предположим, что условия (11)–(12) с $q=1$ выполнены. Тогда для каждого $(\overline{\tau},m)$, $\overline{\tau}>0$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\geq 1$, существует такая независимая от n и k постоянная $K_1=K_1(\overline{\tau},m)$, что, если $t_k^{[n]}\leq\overline{\tau}$, то для любого $i\in\{1,\cdots,d\}$ имеем*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{(\mathbb{R}^d)^h}(\prod_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'}))\Big(\sum_{j=1}^{d}(\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2\Big)^m dy^1\cdots dy^h\leq e^{K_1 h\delta_n}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $t_k^{[n]} \le \overline{\tau}$. Дифференцируя j-ю компоненту двух частей равенства (18) по x_i, получим

$$\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j =$$
$$= \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j - \delta_n \sum_{l=1}^d v'_{j,l}\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l - y_j^h \sum_{l=1}^d a'_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l, \tag{21}$$

где

$$v'_{j,l} = \partial_{\xi_l} v_j(t_{k-h+1}^{[n]},\xi)\Big|_{\xi = X_{k,y}^{n,h-1}(x)}, \qquad a'_l = \partial_{\xi_l} a(\xi)\Big|_{\xi = X_{k,y}^{n,h-1}(x)}. \tag{22}$$

Таким образом имеем

$$\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 =$$
$$= \Xi^{(0)} - 2\delta_n \Xi^{(1)} - 2\sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)} + 2\delta_n \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(3)} + \delta_n^2 \Xi^{(4)} + \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)}, \tag{23}$$

где

$$\Xi^{(0)} = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j)^2,$$
$$\Xi^{(1)} = \sum_{j,l=1}^d v'_{j,l}\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l,$$
$$\Xi_j^{(2)} = \sum_{l=1}^d a'_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l,$$
$$\Xi_j^{(3)} = \sum_{l,l'=1}^d v'_{j,l} a'_{l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'},$$
$$\Xi^{(4)} = \sum_{j,l,l'=1}^d v'_{j,l} v'_{j,l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'},$$
$$\Xi^{(5)} = \sum_{l,l'=1}^d a'_l a'_{l'} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_l \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{l'}.$$

Если возвести обе части (23) в степень m $(m = 1, 2, \cdots)$, то имеем

$$\Big(\sum_{j=1}^d (\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2\Big)^m = (\Xi^{(0)})^m - 2m\delta_n \Xi^{(1)}(\Xi^{(0)})^{m-1} -$$
$$-2m\sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)}(\Xi^{(0)})^{m-1} + m\sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)}(\Xi^{(0)})^{m-1} +$$

$$+2m(m-1)\sum_{j,j'=1}^{d} y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(2)} \Xi_{j'}^{(2)} (\Xi^{(0)})^{m-2} + R_m, \tag{24}$$

где R_m — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta_n^{p_0}(y_1^h)^{p_1}\cdots(y_d^h)^{p_d}$ с $p_0+\sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$.

Напомним, что $v'_{j,l}$, a'_l и $\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j$ не зависят от y^h. Поэтому $\Xi^{(0)}$, $\Xi^{(1)}$, $\Xi_j^{(2)}$, $\Xi_j^{(3)}$, $\Xi^{(4)}$ и $\Xi^{(5)}$ также не зависят от y^h. Напомним также, что для функции $\Theta_n(\cdot)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)(y_1^h)^{p_1}\cdots(y_d^h)^{p_d} dy^h = 0, \qquad \text{если} \quad (p_1,\cdots,p_d)\in \Pi_d, \tag{25}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)|y_1^h|^{p_1}\cdots|y_d^h|^{p_d} dy^h = C_{(p_1,\cdots,p_d)}\delta_n^{\frac{\overline{p}}{2}}, \qquad \overline{p}=\sum_{j=1}^d p_j, \tag{26}$$

где Π_d — совокупность таких $(p_1,\cdots,p_d)$, что по крайней мере есть один нечетный p_j, а $C_{(p_1,\cdots,p_d)}$ — положительное число, определенное числами $p_1,\cdots,p_d$. В частности имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)dy^h = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)(y_j^h)^2 dy^h = 2\delta_n, \quad j=1,\cdots,d. \tag{27}$$

Таким образом, получим

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)(\Xi^{(0)})^m dy^h = (\Xi^{(0)})^m, \tag{28}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\Xi^{(1)}(\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = \Xi^{(1)}(\Xi^{(0)})^{m-1}, \tag{29}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(2)}(\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = 0, \tag{30}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(5)}(\Xi^{(0)})^{m-1} dy^h = 2d\delta_n\Xi^{(5)}(\Xi^{(0)})^{m-1}, \tag{31}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(2)}\Xi_{j'}^{(2)}(\Xi^{(0)})^{m-2} dy^h = 2\delta_n \sum_{j=1}^d (\Xi_j^{(2)})^2(\Xi^{(0)})^{m-2}. \tag{32}$$

Заметим, что из определения $\Xi^{(r)}$, $r=1,\cdots,5$, и условий (11)–(12) вытекает существование такой независимой от n, k и h постоянной $C=C(\overline{\tau},m)$, что

$$|\Xi^{(r)}| \leq C\,\Xi^{(0)}, \qquad r=1,\cdots,5. \tag{33}$$

Что касается слагаемого R_m, так как $\delta_n \leq \frac{1}{2}$, из (33) и наличия множителя $\delta_n^{p_0}(y_1^h)^{p_1}\cdots(y_d^h)^{p_d}$ с $p_0+\sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$ в каждом слагаемом из R_m

следует, что существует независимая от n, k и h постоянная $C = C(\overline{\tau}, m)$ такая, что

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h) R_m dy^h \Big| \le C' \delta_n (\Xi^{(0)})^m. \tag{34}$$

Из (24) и (28)–(32) следует, что существует независимая от n, k и h постоянная $K_1 = K_1(\overline{\tau}, m)$ такая, что

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^h} \big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'}) \big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{n,h}_{k,y}(x))_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^h \le$$

$$\le \big(1 + K_1 \delta_n\big) \int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \big(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \big) (\Xi^{(0)})^m dy^1 \cdots dy^{h-1}. \tag{35}$$

Положим

$$A^{(1,m)}_h(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'}) \big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{n,h}_{k,y}(x))_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^h. \tag{36}$$

Так как

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}} \big(\prod_{h'=1}^{h-1} \Theta_n(y^{h'}) \big) (\Xi^{(0)})^m dy^1 \cdots dy^{h-1} = A^{(1,m)}_{h-1}(x),$$

неравенства (35) можно написать в виде

$$A^{(1,m)}_h(x) \le (1 + K_1 \delta_n) A^{(1,m)}_{h-1}(x). \tag{37}$$

С другой стороны, из (17) следует, что

$$A^{(1,m)}_0(x) = 1. \tag{38}$$

Таким образом из (37) и (38) вытекает, что

$$A^{(1,m)}_h(x) \le (1 + K_1 \delta_n)^h. \tag{39}$$

Поскольку (39) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, с учетом неравенства

$$(1 + K_1 \delta_n)^h \le e^{K_1 h \delta_n},$$

получим (20). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \ge 1$, а $X^{n,h}_{k,y}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18). Предположим, что условия (11)–(12) выполнены. Тогда для каждого $(\overline{\tau}, m)$, $\overline{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \ge 1$, существует непрерывная и возратающая функция $\Phi^{(q,m)}(s) = \Phi^{(\overline{\tau};q,m)}(s)$, не зависящая от n, k и h, и такая, что, если $t^{[n]}_k \le \overline{\tau}$, то для любого $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \ge 0$, $|\alpha| = q$, имеем*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'}) \big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (D^\alpha_x (X^{n,h}_{k,y}(x))_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^h \le \Phi^{(q,m)}(h\delta_n). \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $t_k^{[n]} \leq \overline{\tau}$. Так как утверждение леммы уже доказано в случае $q = 1$, то достаточно доказать его, предполагая, что оно верно для $q' = 1, \cdots, q-1$. Итак, зафиксируем $q \geq 2$ и предположим, что справедливо неравенство (40) с q' вместо q, $q' = 1, \cdots, q-1$.

Если применим дифференциальный оператор D_x^α ($|\alpha| = q$) к j-й компоненте (18), и возведем полученные выражения в квадрат, то, складывая $(D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2$ для $j = 1, \cdots, d$, получим

$$\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2 =$$

$$= \Xi^{(q,0)} - 2\delta_n \Xi^{(q,1)} - 2\sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,2)} + 2\delta_n \sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,3)} + \delta_n^2 \Xi^{(q,4)} + \sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)},$$

где

$$\Xi^{(q,0)} = \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j)^2,$$

$$\Xi^{(q,1)} = \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j) D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x)),$$

$$\Xi_j^{(q,2)} = (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_j) D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)),$$

$$\Xi_j^{(q,3)} = (D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x))) D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)),$$

$$\Xi^{(q,4)} = \sum_{j=1}^d (D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x)))^2,$$

$$\Xi^{(q,5)} = (D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x)))^2.$$

Таким образом, для $m = 1, 2, \cdots$ имеем

$$\Big(\sum_{j=1}^d (D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h}(x))_j)^2\Big)^m = (\Xi^{(q,0)})^m - 2m\delta_n \Xi^{(q,1)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} -$$
$$-2m\sum_{j=1}^d y_j^h \Xi_j^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} + m\sum_{j=1}^d (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)} (\Xi^{(q,0)})^{m-1} +$$
$$+2m(m-1)\sum_{j,j'=1}^d y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(q,2)} \Xi_{j'}^{(q,2)} (\Xi^{(q,0)})^{m-2} + R_m^{(q)}, \qquad (41)$$

где $R_m^{(q)}$ — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta_n^{p_0}(y_1^h)^{p_1}\cdots(y_d^h)^{p_d}$ с $p_0 + \sum_{j=1}^d \frac{p_j}{2} > 1$. Учитывая независимость $\Xi^{(q,r)}$, $r = 0, 1, \cdots, 5$, от y^h, аналогично интегралу относительно $\Xi^{(r)}$, показанному выше, получим

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)(\Xi^{(q,0)})^m dy^h = (\Xi^{(q,0)})^m, \qquad (42)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\Xi^{(q,1)}(\Xi^{(q,0)})^{m-1}dy^h = \Xi^{(q,1)}(\Xi^{(q,0)})^{m-1}, \tag{43}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j=1}^{d} y_j^h \Xi_j^{(q,2)}(\Xi^{(q,0)})^{m-1}dy^h = 0, \tag{44}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j=1}^{d} (y_j^h)^2 \Xi^{(q,5)}(\Xi^{(q,0)})^{m-1}dy^h = 2d\delta_n\Xi^{(q,5)}(\Xi^{(q,0)})^{m-1}, \tag{45}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)\sum_{j,j'=1}^{d} y_j^h y_{j'}^h \Xi_j^{(q,2)}\Xi_{j'}^{(q,2)}(\Xi^{(q,0)})^{m-2}dy^h =$$

$$= 2\delta_n\sum_{j=1}^{d}(\Xi_j^{(q,2)})^2(\Xi^{(q,0)})^{m-2}. \tag{46}$$

Согласно определению $R_m^{(q)}$ имеем также

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y^h)R_m^{(q)}dy^h\Big| \le \delta_n\Sigma_\Xi, \tag{47}$$

где Σ_Ξ — сумма произведений $|\Xi^{(q,r)}|$, $r = 0, 1, \cdots, 5$.

Напомним, что производная $D_x^\alpha\varphi(X(x))$ сложной функции $\varphi(X(x))$ имеет выражение

$$D_x^\alpha\varphi(X(x)) = \sum_{q'=1}^{|\alpha|}\sum_{j_1,\cdots,j_{q'}=1}^{d}\Big(\frac{\partial^{q'}}{\partial\xi_{j_1}\cdots\partial\xi_{j_{q'}}}\varphi(\xi)\Big|_{\xi=X(x)}\Big)\times$$

$$\times\sum_{\sigma\in\Sigma_{\alpha,q'}} D_x^{\sigma^1}X_{j_1}(x)\cdots D_x^{\sigma^{q'}}X_{j_{q'}}(x), \tag{48}$$

где $\Sigma_{\alpha,q'}$ — множество таких элементов $\sigma = \{\sigma^1, \cdots, \sigma^{q'}\}$, что

$$\sigma^r = (\sigma_1^r, \cdots, \sigma_d^r), \quad r = 1, \cdots, q', \qquad \sigma_i^r \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i^r \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{d}\sigma_i^r \equiv |\sigma| \ge 1, \qquad \sum_{r=1}^{q'}\sigma_i^r = \alpha_i, \quad i = 1, \cdots, d.$$

Итак, с учетом условий (11)–(12), имеем

$$|D_x^\alpha v_j(t_{k-h+1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h-1}(x))| + |D_x^\alpha a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))| \le$$

$$\le C\sup_{j'\in\{1,\cdots,d\}}|D_x^\alpha(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}| + P_{q-1}. \tag{49}$$

Здесь C — независимая от n, k и h постоянная (постоянная C, которую используем здесь, а также постоянные C', C'' и C''', которые будем использовать в дальнейшем в этом доказательстве, зависят от $(\overline{\tau}, m, q)$, но, поскольку в этом доказательстве мы зафиксировали $(\overline{\tau}, m, q)$, просто говорим, что они независимы от n, k и h), а P_{q-1} — сумма произведений

$|D^\sigma_x(X^{n,h-1}_{k,y}(x))_{j'}|$ $(j'=1,\cdots,d,\ 1\le|\sigma|\le q-1)$, умноженных на абсолютное значение производных q'-го порядка, $1\le q'\le q$, по x от $v(t,x)$ или $a(x)$.

Из соотношения (49) и определения $\Xi^{(q,r)}$, $r=0,1,\cdots,5$, следует, что

$$|\Xi^{(q,r)}|\le C'\Xi^{(q,0)}+P'_{q-1},\qquad r=1,\cdots,5,\tag{50}$$

где C' — независимая от n, k и h постоянная, а P'_{q-1} — сумма произведений множителей $\sum\limits_{j'=1}^{d}(D^\sigma_x(X^{n,h-1}_{k,y}(x))_{j'})^2$ $(1\le|\sigma|\le q-1)$, умноженных на независимые от n, k и h постоянные.

Положим теперь

$$A^{(q,m)}_h(x)=\int_{(\mathbb{R}^d)^h}\Big(\prod_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'})\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d}(D^\alpha_x(X^{n,h}_{k,y}(x))_j)^2\Big)^m dy^1\cdots dy^h.\tag{51}$$

Если интегрируем на $(\mathbb{R}^d)^h$ левую часть (41), умноженную на $\prod\limits_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'})$, то получим $A^{(q,m)}_h(x)$. Что касается первого слагаемого правой части (41), с учетом (42) имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^h}\Big(\prod_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'})\Big)(\Xi^{(q,0)})^m dy^1\cdots dy^h=$$
$$=\int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}}\Big(\prod_{h'=1}^{h-1}\Theta_n(y^{h'})\Big)(\Xi^{(q,0)})^m dy^1\cdots dy^{h-1}=A^{(q,m)}_{h-1}(x).$$

С другой стороны, из (43)–(47) и (50) следует, что интеграл на $(\mathbb{R}^d)^h$ других слагаемых правой части (41), умноженных на $\prod\limits_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'})$, ограничен величиной

$$C''\delta_n\int_{(\mathbb{R}^d)^{h-1}}\Big(\prod_{h'=1}^{h-1}\Theta_n(y^{h'})\Big)\big((\Xi^{(q,0)})^m+(P'_{q-1})^m\big)dy^1\cdots dy^{h-1},$$

где C'' — независимая от n, k и h постоянная.

Таким образом, принимая во внимание предположение о справедливости (40) для $q'\le q-1$, полуим неравенство

$$A^{(q,m)}_h(x)\le(1+C'''\delta_n)A^{(q,m)}_{h-1}(x)+C'''\delta_n\widetilde{C}(h\delta_n),\tag{52}$$

где C''' — независимая от n, k и h постоянная, а $\widetilde{C}(s)$ — функция, возрастающая по $s\ge0$ и не зависящая от n и k. Так как $A^{(q,m)}_0(x)=0$, из (52) следует, что

$$A^{(q,m)}_h(x)\le C'''\delta_n\sum_{j=1}^{h}(1+C'''\delta_n)^{h-j}\widetilde{C}(h\delta_n).\tag{53}$$

Поскольку (53) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, учитывая неравенство

$$\delta_n \sum_{j=1}^{h} (1 + C'''\delta_n)^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_n} e^{(h\delta_n - s)C'''} ds = \frac{1}{C'''}(e^{C'''h\delta_n} - 1),$$

получим (40) с $\Phi^{(q,m)}(s) = (e^{C'''s} - 1)\widetilde{C}(s)$. Лемма доказана. □

4 Оценки приближенных решений и их призводных

В этом разделе устанавливаем оценки приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ и их производных. Так как при $t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}$ определяется $u^{[n]}(t, x)$ значениями $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ и $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ (см. (9)), для оценки $u^{[n]}(t, x)$ в отрезке $[0, \tau]$ используем часто отрезок $[0, \tau_+]$, где

$$\tau_+ = \tau + \delta_1. \tag{54}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, а $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \cdots,$ — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены. Тогда существует непрерывная и возратающая функция $\widetilde{\Phi}_q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не зависящая от n и удовлетворяющая неравенсту*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[n]}(t, x)| \leq \widetilde{\Phi}_q(t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{55}$$

для любого $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = q$ и любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Так как согласно (19) имеем

$$|u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq \Big| \int_{(\mathbb{R}^d)^k} (\prod_{h=1}^{k} \Theta_n(y^h)) u_0(X_{k,y}^{n,k}(x)) dy^1 \cdots dy^k \Big| +$$

$$+ \delta_n \sum_{h=1}^{k-1} \Big| \int_{(\mathbb{R}^d)^h} (\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})) f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \cdots dy^h \Big| + \delta_n |f(t_{k-1}^{[n]}, x)|,$$

учитывая первое соотношение (27), получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq M_{u_0} + k\delta_n M_f = M_{u_0} + t_k^{[n]} M_f, \qquad t_k^{[n]} \leq \tau_+, \tag{56}$$

где $M_{u_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u_0(x)|$ и $M_f = \sup_{(t,x) \in [0,\tau_+] \times \mathbb{R}^d} |f(t, x)|$. Поскольку неравенство (56) справедливо для любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, принимая во внимание определение (9), выводим существование функции $\widetilde{\Phi}_0(t)$, удовлетворяющей (55) с $q = 0$.

Рассмотрим случай $q \geq 1$. Применяя дифференциальный оператор D_x^α, $|\alpha| = q$, к обеим частям (19), получаем

$$D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = I_1 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-1} I_{2,h} + \delta_n I_3, \tag{57}$$

где

$$I_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} (\prod_{h=1}^{k} \Theta_n(y^h)) D_x^\alpha u_0(X_{k,y}^{n,k}(x)) dy^1 \cdots dy^k,$$

$$I_{2,h} = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} (\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})) D_x^\alpha f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x)) dy^1 \cdots dy^h,$$

$$I_3 = D_x^\alpha f(t_{k-1}^{[n]}, x).$$

Рассмотрим (57) при $t_k^{[n]} \leq \tau_+$. Согласно (48) имеем

$$I_1 = \sum_{q'=1}^{q} \sum_{\sigma \in \Sigma_{\alpha,q'}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \Big(\prod_{h=1}^{k} \Theta_n(y^h) \Big) \sum_{j_1,\cdots,j_{q'}=1}^{d} \Big(\frac{\partial^{q'}}{\partial \xi_{j_1} \cdots \partial \xi_{j_{q'}}} u_0(\xi) \Big|_{\xi = X_{k,y}^{n,k}(x)} \Big) \times$$

$$\times \Big(D_x^{\sigma^1} (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j_1} \cdots D_x^{\sigma^{q'}} (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j_{q'}} \Big) dy^1 \cdots dy^k,$$

где $\sigma = \{\sigma^1, \cdots, \sigma^{q'}\}$ и $\Sigma_{\alpha,q'}$ являются обозначениями, записанными в (48). Поэтому, учитывая условие (14), рассуждая аналогично выводу соотношения (49), в котором рассматриваем $u_0(\cdot)$ вместо $v_j(\cdot,\cdot)$ и $a(\cdot)$, и интегрируя соответственное выражение на $(\mathbb{R}^d)^k$, получим

$$|I_1| \leq C P_q^{(1)}, \tag{58}$$

где $C = C(\tau, q)$ — независимая от n постоянная, а $P_q^{(1)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^k$ произведений множителей $|D_x^\sigma (X_{k,y}^{n,k}(x))_{j'}|$ $(j' = 1, \cdots, d,\ 1 \leq |\sigma| \leq q)$, умноженных на $\prod_{h=1}^{k} \Theta_n(y^h)$.

Аналогично, учитывая условие (13), получим

$$|I_{2,h}| \leq C' P_q^{(2,h)}, \tag{59}$$

где $C' = C'(\tau, q)$ — независимая от n и h постоянная, а $P_q^{(2,h)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^h$ призведений множителей $|D_x^\sigma (X_{k,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ $(j' = 1, \cdots, d,\ 1 \leq |\sigma| \leq q)$, умноженных на $\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})$.

Так как в силу (13) I_3 ограничено постоянной, которую обозначим $C'' = C''(\tau, q)$, из (57)–(59) следует, что

$$|D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C P_q^{(1)} + \delta_n C' \sum_{h=1}^{k-1} P_q^{(2,h)} + \delta_n C''. \tag{60}$$

Итак, оценивая $P_q^{(1)}$ и $P_q^{(2,h)}$ с помощью (20) и (40), получим

$$|D_x^\alpha u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C''' \Big[\Phi^{(q,1)}(k\delta_n) + \sum_{q'=1}^{q-1} \sum_{m'=2}^{q-q'+1} \Phi^{(q',m')}(k\delta_n) \Big] + C'',$$

где $C''' = C'''(\tau, q)$ — независимая от n постоянная. Поскольку это неравенство справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$ и можно выбрать τ как функцию t, то, учитывая также определение (9), можно найти непрерывную и возрастающую функцию $\widetilde{\Phi}_q(t)$, не зависящую от n и удовлетворяющую неравенству (55). Лемма доказана. $\square$

5 Сходимость функций $X^{n,h}_{k,y}(x)$ их производных

Чтобы доказать сходимость приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$ и их производных, будем пользоваться соотношением $t^{[n+1]}_{2k} = t^{[n]}_k$ (см. (4)) и свойством свертки функций $\Theta_n(x)$:

$$\Theta_n(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(z-y)\Theta_{n+1}(y)dy. \tag{61}$$

Если обозначаем $\widetilde{X}^{n,1}_{k+1,y}(x) = x - \delta_n v(t^{[n]}_{k+1}, x) - a(x)(y^1 + y^2)$, согласно (61) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) u^{[n]}(t^{[n]}_k, x - \delta_n v(t^{[n]}_{k+1}, x) - a(x)z)dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^1)\Theta_{n+1}(y^2) u^{[n]}(t^{[n]}_k, \widetilde{X}^{n,1}_{k+1,y}(x))dy^1dy^2.$$

Итак, повторяя это рассуждение и определяя $\widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x)$, $h = 1, 2, \cdots, k+1$ $(k = 0, 1, \cdots)$, соотношениями

$$\widetilde{X}^{n,0}_{k+1,y}(x) = x, \tag{62}$$

$$\widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x) = \widetilde{X}^{n,h-1}_{k+1,y}(x) - \delta_n v(t^{[n]}_{k-h+2}, \widetilde{X}^{n,h-1}_{k+1,y}(x)) - a(\widetilde{X}^{n,h-1}_{k+1,y}(x))(y^{2h-1} + y^{2h}), \tag{63}$$

можно записать $u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x)$ в виде

$$u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} (\prod_{h=1}^{2k+2} \Theta_{n+1}(y^h)) u_0(\widetilde{X}^{n,k+1}_{k+1,y}(x))dy^1\cdots dy^{2k+2} +$$

$$+ \delta_n \sum_{h=1}^{k} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} (\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'})) f(t^{[n]}_{k-h}, \widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x))dy^1\cdots dy^{2h} + \delta_n f(t^{[n]}_k, x). \tag{64}$$

Чтобы оценить разность $u^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+2}, x) - u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x)$, будем использовать выражение (64). Но, для этого нам понадобятся оценки разности $X^{n+1,2h}_{2k+2,y}(x) - \widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x)$. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть $X^{n,h}_{k,y}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18), а $\widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x)$ — функция, определенная соотношениями (62)–(63). Предположим, что условия (11), (12) и (15) с $q = 1$ выполнены.*

Тогда для каждого $(\overline{\tau}, m)$, $\overline{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, *существует независимая от* n, k *и* h *постоянная* $K_2 = K_2(\overline{\tau}, m)$ *такая, что, если* $t^{[n]}_{k+1} \leq \overline{\tau}$, *то имеем*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \big(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \big) \big| X^{n+1,2h}_{2k+2,y}(x) - \widetilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x) \big|^{2m} dy^1 \cdots dy^{2h} \leq$$
$$\leq \delta_{n+1} e^{K_2 h \delta_{n+1}}. \tag{65}$$

Доказательство. Пусть $t^{[n]}_{k+1} \leq \overline{\tau}$. Для упрощения записи обозначим

$$X^{2h} = X^{n+1,2h}_{2k+2,y}(x), \qquad \widetilde{X}^h = \tilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x),$$
$$\bar{t} = t^{[n+1]}_{2k-2h+4} = t^{[n]}_{k-h+2}, \qquad t' = t^{[n+1]}_{2k-2h+3}, \tag{66}$$

для $h = 0, \cdots, k+1$. Тогда, в силу (18), (63) и (66), имеем

$$X^{2h} - \widetilde{X}^h = \Lambda^{(0)} - \delta_{n+1}\Lambda^{(1)} - y^{2h-1}\Lambda^{(2)} - y^{2h}\Lambda^{(3)}, \tag{67}$$

где

$$\Lambda^{(0)} = X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1},$$
$$\Lambda^{(1)} = 2\big(v(\bar{t}, X^{2h-2}) - v(\bar{t}, \widetilde{X}^{h-1})\big) - \big(v(\bar{t}, X^{2h-2}) - v(t', X^{2h-1})\big),$$
$$\Lambda^{(2)} = a(X^{2h-2}) - a(\widetilde{X}^{h-1}),$$
$$\Lambda^{(3)} = \Lambda^{(2)} - \big(a(X^{2h-2}) - a(X^{2h-1})\big).$$

Из (67) вытекает, что

$$|X^{2h} - \widetilde{X}^h|^{2m} = |\Lambda^{(0)}|^{2m} - 2m\Lambda^{(2)} y^{2h-1} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} -$$
$$-2m\Lambda^{(3)} y^{2h} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} + \overline{R}_m, \tag{68}$$

где $\overline{R}_m$ — сумма слагаемых, содержащих множитель $\delta^{p_0}_{n+1}(y^{2h-1})^{p_1}(y^{2h})^{p_2}$ с $p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} \geq 1$.

Напомним, что X^{2h-2} и $\widetilde{X}^{h-1}$ не зависят ни от y^{2h-1}, ни от y^{2h}, а X^{2h-1} не зависит от y^{2h}. Поэтому $\Lambda^{(0)}$ и $\Lambda^{(2)}$ не зависят ни от y^{2h-1}, ни от y^{2h}, а $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(3)}$ не зависят от y^{2h}. Таким образом,

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h})\Theta_{n+1}(y^{2h-1}) |\Lambda^{(0)}|^{2m} dy^{2h-1} dy^{2h} = |\Lambda^{(0)}|^{2m}, \tag{69}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \Lambda^{(2)} y^{2h-1} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-2} dy^{2h-1} = 0, \tag{70}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y^{2h})\big) \Lambda^{(3)} y^{2h} \cdot \Lambda^{(0)} |\Lambda^{(0)}|^{2m-1} dy^{2h} = 0. \tag{71}$$

Что касается $\overline{R}_m$, заметим сначала, что, в силу условий (11), (12) и (15) с $q = 1$, существует такая постоянная $C = C(\overline{\tau})$, что

$$|v(t,x) - v(s,x')| + |a(x) - a(x')| \leq C\big(|x - x'| + |t - s|\big),$$
$$\forall t, s \in [0, \overline{\tau}], \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, из определений $\Lambda^{(0)}$, $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$ следует, что

$$|\Lambda^{(r)}| \leq C'(|\Lambda^{(0)}| + |y^{2h-1}| + \delta_{n+1}), \qquad r = 1, 2, 3, \tag{72}$$

где $C' = C'(\overline{\tau})$ — независимая от n, k и h постоянная. Напомним также соотношение

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h})\Theta_{n+1}(y^{2h-1})|y^{2h}|^{p_1'}|y^{2h-1}|^{p_2'} dy^{2h-1}dy^{2h} = C_{p_1',p_2'}\delta_{n+1}^{(p_1'+p_2')/2}, \tag{73}$$

где $C_{p_1',p_2'}$ — постоянная, зависящая от p_1' и p_2'. Так как слагаемые, входящие в состав $\overline{R}_m$, содержат множитель $\delta_{n+1}^{p_0}(y^{2h-1})^{p_1}(y^{2h})^{p_2}$ с $p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} \geq 1$, а также $2m$ множителей $\Lambda^{(r)}$ $(r = 0, 1, 2, 3)$, то соотношения (72) и (73) позволяют получить неравенство

$$\Big| \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h})\Theta_{n+1}(y^{2h-1})\overline{R}_m dy^{2h-1}dy^{2h} \Big| \leq$$
$$\leq K_2\delta_{n+1}|\Lambda^{(0)}|^{2m} + K_2\delta_{n+1}^2, \tag{74}$$

где $K_2 = K_2(\overline{\tau}, m)$ — независимая от n, k и h постоянная.

Теперь, положим

$$B_h^{(m)}(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'})\big)\big|X^{2h} - \widetilde{X}^h\big|^{2m} dy^1 \cdots dy^{2h}. \tag{75}$$

Тогда, учитывая соотношение

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \big(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^h)\big)|\Lambda^{(0)}|^{2m} dy^1 \cdots dy^{2h-2} = B_{h-1}^{(m)}(x),$$

из (68)–(71) и (74) можно вывести

$$B_h^{(m)}(x) \leq (1 + \delta_{n+1}K_2)B_{h-1}^{(m)}(x) + (\delta_{n+1})^2 K_2. \tag{76}$$

С другой стороны, в силу (17) и (62) имеем

$$B_0^{(m)}(x) = 0. \tag{77}$$

Из (76) и (77) вытекает, что

$$B_h^{(m)}(x) \leq K_2(\delta_{n+1})^2 \sum_{j=1}^{h} (1 + K_2\delta_{n+1})^{h-j}. \tag{78}$$

Поскольку (78) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, принимая во внимание определение (75) и неравенство

$$\delta_{n+1} \sum_{j=1}^{h} (1 + K_2\delta_{n+1})^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)K_2} ds = \frac{1}{K_2}(e^{K_2 h\delta_{n+1}} - 1),$$

получим неравенство (65). Лемма доказана. □

Теперь рассмотрим производные $X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \widetilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$ по $x \in \mathbb{R}^d$.

Лемма 5. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$. Пусть $X_{k,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (17)–(18), а $\widetilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x)$ — функция, определенная соотношениями (62)–(63). Предположим, что условия (11), (12) и (15) выполнены. Тогда для каждого $(\overline{\tau}, m)$, $\overline{\tau} > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, существует непрерывная и возрастающая функция $\Psi^{(q-1,m)}(s) = \Psi^{(\overline{\tau},q-1,m)}(s)$, не зависящая от n, k и h, и такая, что, если $t_{k+1}^{[n]} \leq \overline{\tau}$, то*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}}\Big(\prod_{h'=1}^{2h}\Theta_n(y^{h'})\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_j - D_x^\alpha(\widetilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))_j\big)^2\Big)^m\times$$

$$\times\, dy^1\cdots dy^{2h} \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2(q-1)}}\Psi^{(q-1,m)}(h\delta_{n+1}) \qquad (79)$$

для любого $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = q-1$, и любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Лемма будет доказана рекуррентным образом для $q = 2, 3, \cdots$. Однако нам удобно начать с того, что вспомним общее выражение $D_x^\alpha(X^{2h})_j - D_x^\alpha(\widetilde{X}^h(x))_j$, $|\alpha| = q' \equiv q-1$, для неопределенного q при $t_{k+1}^{[n]} \leq \overline{\tau}$ (в этом доказательстве используем обозначения (66)).

Применяя дифференциальный оператор D_x^α ($|\alpha| = q'$) к j-й компоненте обеих частей равенства (67), получим

$$D_x^\alpha(X^{2h})_j - D_x^\alpha(\tilde{X}^h(x))_j =$$

$$= D_x^\alpha(\Lambda^{(0)})_j - \delta_{n+1}D_x^\alpha(\Lambda^{(1)})_j - y_j^{2h-1}D_x^\alpha(\Lambda^{(2)}) - y_j^{2h}D_x^\alpha(\Lambda^{(3)}),$$

где $\Lambda^{(r)}$, $r = 0, \cdots, 3$, — функции, определенные вслед за (67). Итак,

$$\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(X^{2h})_j - D_x^\alpha(\tilde{X}^h)_j\big)^2 = \Lambda^{(q',0)} - 2\delta_{n+1}\Lambda^{(q',1)} -$$

$$-2\sum_{j=1}^{d}y_j^{2h-1}\big(\Lambda_j^{(q',2)} - \delta_{n+1}\Lambda_j^{(q',4)}\big) - 2\sum_{j=1}^{d}y_j^{2h}\big(\Lambda_j^{(q',3)} - \delta_{n+1}\Lambda_j^{(q',5)}\big) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{d}y_j^{2h-1}y_j^{2h}\Lambda^{(q',6)} + \delta_{n+1}^2\Lambda^{(q',7)} + \sum_{j=1}^{d}(y_j^{2h-1})^2\Lambda^{(q',8)} + \sum_{j=1}^{d}(y_j^{2h})^2\Lambda^{(q',9)},$$

где

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{(q',0)} = \textstyle\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(\Lambda^{(0)})_j\big)^2, && \Lambda^{(q',1)} = \textstyle\sum_{j=1}^{d}D_x^\alpha(\Lambda^{(0)})_jD_x^\alpha(\Lambda^{(1)})_j,\\
&\Lambda_j^{(q',2)} = D_x^\alpha(\Lambda^{(0)})_jD_x^\alpha(\Lambda^{(2)}), && \Lambda_j^{(q',3)} = D_x^\alpha(\Lambda^{(0)})_jD_x^\alpha(\Lambda^{(3)}),\\
&\Lambda_j^{(q',4)} = D_x^\alpha(\Lambda^{(1)})_jD_x^\alpha(\Lambda^{(2)}), && \Lambda_j^{(q',5)} = D_x^\alpha(\Lambda^{(1)})_jD_x^\alpha(\Lambda^{(3)}),\\
&\Lambda^{(q',6)} = D_x^\alpha(\Lambda^{(2)})D_x^\alpha(\Lambda^{(3)}), && \Lambda^{(q',7)} = \textstyle\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(\Lambda^{(1)})_j\big)^2,\\
&\Lambda^{(q',8)} = \big(D_x^\alpha(\Lambda^{(2)})\big)^2, && \Lambda^{(q',9)} = \big(D_x^\alpha(\Lambda^{(3)})\big)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что, для $m = 1, 2, \cdots,$

$$\Big(\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(X^{2h})_j - D_x^\alpha(\widetilde{X}^h(x))_j\big)^2\Big)^m = (\Lambda^{(q',0)})^m -$$

$$-2m\sum_{j=1}^{d} y_j^{2h-1}\Lambda_j^{(q',2)}(\Lambda^{(q',0)})^{m-1} - 2m\sum_{j=1}^{d} y_j^{2h}\Lambda_j^{(q',3)}(\Lambda^{(q',0)})^{m-1} + \overline{R}_m^{(q')}, \quad (80)$$

где $\overline{R}_m^{(q')}$ — сумма слагаемых, содержащих множитель

$$\delta_{n+1}^{p_0}(y_1^{2h-1})^{p_1}\cdots(y_d^{2h-1})^{p_d}(y_1^{2h})^{p_{d+1}}\cdots(y_d^{2h})^{p_{2d}}$$

с $p_0 + \sum_{j=1}^{2d}\frac{p_j}{2} \geq 1$. Так как $D_x^\alpha\Lambda^{(0)}$ и $D_x^\alpha\Lambda^{(2)}$ не зависят ни от y^{2h-1}, ни от y^{2h}, а $D_x^\alpha\Lambda^{(3)}$ не зависит от y^{2h}, аналогично (69)–(71) из определения $\Lambda^{(q',0)}$, $\Lambda^{(q',2)}$ и $\Lambda^{(q',3)}$ следуют соотношения

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2}\Theta_{n+1}(y^{2h})\Theta_{n+1}(\Lambda^{(q',0)})^m dy^{2h-1}dy^{2h} = (\Lambda^{(q',0)})^m, \quad (81)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y^{2h-1})y_j^{2h-1}\Lambda_j^{(q',2)}(\Lambda^{(q',0)})^{m-1}dy^{2h-1} = 0, \quad (82)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y^{2h})y_j^{2h}\Lambda_j^{(q',3)}(\Lambda^{(q',0)})^{m-1}dy^{2h} = 0. \quad (83)$$

Заметим, что в силу условий (11), (12) и (15) (с $q = 2, 3, \cdots$) существует постоянная $C_{q'} = C_{q'}(\overline{\tau})$, $q' = q - 1$, такая, что для $\varphi, \psi \in C^{q'}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ и $s, t \in [0, \overline{\tau}]$ имеется

$$|D_x^\alpha v_j(t, \varphi(x)) - D_x^\alpha v_j(s, \psi(x))| + |D_x^\alpha a(\varphi(x)) - D_x^\alpha a(\psi(x))| \leq$$

$$\leq C_{q'}\Big(\sup_{j'\in\{1,\cdots,d\}}|D_x^\alpha(\varphi(x))_{j'} - D_x^\alpha(\psi(x))_{j'}| + Q_{q'-1}\Big), \qquad |\alpha| = q', \quad (84)$$

где $Q_{q'-1}$ является суммой произведений множителей $|D_x^\sigma(\varphi(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \cdots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$), умноженных на $|D_x^\sigma(\varphi(x))_{j'} - D_x^\sigma(\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \cdots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$) и на абсолютное значение производных по x порядка $\leq q'$ функции $v(t, x)$ или $a(x)$, а также произведений множителей $|D_x^\sigma(\varphi(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\psi(x))_{j'}|$ ($j' = 1, \cdots, d$, $1 \leq |\sigma| \leq q'$), умноженных на $|\varphi(x) - \psi(x)|$ или $|t - s|$ и на абсолютное значение производных по x порядка $\leq q' + 1$ функции $v(t, x)$ или $a(x)$, или на абсолютное значение производных по t производных по x порядка $\leq q'$ функции $v(t, x)$.

Теперь докажем лемму с $q = 2$, т.е. $q' = 1$. В этом случае, так как нет σ, удовлетворяющего условию $1 \leq |\sigma| \leq q' - 1$, то $Q_{q'-1}$, появляющееся в (84), содержит только слагаемые

$$|\partial_{x_i}(\varphi(x))_{j'}|\big(|\varphi(x) - \psi(x)| + |t - s|\big), \qquad i, j' = 1, \cdots, d.$$

Таким образом, из определения $\Lambda^{(1,r)}$ и $\Lambda^{(r')}$ $(r' = 0, 1, 2, 3)$ следует, что

$$|\Lambda^{(1,r)}| \leq C_1' \Big[\Lambda^{(1,0)} + |X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1}|^2 + |y^{2h-1}|^2 + \delta_{n+1}\Big) \sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2\Big]$$

для $r = 1, \cdots, 9$, где $C_1' = C_1'(\overline{\tau})$ — независимая от n, k и h постоянная. Следовательно, принимая во внимание определение $\overline{R}_m^{(1)}$, получим

$$\Big| \int_{(\mathbb{R}^d)^2} \Theta_{n+1}(y^{2h}) \Theta_{n+1}(y^{2h-1}) \overline{R}_m^{(1)} dy^{2h-1} dy^{2h} \Big| \leq$$

$$\leq C_1'' \delta_{n+1} \Big[(\Lambda^{(1,0)})^m + \big| X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1}|^{2m} + \delta_{n+1}\big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2 \Big)^m \Big], \tag{85}$$

где $C_1'' = C_1''(\overline{\tau}, m)$ — независимая от n, k и h постоянная.

Положим

$$B_h^{(1,m)}(x) =$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{2h})_j - \partial_{x_i}(\tilde{X}^h)_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^{2h}. \tag{86}$$

Тогда, аналогично получению (76), ввиду (81)–(83) и (85), из (80) получим

$$B_h^{(1,m)}(x) \leq (1 + \delta_{n+1} C'') B_{h-1}^{(1,m)}(x) + \delta_{n+1} C'' E_{h-1}^{(1,m)}, \tag{87}$$

где

$$E_{h-1}^{(1,m)} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \Big) \times$$

$$\times |X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1}|^{2m} \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{h-1})_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^{2h-2} +$$

$$+ \delta_{n+1} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h-2} \Theta_{n+1}(y^{h'}) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_i}(X^{2h-2})_j)^2 \Big)^m dy^1 \cdots dy^{2h-2}. \tag{88}$$

С другой стороны, из (17) и (62) непосредственно вытекает, что

$$B_0^{(1,m)}(x) = 0. \tag{89}$$

Таким образом, из (87) и (89) получим

$$B_h^{(1,m)}(x) \leq \delta_{n+1} C'' \sum_{j=1}^{h} (1 + \delta_{n+1} C'')^{h-j} E_{j-1}^{(1,m)}. \tag{90}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к первому слагаемому правой части (88), из (20) и (65) выводим, что существует непрерывная и возрастающая функция $\widetilde{E}(s)$, не зависящая от n и k, и такая, что

$$E_{h-1}^{(1,m)} \leq \sqrt{\delta_{n+1}}\widetilde{E}(h\delta_{n+1}), \qquad \forall h \in \{1, \cdots, k+1\}. \tag{91}$$

Так как (90) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, из (90)–(91) и соотношения

$$\delta_{n+1}\sum_{j=1}^{h}(1+C_1''\delta_{n+1})^{h-j} \leq \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)C_1''}ds = \frac{1}{C_1''}(e^{C_1''h\delta_{n+1}}-1)$$

вытекает неравенство (79) для $q=2$ с $\Psi^{(1,m)}(s) = \widetilde{E}(s)e^{C_1''s}$. Утверждение леммы с $q=2$ доказано.

Теперь, предпологая, что утверждение лемм для $2 \leq q < \overline{q}$ верно, докажем лемму с $q = \overline{q} > 2$. Обозначим $q' = \overline{q} - 1$.

Из соотношения (84) и определения $\Lambda^{(q',r)}$ нетрудно получить

$$|\Lambda^{(q',r)}| \leq C'_{q'}\big(\Lambda^{(q',0)} + Q'_{q'-1}\big) \qquad r = 1, \cdots, 9,$$

где $C'_{q'} = C'_{q'}(\overline{\tau})$ — независимая от n, k и h постоянная, а $Q'_{q'-1}$ — сумма произведений множителей $\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'})^2$ или $\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(\widetilde{X}^{h-1})_{j'})^2$ $(1 \leq |\sigma| \leq q'-1)$, умноженных на $\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma(\widetilde{X}^{h-1})_{j'})^2$ $(1 \leq |\sigma| \leq q'-1)$, и также произведений множителей $\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'})^2$ $(1 \leq |\sigma| \leq q')$, умноженных на $\big|X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1}\big|^2$ или $|y^{2h-1}|^{2p}$ $(\ 1 \leq p \leq q'+1)$ или δ_{n+1}. Таким образом, получим

$$\Big|\int_{(\mathbb{R}^d)^2}\Theta_{n+1}(y^{2h})\Theta_{n+1}(y^{2h-1})\overline{R}_m^{(\overline{q})}dy^{2h-1}dy^{2h}\Big| \leq$$
$$\leq C''_{q'}\delta_{n+1}\big((\Lambda^{(q',0)})^m + Q''_{q'-1}\big), \tag{92}$$

где $C''_{q'} = C''_{q'}(\overline{\tau}, m)$ — независимая от n, k и h постоянная, а $Q''_{q'-1}$ — сумма произведений множителей

$$\Big(\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'})^2\Big)^m \ \text{ или } \ \Big(\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(\widetilde{X}^{h-1})_{j'})^2\Big)^m \quad (1 \leq |\sigma| \leq q'-1),$$

умноженных на $\Big(\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma(\widetilde{X}^{h-1})_{j'})^2\Big)^m$ $(1 \leq |\sigma| \leq q'-1)$, и также произведений множителей $\Big(\sum_{j'=1}^{d}(D_x^\sigma(X^{2h-2})_{j'})^2\Big)^m$ $(1 \leq |\sigma| \leq q')$, умноженных на $\big|X^{2h-2} - \widetilde{X}^{h-1}\big|^{2m}$ или δ_{n+1}.

Положим

$$B_h^{(q',m)}(x) =$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'})\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d} (D_x^\alpha (X^{2h})_j - D_x^\alpha (\widetilde{X}^h)_j)^2\Big)^m dy^1 \cdots dy^{2h}. \tag{93}$$

Тогда из (80)–(83) и (92) вытекает, что

$$B_h^{(q',m)}(x) \le (1+\delta_{n+1}C''_{q'})B_{h-1}^{(q',m)}(x) + \delta_{n+1}C''_{q'}E_{h-1}^{(q',m)}, \tag{94}$$

где

$$E_{h-1}^{(q',m)} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h-1} \Theta_{n+1}(y^{h'})\Big) Q''_{q'-1} dy^1 \cdots dy^{2h-2}.$$

Напомним, что в силу (17) и (62) имеем

$$B_0^{(q',m)}(x) = 0.$$

Поэтому, из (94) получится неравенство

$$B_h^{(q',m)}(x) \le \delta_{n+1}C''_{q'} \sum_{j=1}^{h} (1+\delta_{n+1}C''_{q'})^{h-j} E_{j-1}^{(q',m)}. \tag{95}$$

Так как, согласно определению $Q''_{q'-1}$, $E_{h-1}^{(q',m)}$ является суммой слагаемых

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{2h-2}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h-1} \Theta_{n+1}(y^{h'})\Big)\Big(\sum_{j'=1}^{d} (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'})^2\Big)^m \times$$

$$\times \Big(\sum_{j'=1}^{d} (D_x^\sigma (X^{2h-2})_{j'} - D_x^\sigma (\widetilde{X}^{h-1})_{j'})^2\Big)^m dy^1 \cdots dy^{2h-2}$$

и аналогичных, то, применяя к ним неравенство Коши-Буняковского и используя неравенства (40) и (79) для $q \le q'-1$ и также (65), можно убедиться в том, что существует непрерывная и возрастающая функция $\widetilde{E}'(s)$, не зависящая от n и k, и такая, что

$$E_{h-1}^{(q',m)} \le (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q'}} \widetilde{E}'(h\delta_{n+1}), \qquad \forall h \in \{1, \cdots, k+1\}. \tag{96}$$

Поскольку (95) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, принимая во внимание соотношение

$$\delta_{n+1} \sum_{j=1}^{h} (1 + C''_{q'}\delta_{n+1})^{h-j} \le \int_0^{h\delta_{n+1}} e^{(h\delta_{n+1}-s)C''_{q'}} ds = \frac{1}{C''_{q'}}(e^{C''_{q'}h\delta_{n+1}} - 1),$$

из (95) и (96) выводим неравенство (79) с $\Psi^{(q',m)}(s) = \widetilde{E}'(s)e^{C''_{q'}s}$, что завершает доказательство леммы. $\square$

6 Сходимость приближенных решений и их производных

Теперь докажем сходимость приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$.

Предложение 1. *Пусть* $\tau > 0$. *Предположим, что предположения теоремы 1 с* $q = 1$ *выполнены. Тогда функции* $u^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, *определенные соотношениями* (7)–(9), *сходятся равномерно на* $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. В силу (19) и (64), для $0 \le t^{[n]}_{k+1} \le \tau_+$ имеем

$$u^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+2}, x) - u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x) = \\ = J_1 + \delta_{n+1}\sum_{h=1}^{k}\big(J_{2,h} + J_{3,h}\big) + \delta_{n+1}\big(J_4 + J_5\big), \tag{97}$$

где

$$J_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} (\prod_{h=1}^{2k+2}\Theta_{n+1}(y^h))\times \\ \times\big(u_0(X^{n+1,2k+2}_{2k+2,y}(x)) - u_0(\tilde X^{n,k+1}_{k+1,y}(x))\big)dy^1\cdots dy^{2k+2}, \tag{98}$$

$$J_{2,h} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} (\prod_{h'=1}^{2h}\Theta_{n+1}(y^{h'}))\times \\ \times\big(f(t^{[n+1]}_{2k-2h+1}, X^{n+1,2h}_{2k+2,y})(x) - f(t^{[n]}_{k-h}, \tilde X^{n,h}_{k+1,y}(x))\big)dy^1\cdots dy^{2h}, \tag{99}$$

$$J_{3,h} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h+1}} (\prod_{h'=1}^{2h+1}\Theta_{n+1}(y^{h'}))\times \\ \times\big(f(t^{[n+1]}_{2k-2h}, X^{n+1,2h+1}_{2k+2,y}(x)) - f(t^{[n]}_{k-h}, \tilde X^{n,h}_{k+1,y}(x))\big)dy^1\cdots dy^{2h+1}, \tag{100}$$

$$J_4 = \int_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y^1)\big(f(t^{[n+1]}_{2k}, x - \delta_{n+1}v(t^{[n+1]}_{2k+2}, x) - a(x)y^1) - f(t^{[n]}_k, x)\big)dy^1, \tag{101}$$

$$J_5 = f(t^{[n+1]}_{2k+1}, x) - f(t^{[n]}_k, x). \tag{102}$$

Что касается J_1, принимая во внимание условие (14), имеем

$$|J_1| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\nabla u_0(x)|\times \\ \times\int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} (\prod_{h=1}^{2k+2}\Theta_{n+1}(y^h))|X^{n+1,2k+2}_{2k+2,y}(x) - \tilde X^{n,k+1}_{k+1,y}(x)|dy^1\cdots dy^{2k+2}.$$

Итак, с помощью (65), получим

$$|J_1| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\nabla u_0(x)|\sqrt{\delta_{n+1}}e^{K_2'(k+1)\delta_{n+1}}, \tag{103}$$

где $K_2' = \frac{K_2(\tau,1)}{2}$ с постоянной $K_2 = K_2(\tau,1)$, введенной в (65).

Аналогично, принимая во внимание условия теоремы с $q = 1$, получим

$$|J_{2,h}| + |J_{3,h}| \le C\Big(\sqrt{\delta_{n+1}}e^{K_2' h\delta_{n+1}} + \sqrt{\delta_{n+1}}\Big), \tag{104}$$

где $C = C(\tau)$ — независимая от n, k и h постоянная. Кроме того, нетрудно видеть, что существует независимая от n и k постоянная $C' = C'(\tau)$ такая, что

$$|J_4| + |J_5| \le C'\sqrt{\delta_{n+1}}. \tag{105}$$

Из (97) и (103)—(105) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная $C'' = C''(\tau)$ такая, что

$$|u^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+2}, x) - u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x)| \le \sqrt{\delta_{n+1}}C''(e^{K_2'(k+1)\delta_{n+1}} + 1) \tag{106}$$

при условии, что $0 \le t^{[n]}_{k+1} \le \tau_+$. Так как неравенство (106) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, то, учитывая также определение (9), получим

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t, x) - u^{[n]}(t, x)| \le \sqrt{\delta_{n+1}}C''(e^{K_2'\tau_+} + 1) \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le \tau. \tag{107}$$

Из (107) и соотношения $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\delta_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n/2}} < \infty$ следует, что функции $u^{[n]}(t, x)$ сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \to \infty$. Предложение доказано. □

Теперь проверим сходимость производных приближенных решений.

Предложение 2. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 2$, и $\tau > 0$. Предположим, что предположения теоремы 1 выполнены. Тогда производные $(q-1)$-го порядка по x функций $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \cdots$, определенных соотношениями (7)–(9), сходятся при $n \to \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ к соответственным производным предельной функции $u(t, x)$ последовательности $\{u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_j \ge 0$, $j = 1, \cdots, d$, $|\alpha| = q - 1$. Тогда, применяя дифференциальный оператор D_x^α к обеим частям равенства (97), имеем

$$D_x^\alpha u^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+2}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t^{[n]}_{k+1}, x) =$$
$$= D_x^\alpha J_1 + \delta_{n+1}\sum_{h=1}^{k}\big(D_x^\alpha J_{2,h} + D_x^\alpha J_{3,h}\big) + \delta_{n+1}\big(D_x^\alpha J_4 + D_x^\alpha J_5\big), \quad 0 \le t^{[n]}_{k+1} \le \tau_+, \tag{108}$$

где J_1, $J_{2,h}$, $J_{3,h}$, J_4, J_5 — функции, определенные соотношениями (98)–(102).

Из (98) вытекает, что

$$D_x^\alpha J_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^{2k+2}} \Big(\prod_{h=1}^{2k+2}\Theta_{n+1}(y^h)\Big)\times$$

$$\times\big(D_x^\alpha u_0(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x)) - D_x^\alpha u_0(\tilde X_{k+1,y}^{n,k+1}(x))\big)dy^1\cdots dy^{2k+2}.$$

Итак, оценивая $|D_x^\alpha u_0(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x)) - D_x^\alpha u_0(\tilde X_{k+1,y}^{n,k+1}(x))|$ аналогично (84) (в котором рассматривается $u_0(\cdot)$ с условием (14) вместо $v_j(\cdot,\cdot)$ или $a(\cdot)$) и интегрируя его на $(\mathbb{R}^d)^{2k+2}$ с весом $\prod_{h=1}^{2k+2}\Theta_{n+1}(y^h)$, получим

$$|D_x^\alpha J_1| \le C\widetilde Q_{q-1}^{(1)},$$

где $C = C(\tau,q)$ — независимая от n и k постоянная, а $\widetilde Q_{q-1}^{(1)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^{2k+2}$ с весом $\prod\limits_{h=1}^{2k+2}\Theta_{n+1}(y^h)$ произведений множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\tilde X_{k+1,y}^{n,k+1}(x))_{j'}|$ ($j'=1,\cdots,d$, $1\le|\sigma|\le q-1$), умноженных на $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x))_{j'} - D_x^\sigma(\tilde X_{k+1,y}^{n,k+1}(x))_{j'}|$ ($j'=1,\cdots,d$, $1\le|\sigma|\le q-1$) или $|X_{2k+2,y}^{n+1,2k+2}(x) - \tilde X_{k+1,y}^{n,k+1}(x)|$. Отсюда, с помощью неравенств (40), (65) и (79), вытекает, что существует непрерывная функция $\widetilde\Psi^{(1)}(s)$ от $s\ge 0$, не зависящая от n и k, и такая, что

$$|D_x^\alpha J_1| \le (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q-1}}\widetilde\Psi^{(1)}(s_1), \qquad s_1 = (2k+2)\delta_{n+1}. \tag{109}$$

Аналогично, рассматривая выражение $D_x^\alpha J_{2,h} + D_x^\alpha J_{3,h}$, которое получается из (99)–(100) и оценивая

$$|D_x^\alpha f(t_{2k-2h+1}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h})(x) - D_x^\alpha f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde X_{k+1,y}^{n,h}(x))|$$

и

$$|D_x^\alpha f(t_{2k-2h}^{[n+1]}, X_{2k+2,y}^{n+1,2h+1}(x)) - D_x^\alpha f(t_{k-h}^{[n]}, \tilde X_{k+1,y}^{n,h}(x))|$$

аналогично (84), в котором рассматривается $f(\cdot,\cdot)$ с условиями (13) и (16) вместо $v_j(\cdot,\cdot)$ или $a(\cdot)$, получается

$$|D_x^\alpha J_{2,h}| + |D_x^\alpha J_{3,h}| \le C'\widetilde Q_{q-1}^{(2,h)}$$

где $C' = C'(\tau,q)$ — независимая от n, k и h постоянная, а $\widetilde Q_{q-1}^{(2,h)}$ — сумма интегралов на $(\mathbb{R}^d)^{2h}$ с весом $\prod\limits_{h'=1}^{2h}\Theta_{n+1}(y^{h'})$ произведений множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h+1}(x))_{j'}|$ или $|D_x^\sigma(\tilde X_{k+1,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ ($j'=1,\cdots,d$, $1\le|\sigma|\le q-1$), умноженных на один или несколько из множителей $|D_x^\sigma(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_{j'} - D_x^\sigma(\tilde X_{k+1,y}^{n,h}(x))_{j'}|$ ($j'=1,\cdots,d$, $1\le|\sigma|\le q-1$), $|X_{2k=2,y}^{n+1,2h}(x) - \tilde X_{k+1,y}^{n,h}(x)|$, δ_{n+1}, $|y^{2h+1}|$. Из этого соотношения, еще раз с помощью неравенств (40), (65) и (79), вытекает, что существует непрерывная фукция $\widetilde\Psi^{(2)}(s)$ от $s\ge 0$, не зависящая от n, k и h, и такая, что

$$|D_x^\alpha J_{2,h}| + |D_x^\alpha J_{3,h}| \le (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}}\widetilde\Psi^{(2)}(s_2), \qquad s_2 = 2h\delta_{n+1}. \tag{110}$$

Кроме того, вспоминая определения (101)–(102) и условия (13) и (16), нетрудно видеть, что существует независимая от n и k постоянная $C'' =$

$C''(\tau, q)$ такая, что

$$|D_x^\alpha J_4| + |D_x^\alpha J_5| \leq C'' \sqrt{\delta_{n+1}}. \tag{111}$$

Из (108)–(111) вытекает, что, при условии $0 \leq t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$, имеем

$|D_x^\alpha u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq$

$$\leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q-1}} \widetilde{\Psi}^{(1)}((2k+2)\delta_{n+1}) + \delta_{n+1} \sum_{h=1}^{k} (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \widetilde{\Psi}^{(2)}(2h\delta_{n+1}) + C''(\delta_{n+1})^{\frac{3}{2}},$$

значит,

$$|D_x^\alpha u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \widetilde{\Psi}((2k+2)\delta_{n+1}), \tag{112}$$

где $\widetilde{\Psi}(s) = \widetilde{\Psi}^{(1)}(s) + s\widetilde{\Psi}^{(2)}(s) + C''$.

Так как (112) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^d$, вспоминая также определение (9), получим

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[n+1]}(t,x) - D_x^\alpha u^{[n]}(t,x)| \leq (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} \widetilde{\Psi}(\tau_+). \tag{113}$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}} = \frac{1}{2^{1/2^q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2^q}} < \infty,$$

из (113) вытекает, что $D_x^\alpha u^{[n]}(t,x)$ сходятся равномерно на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \to \infty$. Ясно, что их предельной функцией является $D_x^\alpha u(t,x)$, где $u^{[n]}(t,x)$ — предельная функция последовательности $\{D_x^\alpha u^{[n]}(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$, что завершает доказательство предложения. □

7 Переход к пределу

Чтобы доказать, что предельная функция $u(t,x)$ последовательности $\{D_x^\alpha u^{[n]}(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет уравнению (2), напомним сначала связь между приближенными решениями $u^{[n]}(t,x)$ и уравнением (2).

Лемма 6. *Пусть $\tau > 0$, а $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$, $n = 1, 2, \cdots$, — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены с $q \geq 3$. Тогда при $t_1^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем*

$$\frac{u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} = -v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) +$$

$$+ \kappa(x) \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + f(t_{k-1}^{[n]}, x) + R, \tag{114}$$

$$|R| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \tag{115}$$

где C_0 — независимая от n постоянная.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора имеем

$$
\begin{aligned}
&u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x-\delta_n v(t_k^{[n]},x)-a(x)y)=\\
&\quad=u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)-\delta_n v(t_k^{[n]},x)\cdot\nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)-a(x)y\cdot\nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}[\delta_n^2 v_i(t_k^{[n]},x)v_j(t_k^{[n]},x)+2\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)a(x)y_j+(a(x))^2y_iy_j]\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{\partial^2u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{6}\sum_{i,j,h=1}^{d}\mu_i\mu_j\mu_h\frac{\partial^3u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\widetilde{x})}{\partial x_i\partial x_j\partial x_h},
\end{aligned}
\tag{116}
$$

где $\mu_i=-\delta_n v_i-a(x)y_i$ (и аналогично для μ_j и μ_h), а $\widetilde{x}$ — точка между x и $x-\delta_n v(t_k^{[n]},x)-a(x)y$.

Заметим, что в силу (25) и (27) имеем

$$
\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)y\cdot\nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)dy=0,
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\big(\delta_n^2v_i(t_k^{[n]},x)v_j(t_k^{[n]},x)-2\delta_nv_i(t_k^{[n]},x)a(x)y_j+(a(x))^2y_iy_j\big)\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{\partial^2u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}\Big]dy=\\
&\quad=\delta_n(a(x))^2\Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\delta_n^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}v_i(t_k^{[n]},x)v_j(t_k^{[n]},x)\frac{\partial^2u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}.
\end{aligned}
$$

С другой стороны, так как $|\mu_i\mu_j\mu_h|\le(\delta_n|v|+|a||y|)^3$, учитывая условия (11)–(12), из соотношения (26) и леммы 3 выводим, что существует независимая от n постоянная C_0 такая, что

$$
\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\frac{1}{6}\sum_{i,j,h=1}^{d}\mu_i\mu_j\mu_h\frac{\partial^3u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\widetilde{x})}{\partial x_i\partial x_j\partial x_h}dy\Big|\le\delta_n^{3/2}C_0.
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&u^{[n]}(t_k^{[n]},x)-u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)=\\
&=-\delta_nv(t_k^{[n]},x)\cdot\nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\delta_n(a(x))^2\Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\delta_nf(t_{k-1}^{[n]},x)+R'
\end{aligned}
$$

с $|R'|\le\delta_n^{3/2}C_0$. Следовательно, разделив обе части этого равенства на δ_n и подставив $\kappa(x)=(a(x))^2$, получим (114)–(115). Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть $q\ge3$ и предположения теоремы 1 выполнены. Тогда для каждого $\tau\ge0$ существует независимая от n постоянная $L=L(\tau)$ такая, что для приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$ и предельной функции $u(t,x)$ справедливы неравенства*

$$
|u^{[n]}(t_1,x)-u^{[n]}(t_2,x)|\le L|t_1-t_2|\qquad\forall t_1,t_2\in[0,\tau_+],\ \forall x\in\mathbb{R}^d,\tag{117}
$$

$$|u(t_1,x)-u(t_2,x)|\leq L|t_1-t_2| \qquad \forall t_1,t_2\in[0,\tau_+],\ \forall x\in\mathbb{R}^d. \tag{118}$$

Доказательство. В силу леммы 3 и соотношения $\delta_n\leq\delta_1$ правая часть (114) ограничена постоянной L, которая не зависит от n. Итак, принимая во внимание (9), получим неравертство (117).

Неравенство (118) следует из (117) и равномерной сходимости $u^{[n]}(t,x)$ к $u(t,x)$. □

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости производной (справа) по t приближенных решений. Для этого мы начнем с рассмотрением равномерной непрерывности $u^{[n]}(t,x)$, $\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$.

Лемма 7. *Пусть $q\geq 3$ и $\tau>0$. Пусть $u^{[n]}(t,x)$ — функции, определенные соотношениями (7)–(9). Предположим, что условия (11)–(14) выполнены. Тогда функции $u^{[n]}(t,x)$, $\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$, и $\partial_{x_j}\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$, $i,j=1,\cdots,d$, равномерно непрерывны на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Лемма 3 и предложения 1 и 2 гарантируют равномерную непрерывность $u^{[n]}(t,x)$, $\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$ по $x\in\mathbb{R}^d$. Поэтому нам остается показать их равномерную непрерывность по $t\in[0,\tau]$.

Равномерная непрерывность $u^{[n]}(t,x)$ по $t\in[0,\tau]$ вытекает из следствия 1.

Что касается равномерной непрерывности $\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i}u^{[n]}(t,x)$, $i,j=1,\cdots,d$, по $t\in[0,\tau]$, то сначала докажем следующие леммы (леммы 8 и 9).

Лемма 8. *Существует независимая от n постоянная $L'=L'(\tau)$ такая, что при $0\leq t^{[n]}_{k'}<t^{[n]}_{k}\leq\tau_+$ имеем*

$$|\partial_{x_i}u^{[n]}(t^{[n]}_k,x)-\partial_{x_i}u^{[n]}(t^{[n]}_{k'},x)|\leq L'\Big(|t^{[n]}_k-t^{[n]}_{k'}|+\sqrt{|t^{[n]}_k-t^{[n]}_{k'}|}\Big). \tag{119}$$

Доказательство. Пусть $0\leq t^{[n]}_{k'}<t^{[n]}_{k}\leq\tau_+$. Тогда, используя выражение

$$X^{n,h}_{k,y}(x)=x-\delta_n\sum_{h'=1}^{h}v(t^{[n]}_{k-h'+1},X^{n,h'-1}_{k,y}(x))-\sum_{h'=1}^{h}a(X^{n,h'-1}_{k,y}(x))y^{h'} \tag{120}$$

для $h=1,\cdots,k-k'$, вытекающее из (17)–(18), аналогичным (19) образом из (8) получается

$$u^{[n]}(t^{[n]}_k,x)=\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))u^{[n]}(t^{[n]}_{k'},X^{n,k-k'}_{k,y}(x))dy^1\cdots dy^{k-k'}+$$
$$+\delta_n\sum_{h=1}^{k-k'-1}\int_{(\mathbb{R}^d)^h}(\prod_{h'=1}^{h}\Theta_n(y^{h'}))f(t^{[n]}_{k-h-1},X^{n,h}_{k,y}(x))dy^1\cdots dy^h+$$
$$+\delta_n f(t^{[n]}_{k-1},x),$$

откуда

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x)-u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x) =$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \big(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h)\big)\big[u^{[n]}(t_{k'}^{[n]}, X_{k,y}^{n,k-k'}(x)) - u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x)\big]dy^1\cdots dy^{k-k'}+$$

$$+\delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})\big) f(t_{k-h-1}^{[n]}, X_{k,y}^{n,h}(x))dy^1\cdots dy^h + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x). \tag{121}$$

Дифференцируя обе части равенства (121) по x_i ($i \in \{1,\cdots,d\}$) и учитывая (120), получим

$$\partial_{x_i}u^{[n]}(t_k^{[n]},x)-\partial_{x_i}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x) = U_1+\delta_n\sum_{h=1}^{k-k'}U_{2,h}+U_3+\delta_n\sum_{h=1}^{k-k'-1}U_{4,h}+\delta_n U_5, \tag{122}$$

где

$$U_1 = \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \big(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h)\big)\Big[\partial_{\xi_i}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} - \partial_{\xi_i}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=x}\Big]\times$$
$$\times dy^1\cdots dy^{k-k'},$$

$$U_{2,h} = \sum_{j,j'=1}^{d}\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \big(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h)\big)\partial_{\xi_j}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)}\times$$
$$\times \partial_{\xi_{j'}}v_j(t_{k-h+1}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)}\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}dy^1\cdots dy^{k-k'},$$

$$U_3 = \sum_{j,j'=1}^{d} U_{3,jj'},$$

$$U_{3,jj'} = \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \big(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h)\big)\partial_{\xi_j}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)}\times$$
$$\times \sum_{h=1}^{k-k'} y_j^h \partial_{\xi_{j'}}a(\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)}\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}dy^1\cdots dy^{k-k'},$$

$$U_{4,h} = \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})\big)\sum_{j=1}^{d}\partial_{\xi_j}f(t_{k-h-1}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h}(x)}\partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h}(x))_j\times$$
$$\times dy^1\cdots dy^h,$$

$$U_5 = \partial_{x_i}f(t_{k-1}^{[n]},x).$$

Оценим сначала $|U_1|$. Из леммы 3 с $q=2$ следует, что существует независимая от n, k и k' постоянная $C=C(\tau)$ такая, что

$$\Big|\partial_{\xi_i}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,k-k'}(x)} - \partial_{\xi_i}u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},\xi)\big|_{\xi=x}\Big| \le C\big|X_{k,y}^{n,k-k'}(x)-x\big|.$$

Следовательно, учитывая (120), получим

$$\Big|\partial_{\xi_i}u^{[n]}(t^{[n]}_{k'},\xi)\big|_{\xi=X^{n,k-k'}_{k,y}(x)}-\partial_{\xi_i}u^{[n]}(t^{[n]}_{k'},\xi)\big|_{\xi=x}\Big|\leq$$

$$\leq C\Big(\sup_{(t,\xi)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d}|v_i(t,\xi)|\delta_n(k-k')+\Big|\sum_{h=1}^{k-k'}a(X^{n,h-1}_{k,y}(x))y^h\Big|\Big).\qquad(123)$$

С другой стороны, имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))\Big|\sum_{h=1}^{k-k'}a(X^{n,h-1}_{k,y}(x))y^h\Big|dy^1\cdots dy^{k-k'}\leq$$

$$\leq\Big(\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))\Big(\sum_{h=1}^{k-k'}a(X^{n,h-1}_{k,y}(x))y^h_j\Big)^2dy^1\cdots dy^{k-k'}\Big)^{1/2}=$$

$$=\Big(\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))(\Sigma_1+\Sigma_2)dy^1\cdots dy^{k-k'}\Big)^{1/2},$$

где

$$\Sigma_1=\sum_{h=1}^{k-k'}(y^h_j)^2(a(X^{n,h-1}_{k,y}(x)))^2,$$

$$\Sigma_2=2\sum_{h=2}^{k-k'}\sum_{h'=1}^{h-1}y^h_jy^{h'}_ja(X^{n,h-1}_{k,y}(x))a(X^{n,h'-1}_{k,y}(x)).$$

Так как $a(X^{n,h-1}_{k,y}(x))$ не зависит от y^h, имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))\Sigma_1dy^1\cdots dy^{k-k'}\leq 2(k-k')\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|a(\xi)|\delta_n.$$

Кроме того, так как $y^{h'}_ja(X^{n,h-1}_{k,y}(x))a(X^{n,h'-1}_{k,y}(x))$ не зависит от y^h, имеем

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))\Sigma_2dy^1\cdots dy^{k-k'}=0.$$

Следовательно,

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}}(\prod_{h=1}^{k-k'}\Theta_n(y^h))\Big|\sum_{h=1}^{k-k'}a(X^{n,h-1}_{k,y}(x))y^h\Big|dy^1\cdots dy^{k-k'}\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|a(\xi)|\sqrt{\delta_n(k-k')}.\qquad(124)$$

Из определения U_1 и неравенств (123) и (124) вытекает, что существует независимая от n, k и k' постоянная $L_1=L_1(\tau)$ такая, что

$$|U_1|\leq L_1\big(|k\delta_n-k'\delta_n|+\sqrt{|k\delta_n-k'\delta_n|}\big).\qquad(125)$$

Что касается $U_{2,h}$, из леммы 3 с $q = 1$, леммы 1 и условия на $v(t,x)$ следует непосредственно, что существует независимая от n, k и k' постоянная $L_2 = L_2(\tau)$ такая, что

$$|U_{2,h}| \le L_2. \tag{126}$$

Чтобы оценить $|U_3|$, замечаем, что

$$|U_{3,jj'}| \le \Big(\sup_{(t,\xi)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} |\partial_{\xi_j} u^{[n]}(t,\xi)| \Big) \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-k'}} \Big(\prod_{h=1}^{k-k'} \Theta_n(y^h)\Big)\times$$
$$\times\Big| \sum_{h=1}^{k-k'} y_j^h \partial_{\xi_{j'}} a(\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'} \Big| dy^1\cdots dy^{k-k'}.$$

Так как в силу леммы 3 с $q=1$ $\sup_{(t,\xi)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} |\partial_{\xi_j} u^{[n]}(t,\xi)|$ ограничен независимой от n постоянной, а $\partial_{\xi_{j'}} a(\xi)\big|_{\xi=X_{k,y}^{n,h-1}(x)} \partial_{x_i}(X_{k,y}^{n,h-1}(x))_{j'}$ не зависит от y^h, то, учитывая условие (12) и лемму 2, аналогичным выводу (124) образом получим существование независимой от n, k и k' постоянной $L_3 = L_3(\tau)$ такой, что

$$|U_3| \le L_3\sqrt{|k\delta_n - k'\delta_n|}. \tag{127}$$

Наконец, в силу леммы 1 и условий на $a(\cdot)$ и $f(\cdot,\cdot)$, из выражений $U_{4,h}$ и U_5 следует, что существует независимые от n, k и k' постоянные $L_4 = L_4(\tau)$ и $L_5 = L_5(\tau)$ такие, что

$$|U_{4,h}| \le L_4, \qquad |U_5| \le L_5. \tag{128}$$

Объединяя соотношения (122) и (125)–(128), получаем

$$|\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]},x) - \partial_{x_i} u^{[n]} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x)| \le$$
$$\le (L_1 + L_2 + L_4)|k\delta_n - k'\delta_n| + (L_1 + L_3)\sqrt{|k\delta_n - k'\delta_n|} + L_5\delta_n. \tag{129}$$

Так как $\delta_n \le (k-k')\delta_n$, из (129) следует неравенство (119). Лемма доказана. □

Лемма 9. *Существует независимая от n постоянная $L'' = L''(\tau)$ такая, что при $0 \le t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \le \tau_+$ имеем*

$$|\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]},x) - \partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x)| \le L''\Big(|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}| + \sqrt{|t_k^{[n]} - t_{k'}^{[n]}|}\Big). \tag{130}$$

Доказательство. Пусть $0 \le t_{k'}^{[n]} < t_k^{[n]} \le \tau_+$. Дифференцируя обе части (122) по x_j ($j \in \{1,\cdots,d\}$), получим

$$\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]},x) - \partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t_{k'}^{[n]},x) =$$
$$= \partial_{x_j} U_1 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'} \partial_{x_j} U_{2,h} + \partial_{x_j} U_3 + \delta_n \sum_{h=1}^{k-k'-1} \partial_{x_j} U_{4,h} + \delta_n \partial_{x_j} U_5. \tag{131}$$

Нетрудно видеть, что в силу леммы 2 (для $q = 1, 2$) и леммы 3 (для $q = 1, 2, 3$) правая часть (131) оценится аналогично оценке правой части (122). Таким образом, получим неравенство (130) с независимой от n, k и k' постоянной $L'' = L''(\tau)$. Лемма доказана. $\square$

Вернемся к доказательству леммы 7. Из леммы 8 и определения (9) следует равномерная непрерывность функций $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i \in \{1, \cdots, d\}$, по $t \in [0, \tau]$, а из леммы 9 и определения (9) следует равномерная непрерывность функций $\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$, $i, j \in \{1, \cdots, d\}$, по $t \in [0, \tau]$, что завершает доказательство леммы 7. $\square$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 с $q = 3$. Пусть $\tau > 0$. Тогда функции $u(t, x)$, $\partial_{x_i} u(t, x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i} u(t, x)$ равномерно непрерывны на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Так как $u(t, x)$, $\partial_{x_i} u(t, x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i} u(t, x)$ являются пределом равномерной сходимости при $n \to \infty$ функций $u^{[n]}(t, x)$, $\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ и $\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[n]}(t, x)$ соответственно, то из леммы 7 следует утверждение следствия. $\square$

Лемма 10. *Пусть выполнены условия теоремы 1 с $q = 3$. Пусть $\tau > 0$. Тогда производная справа $(\partial_t u^{[n]})_+(t, x)$ функции $u^{[n]}(t, x)$ по t сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ к $-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa(x)\Delta u(t, x) + f(t, x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим

$$\varphi^{[n]}(t, x) = -v(t, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t, x) + \kappa(x)\Delta u^{[n]}(t, x) + f(t, x),$$

$$\varphi^{[\infty]}(t, x) = -v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa(x)\Delta u(t, x) + f(t, x).$$

Покажем, что существует такая числовая последовательность $\{\widetilde{\varepsilon}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, что $\widetilde{\varepsilon}(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t, x) - \varphi^{[\infty]}(t, x)| \leq \widetilde{\varepsilon}(n) \qquad \forall (t, x) \in [0, \tau] \times \mathbb{R}^d. \tag{132}$$

Пусть $0 \leq t \leq \tau$. Тогда для любого n найдется такой $t_k^{[n]}$, что $t_k^{[n]} \leq t < t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$, а согласно определению (9) имеем

$$(\partial_t u^{[n]})_+(t, x) = (\partial_t u^{[n]})_d(t_k^{[n]}, x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно лемме 6 имеем

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t_k^{[n]}, x) - \varphi^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq C\sqrt{\delta_n},$$

где C — независимая от n постоянная.

С другой стороны, так как $\varphi^{[n]}(t, x)$ равномерно непрерывна (см. следствие 2) и $|t - t_k^{[n]}| \leq \delta_n$, то можно найти такой $\widetilde{\varepsilon}_1(n)$, что $\widetilde{\varepsilon}_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$|\varphi^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \varphi^{[n]}(t, x)| \leq \widetilde{\varepsilon}_1(n).$$

Кроме того, из предложения 2 следует, что можно найти такие числа $\widetilde{\varepsilon}_2(n)$, $n = 1, 2, \cdots$, что $\widetilde{\varepsilon}_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$|\varphi^{[n]}(t,x) - \varphi^{[\infty]}(t,x)| \leq \widetilde{\varepsilon}_2(n).$$

Объединяя эти соотношения, получим

$$|(\partial_t u^{[n]})_+(t,x) - \varphi^{[\infty]}(t,x)| \leq C\sqrt{\delta_n} + \widetilde{\varepsilon}_1(n) + \widetilde{\varepsilon}_2(n).$$

Так как это неравенство справедливо для любого $(t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d$, получим (132) с $\widetilde{\varepsilon}(n) = C\sqrt{\delta_n} + \widetilde{\varepsilon}_1(n) + \widetilde{\varepsilon}_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$, что завершает доказательство леммы. □

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Обозначим через $\omega^*(t,x)$ предельную функцию последовательности $\{(\partial_t u^{[n]})_+(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда при $0 \leq t_1 < t_2 \leq \tau$ имеется

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^*(t,x)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} (\partial_t u^{[n]})_+(t,x)dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [u^{[n]}(t_2,x) - u^{[n]}(t_1,x)] = u(t_2,x) - u(t_1,x). \quad (133)$$

В силу следствия 2 и леммы 10 функция $\omega^*(t,x)$ равномерно непрерывна на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$. Таким образом, из (133) вытекает, что определяется производная $\partial_t u(t,x)$ на всем $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ и

$$\partial_t u(t,x) = \omega^*(t,x) = -v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) + \kappa(x)\Delta u(t,x) + f(t,x),$$

что вместе с предложениями 1 и 2 завершает доказательство теоремы 1. □

References

[1] L. Ait Mahiout, H. Fujita Yashima, *Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport*, Annales Math. Afr., **10** (2023), 105–124.

[2] M. Aouaouda, A. Ayadi, H. Fujita Yashima, *Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane.* Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **26**:2 (2022), 222–258.

[3] M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems* (Grundlehren der mathematischen Wissenschafften, 260), 3-rd Ed. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.

[4] Fujita Yashima, H., Ait-Mahiout, L. : *Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system*, Vestn. Buryat. Gos. Univ. Mat. Inf., **2023**:1 (2023), 22–36.

[5] Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. *Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space*, J. Math. Anal. Appl., **527**:2 (2023), 127507.

[6] Gherdaoui R., Selvaduray S., Fujita Yashima, H.: *Convergence of approximate solutions for trasport-diffusion equation in the half-space with Neumann condition.* To appear on Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.

[7] Guikhman, I., Skorokhod, A.: *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe). Mir (Moscou), 1980.

[8] Krylov, N. V. : *Lectures on elliptic and parabolic equations in Holder spaces.* AMS, 1996.

[9] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). AMS, 1968.

[10] G. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publ., 1996.

[11] Smaali, H., Fujita Yashima, H.: *Une generalisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'equation de transport-diffusion.* Annales Math. Afr., **9** (2021), 89–108.

[12] Taleb, L., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H: Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. Annales Math. Afr., **8** (2020), 53–73.

Amina Nemdili
Ecole Normale Supérieure de Constantine,
Ali Mendjeli,
25000, Constantine, Algeria
Email address: nemdili.amina@gmail.com, nemdili.amina@ensc.dz

Hisao Fujita Yashima
Ecole Normale Supérieure de Constantine,
Ali Mendjeli,
25000, Constantine, Algeria
Email address: hisaofujitayashima@yahoo.com, hisao.fujitayashima@nhsm.edu.dz