S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 00, № 0, стр. 000–000 (2024) УДК 512.55
https://doi.org/10.33048/semi.2024.20.... MSC 16P10,16W20

О КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Е.В. Журавлев, О.А. Филина

Представлено

Abstract: In this article we classified up to isomorphism all finite local rings R with Jacobson radical J and conditions:

$$\mathrm{char} R = 2, R/J = F \subseteq Z(R), \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

Keywords: finite rings, local rings.

1 Введение

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m, M_1', M_2', \ldots, M_m' \in M_n(F)$, $F = GF(p^r)$ – конечное поле, p – простое число, $m, n, r \in \mathbb{N}$. Упорядоченные последовательности матриц $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ и $(M_1', M_2', \ldots, M_m')$ назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n\times n}$ и $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ над полем F такие, что

$$M_k' = \sum_{i=1}^{m} q_{ki} P^T M_i P, \ k = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Zhuravlev, E.V., Filina O.A., On equivalence classes of matrices over a finite field of characteristic 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, https://rscf.ru/project/24-21-00155/.

Поступила .. 2024 г., опубликована .. 2024 г.

При $m = 1$ получаем:

$$M_1' = q_{11} P^T M_1 P. \tag{2}$$

В работах [1–8] найдены представители классов эквивалентности, определяемой равенством (2), для матриц порядка два и три. Для двоек матриц порядка два ($m = 2$, $n = 2$) эквивалентность определяется равенствами

$$\begin{cases} P^T \left(q_{11} M_1 + q_{12} M_2\right) P = M_1'; \\ P^T \left(q_{21} M_1 + q_{22} M_2\right) P = M_2'. \end{cases} \tag{3}$$

Этот случай полностью изучен в работах [9, 10].

При $m = 3$ и $n = 2$ тройки (M_1, M_2, M_3), (M_1', M_2', M_3') матриц второго порядка эквивалентны, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ и $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ такие, что

$$\begin{cases} P^T \left(q_{11} M_1 + q_{12} M_2 + q_{13} M_3\right) P = M_1'; \\ P^T \left(q_{21} M_1 + q_{22} M_2 + q_{23} M_3\right) P = M_2'; \\ P^T \left(q_{31} M_1 + q_{32} M_2 + q_{33} M_3\right) P = M_3'. \end{cases} \tag{4}$$

Наша цель – найти представители классов эквивалентности для данного случая при $p = 2$ и применить полученный результат для классификации конечных локальных колец характеристики 2. Настоящая работа является продолжением [11], в которой решена аналогичная задача при $p \neq 2$.

2 Эквивалентность матриц

Рассмотрим кольцо матриц $M_2(F)$ над конечным полем $F = GF(2^r)$. Так как симметрические матрицы образуют трехмерное пространство, то всякая тройка линейно независимых матриц является либо тройкой симметрических матриц и эквивалентна

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо содержит не менее двух симметрических матриц.

Пусть (A_1, A_2, B), (A_1', A_2', B') – тройки линейно независимых матриц, в которых A_1, A_2 и A_1', A_2' – симметрические, а B, B' – несимметрические матрицы. Если $(A_1, A_2, B) \sim (A_1', A_2', B')$, то из равенств (4) следует, что

(1) $q_{13} = q_{23} = 0$ (иначе A_1' или A_2' – несимметрическая матрица);
(2) $q_{33} \neq 0$ (иначе B' – симметрическая матрица).

Таким образом, равенства (4) примут вид

$$\begin{cases} P^T \left(q_{11} A_1 + q_{12} A_2\right) P = A_1'; \\ P^T \left(q_{21} A_1 + q_{22} A_2\right) P = A_2'; \\ P^T \left(q_{31} A_1 + q_{32} A_2 + q_{33} B\right) P = B'. \end{cases} \tag{5}$$

При этом, если $(A_1, A_2, B) \sim (A_1', A_2', B')$, то $(A_1, A_2) \sim (A_1', A_2')$ в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (3). Б. Корбас и Г. Вильямс в работе [10] указали представители классов такой эквивалентности для симметрических матриц второго порядка, а именно:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где $\delta = 0$;

2b) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где δ – некоторый элемент F, такой, что $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$.

Причем
$$\begin{cases} P^T\left(r_{11}A_1 + r_{12}A_2\right)P = A_1; \\ P^T\left(r_{21}A_1 + r_{22}A_2\right)P = A_2, \end{cases}$$
тогда и только тогда, когда
$$P = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$
$a, d, c \in F$, $ad \neq 0$, в первом случае, и
$$P = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a + sc & c\delta + a(s+1) \\ c & a \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} a^2 + c^2(\delta + s) & c^2 \\ a^2(s+1) + s\delta c^2 & a^2 + \delta c^2 \end{pmatrix},$$
где $\Delta = a^2 + ac + c^2\delta$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$, $s = 0, 1$, в остальных случаях (см. [10]). Такие матрицы P и R будем называть стабилизирующими. Причем, если P и $R = (r_{ij})$ – стабилизирующие матрицы для пары симметрических матриц (A_1A_2), то
$$P \text{ и } Q = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$
являются стабилизирующими матрицами для (A_1, A_2, B).

Пусть S – множество из трех пар симметрических матриц, указанных выше. Далее, рассмотрим произвольную тройку матриц (A_1, A_2, B), где $(A_1, A_2) \in S$, $B = (b_{ij})$, $b_{12} \neq b_{21}$. Полагая
$$P = E,\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{12}/(b_{12}+b_{21}) & b_{11}/(b_{12}+b_{21}) & 1/(b_{12}+b_{21}) \end{pmatrix},$$
получаем
$$(A_1, A_2, B) \sim \Pi = \left(A_1, A_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\right),$$
где $b = (b_{12}a_1 + b_{22} + b_{11}a_2)/(b_{12} + b_{21})$, $(a_1, a_2) \in \{(0,0), (1,0), (1,\delta)\}$. Далее рассмотрим каждый случай в отдельности.

Случай 1. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если $b = 0$, то

$$\Pi = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{6}$$

Если $b \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{7}$$

Докажем, что тройки (6) и (7) неэквивалентны. Предположим противное. Пусть существует пара

$$P = \frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

$a, d, c \in F$, $ad \neq 0$, стабилизирующая A_1, A_2, такая, что (6) и (7) эквивалентны. Тогда равенство $P^T (q_{31}A_1 + q_{32}A_2 + q_{33}B) P = B'$ системы (5) примет вид

$$\begin{cases} (d^2 q_{32} + c(c+d)q_{33})/(a^2 d^2) = 0; \\ (dq_{31} + cq_{33})/(ad^2) = 0; \\ (dq_{31} + (c+d)q_{33})/(ad^2) = 0; \\ q_{33}/d^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $q_{33} = 0$. Противоречие.

Случай 2. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где $\delta = 0$ или δ – некоторый элемент F, такой, что $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$.

Полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим тройки вида

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right), \tag{8}$$

где β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $F = \langle F, + \rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$. Докажем, что тройки вида

(8) неэквивалентны между собой. Предположим противное. Пусть существует пара

$$P = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a+sc & c\delta + a(s+1) \\ c & a \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} a^2+c^2(\delta+s) & c^2 \\ a^2(s+1)+s\delta c^2 & a^2+\delta c^2 \end{pmatrix},$$

$a, c \in F$, $\Delta = a^2 + ac + c^2\delta \neq 0$, $s = 0, 1$, стабилизирующая A_1, A_2, такая, что для некоторых $\beta, \beta' \in F$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta' \end{pmatrix}\right).$$

Тогда равенство $P^T(q_{31}A_1 + q_{32}A_2 + q_{33}B)P = B'$ системы (5) примет вид

$$\begin{cases} c^2q_{31} + (c^2(s+\delta)+a^2)q_{32} + ((s+\beta)c^2+ac)q_{33} = 0; \\ (a^2+\delta c^2)q_{31} + (\delta sc^2 + a^2(s+1))q_{32} + (\delta c^2 + a(s+\beta+1)c)q_{33} = 0; \\ ((a^2+\delta c^2)q_{31} + (\delta sc^2 + a^2(s+1))q_{32} + (a^2 + c(s+\beta)a)q_{33})/\Delta^2 = 1; \\ (a^2q_{31} + (a^2(s+\delta+1)+c^2\delta^2)q_{32} + ((s+\beta+1)a^2 + c\delta a)q_{33})/\Delta^2 = \beta'. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} q_{31} = c(c\delta + a\beta + cs\beta); \\ q_{32} = c(a + c(s+\beta+1)); \\ q_{33} = \Delta. \end{cases}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta+s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta' \end{pmatrix},\ s = 0, 1.$$

Следовательно, β и β' лежат в одном смежном классе группы $\langle F, +\rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$. Противоречие.

Теорема 1. *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на тройках матриц порядка два посредством соотношений (4):*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, *где $\delta = 0$ или δ – некоторый элемент F, такой, что $\delta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$, β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $\langle F, +\rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$;*

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $\delta = 0$ *или* δ – *некоторый элемент* F, *такой, что* $\delta \neq x^2 + x$ *для всех* $x \in F$;

(7) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(8) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ f & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $f \in F$, $f \neq 1$;

(9) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(10) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $\delta = 0$ *или* δ – *некоторый элемент* F, *такой, что* $\delta \neq x^2 + x$ *для всех* $x \in F$;

(11) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}f & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $f = 0, 1$;

(12) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t & 1\\ 0 & \varepsilon_t\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $t \in F$, $t \neq 0, 1$, ε_t – *такой фиксированный элемент для каждого значения* t, *что многочлен* $tx^2 + (t+1)x + \varepsilon_t \in F[x]$ *является неприводимым в* $F[x]$;

(13) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(14) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(15) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(16) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & f\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *где* $f \in F$;

(17) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Доказательство. Если ранг тройки матриц равен трем, то она эквивалентна одной из троек 1)-4). Если ранг ненулевой тройки матриц меньше трех, то она либо эквивалента тройке $(A_1, A_2, 0)$, где A_1, A_2 – линейно независимы, либо $(A_1, 0, 0)$, где $A_1 \neq 0$. Классификация таких троек сводится к рассмотрению эквивалентности, определяемой соотношениями (2) и (3). Эта задача была полностью решена в работе [10], результат ее решения приведен в пунктах 5)-16) (см. [10], теорема 3, стр. 245). □

В работе [12] автор с помощью пакета прикладных программ Matlab нашел 5 троек линейно независимых матриц, являющихся представителями классов эквивалентности в смысле равенств (4), при $p = 2$ и сделал предположение о том, что при нечетном значении p их количество равно p^r+4. Теорема 1 (предполагающая $p=2$) и результаты работы [11] (при $p\neq 2$) подтверждают это предположение и вычисления.

3 Классификация конечных колец

Пусть R – конечное локальное кольцо с единицей, $\mathrm{char} R = p$, $J^3=0$, $Z(R)$ – центр кольца и $R/J = GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$. Тогда R – конечномерное векторное пространство над F и

$$R = F \oplus J,\ J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \ldots \oplus Fu_n \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus \ldots \oplus Fv_m,$$

где $\dim_F J/J^2 = n$, $\dim_F J^2 = m$ и $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ – базис J над F, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in J\setminus J^2$, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in J^2$, $n, m \in \mathbb{N}$ (см. [15,16]). Пусть

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + \ldots + m_{ij}^{(m)} v_m \tag{9}$$

для некоторых $m_{ij}^{(k)} \in F$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$, $m \le n^2$. Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант: $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$. Такие матрицы линейно независимы и, если R – коммутативно, то матрицы являются симметрическими. По всякой последовательности $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$, линейно независимых матриц однозначно определяется рассмотренное выше кольцо с умножением (9).

Пусть R и R' – произвольные кольца, указанного выше типа, с матрицами умножения $M_1, M_2, \ldots, M_m$ и $M'_1, M'_2, \ldots M'_m$, соответственно.

Теорема 2. [15] *$R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P=(p_{ij})_{n\times n}$, $Q=(q_{ij})_{m\times m}$ над полем F и автоморфизм ρ поля F такие, что*

$$M'_k = \sum_{i=1}^{m} q_{ki} P^T M_i^{\rho} P,\ k=\overline{1,m}, \tag{10}$$

где $M_k^{\rho} = \left(\left(m_{ij}^{(k)}\right)^{\rho}\right)$, $k=\overline{1,m}$.

Равенства (10) отличаются от (1) только наличием автоморфизма ρ поля F. Пусть $p=2$, $F=GF(2^r)$. Если δ – некоторый элемент F, такой, что $\delta \neq x^2+x$ для всех $x \in F$, то для любого автоморфизма ρ поля F элемент δ^{ρ} обладает этим же свойством. Пусть Σ – множество всех таких элементов поля F, что для любых $a,b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^{\rho}=b$ (равносильно – для любых $a,b\in\Sigma$ не существует такого натурального числа k, что $a^{2^k}=b$) и $a \neq b+1$. Используя линейно независимые тройки матриц из теоремы 1 и учитывая действие ρ мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей и* *условиями:*

$$\mathrm{char}R = 2,\ R/J = F \subseteq Z(R),\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0.$$

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$, *где* $\beta \in \Sigma$, $\delta = 0$ *или* δ *– некоторый элемент* F*, такой, что* $\delta \neq x^2 + x$ *для всех* $x \in F$*;*

Таким образом, теорема 3 работы [11], сформулированная для $p \neq 2$, и теорема 3 настоящей работы дают полное описание конечных локальных колец с единицей и условиями $R/J = F \subseteq Z(R)$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2 = 3$, $J^3 = 0$.

В настоящее время классифицированы все конечные локальные кольца с единицей порядка p^n, при $n \leq 5$ (см. [6, 7]). Вопрос о классификации колец порядка p^6 остается открытым. Такие кольца, с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности четыре, были изучены в работах [13, 14]. В 2023 году, в работе [17], авторы проделали большую работу по классификации колец порядка p^6 с различным индексом нильпотентности радикала и значением характеристики. В заключении ими было указано на необходимость применения новых методов и обширной работы для классификации колец с условиями $\dim_{Z_p} J/J^2 = 2$, $\dim_{Z_p} J^2 = 3$, $J^3 = 0$, где $R/J = Z_p$. Результат, полученный нами в настоящей работе, полностью решает указанную проблему.

Автор выражает благодарность профессору Ю.Н. Мальцеву за внимание, проявленное к данной работе.

References

[1] P.S. Bremser, *Congruence classes of matrices in $GL_2(F_q)$*, Discrete Math., **118**:1-3 (1993), 243–249. Zbl 0781.15007

[2] G.D. Williams, *Congruence of (2×2) matrices*, Discrete Math., **224**:1-3 (2000), 293–297. Zbl 0999.15022

[3] B. Gorbas, G.D. Williams, *Matrix representatives for three-dimensional bilinear forms over finite fields*, Discrete Math., **185**:1-3 (1998), 51–61. Zbl 0951.11014

[4] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q odd)*, Discrete Math., **219**:1-3 (2000), 37–47. Zbl 0957.15007

[5] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q even)*, Discrete Math., **257**:1 (2002), 15–27. Zbl 1014.15010

[6] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. I. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 677–690. Zbl 1017.16014
[7] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. II. Local rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 691–704. Zbl 1017.16015
[8] C.J. Chikunji, *On a class of rings of order p^5*, Math. J. Okayama Univ., **45** (2003), 59–71. Zbl 1055.16023
[9] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic $\neq 2$)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 225–235. Zbl 0929.16029
[10] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 237–249. Zbl 0929.16030
[11] E.V. Zhuravlev, *On equivalence classes of matrices over a finite field of odd characteristic*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20** (2023), 1200–1210.
[12] C.J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*, 2^{nd} international conference on the teaching of mathematic (Greece), (2002).
[13] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29. Zbl 1117.1600
[14] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638. Zbl 1383.1300
[15] C.J. Chikunji, *On a class of finite rings*, Commun. Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081. Zbl 0942.16027
[16] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compos. Math., **21** (1969), 195–229. Zbl 0179.33602
[17] C. Akers, S. Szabo, *A partial classification of local rings of order p^6*, Involve a Journal of Mathematics, **16**:1 (2023), 151–165. Zbl 1514.16019

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru

Olga Alexandrovna Filina
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: olya-filina@mail.ru