S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 35G15

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА И ЧЕБЫШЕВА

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ

Abstract. The paper provides a solution to the boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation of the fourth order within the framework of the Kirchhoff-Love theory using Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind. The function approximating the solution of the equation in question is represented as a finite sum of a series of these polynomials for each independent variable in combination with matrix transformations and properties of Legendre and Chebyshev polynomials. It is assumed that the integration area is a rectangle. The boundary value problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with respect to the coefficients in the decomposition of the desired function by these polynomials. The results of calculating deflections in a rectangular thin plate clamped along the contour due to the action of a distributed transverse load using the proposed method are presented. As the comparison showed, the constructed solutions coincide with the analytical solutions of model boundary value problems with a high degree of accuracy.

Keywords: inhomogeneous elliptic equation of high order, orthogonal polynomials, bending of thin isotropic plates.

Germider, O.V., Popov, V.N. On solving a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation using Legendre and Chebyshev polynomials.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 24-21-00381 "Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики".

Поступила 12 июля 2022 г., опубликована .

1. Введение

Теория краевых задач для эллиптических уравнений высокого порядка в настоящее время интенсивно развивается. Построение решения этих уравнений необходимо, в частности, для моделирования напряженно-деформированных состояний тонких изотропных пластин, которые находятся под действием заданных нагрузок. Такие пластины, обладая достаточной прочностью, используются при проектировании конструкций в авиационной и судостроительной промышленностях [1]. Величины прогибов пластин определяются согласно теории Кирхгофа–Лява на основе решения бигармонического уравнения [2] с граничными условиями защемленного, шарнирно закрепленного и свободного края пластин. Бигармоническое уравнение рассматривалось в ряде работ [1]-[11]. Для получения решения в [3]-[5] использован проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов, в [6] и [7] – спектральные методы, в [8] и [9] – методы конечных элементов и разностей, соответственно, [10] – метод сплайн-коллокации, в [11] решение построено в виде рядов по собственным функциям Папковича-Фадля. Прогиб пластин при жестком защемлении всех сторон относится к сложным вычислительным случаям [1] и для его определения предлагаются новые подходы к построению решения бигармонического уравнения. Представленная работа является продолжением проводимых исследований в этом направлении. Построение решения краевой задачи изгиба прямоугольной тонкой изотропной пластины при воздействии нормальной распределенной по ее поверхности нагрузки выполнено методом коллокации с использованием многочленов Лежандра и Чебышева первого рода. Рассмотрены такие граничные условия как защемление по всему контуру пластины, шарнирное закрепление на краях и их комбинация. В качестве точек коллокации использованы нули многочленов Лежандра и Чебышева. Решение неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка представлено в виде усеченного ряда по этим многочленам для каждой независимой переменной. Коэффициенты в этом разложении искомой функции получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Представлены результаты расчетов с использованием выбранных точек коллокаций. Проведен анализ полученных результатов вычислений с аналитическими решениями краевых задач и их полиномиальными интерполяциями на основе значений функций в этих точках с применением свойств многочленов Лежандра и Чебышева. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц, которые записываются в явном виде. Показано, что построенные решения краевых задач с использованием многочленов Лежандра и Чебышева с высокой степенью точности совпадают с соответствующими аналитическими решениями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа [2]

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где $\omega(x,y)$ – прогиб пластины, $q(x,y)$ – внешняя поперечная нагрузка, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

В качестве граничных условий используем защемление по контуру рассматриваемой пластины [2]:

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{2}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad y = 0,\, d_2, \tag{3}$$

шарнирное закрепление

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{4}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0,\, d_2, \tag{5}$$

и их комбинацию

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{6}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0,\, d_2. \tag{7}$$

Покажем принцип построения решений для краевой задачи (1)-(3) с использованием многочленов Лежандра и Чебышева.

3. Построение решение краевой задачи с использованием полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему и определяются на отрезке $t \in [-1,\, 1]$ формулой Родрига [12]

$$P_0(t) = 1, \quad P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \left(t^2 - 1\right)^j, \quad j \geq 1.$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [12]

$$P_1(t) = t, \quad (j+1)P_{j+1}(t) = (2j+1)tP_j(t) - jP_{j-1}(t), \quad j \geq 1.$$

Для представления функции $\omega(x, y)$ с $x \in [0,\, d_1]$ и $y \in [0,\, d_2]$ в виде частичной суммы ряда Фурье-Лежандра [12] введем новые переменные $x_i \in [-1,\, 1]$ $(i = 1, 2)$

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1,\; x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1.$$

Краевая задача (1)-(3) в новых переменных примет вид

$$\kappa_1 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \kappa_3 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \kappa_2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad \kappa_i = \frac{16}{d_i^4},\; (i = 1, 2), \quad \kappa_3 = \frac{32}{d_2^2 d_1^2}, \tag{8}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1,\, 1, \tag{9}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1,\, 1. \tag{10}$$

Представим $\omega(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Лежандра:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_i=0\\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} P_{k_1}(x_1) P_{k_2}(x_2) = \mathbf{P_1}(x_1) \otimes \mathbf{P_2}(x_2)\mathbf{A}, \tag{11}$$

где $\mathbf{P_i}(x_i)$ – матрица-строка размером $1 \times n_i'$ ($n_i' = n_i + 1$, $i = 1, 2$):

$$\mathbf{P_i}(x_i) = \left(P_0(x_i)\, P_1(x_i) \ldots P_{n_i-1}(x_i)\, P_{n_i}(x_i)\right),$$

$\mathbf{A}$ – матрица-столбец, имеющая размер $n_1' n_2' \times 1$, элементами которой являются коэффициенты $a_{k_1 k_2}$ в разложении (11):

$$\mathbf{A} = \left(a_{00}\, a_{01} \ldots a_{n_1 n_2 - 1}\, a_{n_1 n_2}\right)^T.$$

знаком $\otimes$ в (11) обозначено тензорное умножение двух матриц [15].

Выберем в бигармоническом уравнении (8) в качестве точек коллокаций для переменных x_1 и x_2 нули многочленов P_{n_1+1} и P_{n_2+1} соответственно. Находим их согласно [13] как собственные значения квадратных симметричных матриц $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ размерами $n_i' \times n_i'$ с ненулевыми элементами $L_{i, k_i+1\, k_i} = L_{i, k_i\, k_i+1} = (k_i + 1)/\sqrt{4(k_i+1)^2 - 1}$ ($k_i = \overline{0,\, n_i - 1}$, $i = 1, 2$) [13]. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов осуществляем с нуля. Выбранные точки коллокаций симметричны относительно нуля.

В случае $n_1 = 9$ матрица $\mathbf{L_1}$ имеет вид

$$\mathbf{L_1} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & \frac{6\sqrt{143}}{143} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\sqrt{33}}{11} & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} & 0
\end{pmatrix},$$

собственные значения матрицы $\mathbf{L_1}$, вычисленные с точностью 10^{-4}: $x_{1,9} = -x_{1,0} = 0.9739$, $x_{1,8} = -x_{1,1} = 0.8651$, $x_{1,7} = -x_{1,2} = 0.6794$, $x_{1,6} = -x_{1,3} = 0.4334$ и $x_{1,5} = -x_{1,4} = 0.1489$. При $n_1 = 10$ получаем $x_{1,10} = -x_{1,0} = 0.9782$, $x_{1,9} = -x_{1,1} = 0.8871$, $x_{1,8} = -x_{1,2} = 0.7302$, $x_{1,7} = -x_{1,3} = 0.5191$, $x_{1,6} = -x_{1,4} = 0.2695$ и $x_{1,5} = 0$.

Используя равенство [13]

$$\frac{\mathrm{d}P_{j_i}}{\mathrm{d}x_i} = \sum_{\substack{k_i=0\\ j_i+k_i-\text{неч.}}}^{j_i-1} (2k_i+1) P_{k_i}(x_i), \quad j_i \geq 1, \tag{12}$$

производную $\mathbf{P_i}(x_i)$ по переменой x_i запишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P_i}}{\mathrm{d}x_i} = \mathbf{P_i}\mathbf{J_i}, \tag{13}$$

где $\mathbf{J_i}$ верхнетреугольная матрица размером $n'_i \times n'_i$ с ненулевыми элементами $L_{i,k_i\,j_i} = 2k_i + 1$ ($j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ – неч., j_i, $k_i = \overline{0,\, n_i}$, $i = 1, 2$).

В случае $n_1 = 9$ матрица $\mathbf{J_1}$ имеет вид

$$\mathbf{J_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторую и четвертую производную $\mathbf{P_i}(x_i)$ по каждой переменной x_i находим, соответственно, как

$$\frac{\mathrm{d}^j\mathbf{P_i}}{\mathrm{d}x_i^j} = \mathbf{P_i}\mathbf{J_i}^j, \quad j = 2, 4;\ i = 1, 2. \tag{14}$$

Подставляя (11), (13) и (14) в уравнение (8) в точках коллокаций x_{i,k_i} ($k_i = \overline{0,\, n_i}$, $i = 1, 2$), приходим к системе линейных $n'_1 n'_2$-уравнений, в которой согласно граничным условиям (9) и (10) осуществляем замену уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}$ или $x_i = x_{i,n_i}$, на уравнения

$$\mathbf{P_1}(-1) \otimes \mathbf{P_2}(x_{2,k_2})\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P_1}(1) \otimes \mathbf{P_2}(x_{2,k_2})\mathbf{A} = 0, \tag{15}$$

$$\mathbf{P_1}(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P_2}(-1)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P_1}(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P_2}(1)\mathbf{A} = 0, \tag{16}$$

а в точках $x_{i,1}$ и x_{i,n_i-1} – на уравнения

$$\mathbf{P_1}(-1)\mathbf{J_1} \otimes \mathbf{P_2}(x_{2,k_2})\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P_1}(1)\mathbf{J_1} \otimes \mathbf{P_2}(x_{2,k_2})\mathbf{A} = 0, \tag{17}$$

$$\mathbf{P_1}(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P_2}(-1)\mathbf{J_2})\,\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P_1}(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P_2}(1)\mathbf{J_2})\,\mathbf{A} = 0. \tag{18}$$

Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{l=1}^{5} \mathbf{B_l}, \tag{19}$$

где $\mathbf{B_l}$ ($l = \overline{1,5}$) – квадратные матрицы, имеющие размер $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$:

$$\mathbf{B_1} = \kappa_1 \mathbf{G''_1}\mathbf{J_1}^4 \otimes \mathbf{G''_2}, \quad \mathbf{B_3} = \kappa_2 \mathbf{G''_1} \otimes \left(\mathbf{G''_2}\mathbf{J_2}^4\right),$$

$$\mathbf{B_2} = \kappa_3 \mathbf{G''_1}\mathbf{J_1}^2 \otimes \left(\mathbf{G''_2}\mathbf{J_2}^2\right),$$

$$\mathbf{B_4} = \mathbf{G_3} \otimes \mathbf{G_2} + \mathbf{G_1} \otimes \mathbf{G_4}, \quad \mathbf{B_5} = \mathbf{G_5}\mathbf{J_1} \otimes \mathbf{G_2} + \mathbf{G_1} \otimes (\mathbf{G_6}\mathbf{J_2}).$$

Здесь $\mathbf{G_i}$ ($i = 1, 2$) – квадратные матрицы размером $n'_i \times n'_i$, в которых k_i-строки равны соответственно $\mathbf{P_i}(x_{i,k_i})$ ($k_i = \overline{0, n_i}$). Матрица $\mathbf{G''_i}$ получена из $\mathbf{G_i}$ путем замены первых и последних двух строк в $\mathbf{G_i}$ ($i = 1, 2$) на нулевые. Квадратные $n_1' \times n_1'$-матрицы $\mathbf{G_3}$ и $\mathbf{G_5}$ содержат только две ненулевые строки с элементами: $G_{3,0,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}$, $G_{3,n_1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1$, $G_{5,1,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}$, $G_{3,n_1-1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1$ ($j_1 = \overline{0, n_1}$). Подобные структуры имеют квадратные $n_2' \times n_2'$-матрицы $\mathbf{G_4}$ и $\mathbf{G_6}$. Ненулевые элементы матрицы-столбца $\mathbf{F} = (f_{00}\, f_{01}\, \dots\, f_{n_1\, n_2})^T$ определяются как $f_{k_1\, k_2} = q(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2}))/D$, где $k_i = \overline{2, n_i - 2}$, $i = 1, 2$.

Решение уравнения (19) находим LU-методом. Восстановив элементы матрицы $\mathbf{A}$, функцию $w(x_1, x_2)$ получаем, используя (11).

4. Построение решение краевой задачи с использованием полиномов Чебышева

Полиномы Чебышева образуют ортогональную систему и определяются на отрезке $t \in [-1,\, 1]$ согласно [14] как

(20) $$T_j(t) = \cos(j \arccos t), \quad j \geq 0.$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [14]

(21) $$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{j+1}(t) = 2tT_j(t) - T_{j-1}(t), \quad j \geq 1.$$

Представим $\omega(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Чебышева:

(22) $$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = \mathbf{T_1}(x_1) \otimes \mathbf{T_2}(x_2) \mathbf{A},$$

$$\mathbf{T_i}(x_i) = \left(T_0(x_i)\, T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i)\, T_{n_i}(x_i)\right), \quad i = 1, 2.$$

В качестве точек коллокаций для переменных x_1 и x_2 в этом случае выберем нули многочленов T_{n_1+1} и T_{n_2+1} соответственно:

(23) $$x^*_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i},\ i = 1, 2.$$

Точки (23) расположены симметричны относительно нуля. При $n_1 = 9$ вычисляя по (23) с точностью 10^{-4}, имеем: $x^*_{1,9} = -x^*_{1,0} = 0.9877$, $x^*_{1,8} = -x^*_{1,1} = 0.8910$, $x^*_{1,7} = -x^*_{1,2} = 0.7070$, $x^*_{1,6} = -x^*_{1,3} = 0.4540$ и $x^*_{1,5} = -x^*_{1,4} = 0.1564$. При $n_1 = 10$ получаем $x^*_{1,10} = -x^*_{1,0} = 0.9898$, $x^*_{1,9} = -x^*_{1,1} = 0.9095$, $x^*_{1,8} = -x^*_{1,2} = 0.7556$, $x^*_{1,7} = -x^*_{1,3} = 0.5405$, $x^*_{1,6} = -x^*_{1,4} = 0.2819$ и $x^*_{1,5} = 0$.

Подстановляя (23) в (20), имеем

(24) $$T_{j_i}(x^*_{k_i}) = \cos\left(\frac{\pi j_i(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0,\, n_i},\ i = 1, 2.$$

Используя равенство [13]

(25) $$\frac{\mathrm{d}T_{j_i}}{\mathrm{d}x_i} = 2j_i \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i+k_i - \text{неч.}}}^{j_i-1} c_{k_i} T_{k_i}(x_i), \quad j_i \geq 1,$$

где $c_0 = 2$ и $c_{k_i} = 1$ ($k_i > 0$), производную $\mathbf{T_i}(x_i)$ по переменой x_i запишем в виде произведения

(26) $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T_i}}{\mathrm{d}x_i} = \mathbf{T_i J_i},$$

где $\mathbf{J_i}$ – верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами $L_{i,0\,j_i} = j_i$ (j_i – неч., $j_i = \overline{1,\,n_i}$) и $L_{i,k_i\,j_i} = 2j_i$ ($j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ – неч., $j_i,\, k_i = \overline{1,\,n_i}$, $i = 1, 2$).

При $n_1 = 9$ матрица $\mathbf{J_1}$ в этом случае имеет вид

$$\mathbf{J_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для второй и четвертой производной $\mathbf{T_i}(x_i)$ по x_i получаем

$$\frac{\mathrm{d}^j\mathbf{T_i}}{\mathrm{d}x_i^j} = \mathbf{T_i}\mathbf{J_i}^j, \quad j = 2, 4;\ i = 1, 2. \tag{27}$$

Подставляя (22), (26) и (27) в уравнение (8) в точках коллокаций (23), приходим к системе (19), в которой осуществлена замена уравнений в точках, для которых $x_i = x^*_{i,0},\ x^*_{i,1}$ и $x_i = x^*_{i,n_i-1},\ x^*_{i,n_i}$, на уравнения (9) и (10). Решение уравнения (19) находим LU-методом. Восстановив элементы матрицы $\mathbf{A}$, функцию $w(x_1, x_2)$ в этом случае получаем, используя (22).

5. Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим изгиб прямоугольной изотропной пластины, все края которой защемлены находящейся под действием поперечной нагрузки

$$q(x,y) = q_0 \left(\cos\left(\frac{\pi(2x-d_1)}{d_1}\right) \cos\left(\frac{\pi(2y-d_2)}{d_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2+d_2^2)^2} \left(\frac{1}{d_1^2}\cos\left(\frac{\pi(2x-d_1)}{d_1}\right) + \frac{1}{d_2^2}\cos\left(\frac{\pi(2y-d_2)}{d_2}\right)\right)\right),$$

где $q_0 = 0.1$ МПа.

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1)-(3) имеет вид

$$\omega(x,y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2+d_2^2)^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2x-d_1)}{d_1}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2y-d_2)}{d_2}\right)\right). \tag{28}$$

При проведении вычислений использованы значения физических параметров из [3] и [4]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $n_{1,2} = n$. В таблице 1 представлены результаты вычислений с использованием полиномиальных аппроксимаций (11) и (22) при выборе в качестве точек коллокаций в (8)-(10) нулей полиномов Лежандра и Чебышева (23), соответственно. Для расчета погрешностей построенных решений (11) и (22) в сравнении с аналитическим решением (28), следуя [3] и [4], применены 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j):

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max\limits_{i,j} |\omega(x_i, y_j) - w(x_1(x_i), x_2(y_j))|}{\max\limits_{i,j} |\omega(x_i, y_j)|}. \tag{29}$$

В таблице 1 приведены значения величин погрешностей вычислений между последовательными итерациями $n-1$ и n:

$$\|E_n\| = \frac{\max\limits_{i,j} |w_n(x_1(x_i), x_2(y_j)) - w_{n-1}(x_1(x_i), x_2(y_j))|}{\max\limits_{i,j} |w_n(x_1(x_i), x_2(y_j))|}. \tag{30}$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений с использованием полиномиальных интерполяций (11) и (22) функции (28) на основе ее значений в точках, которые соответствуют нулям полиномов Лежандра и Чебышева. Погрешности полученных функций обозначены $\|E_{p,n}\|_\infty$. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц $\mathbf{G_1}^{-1}$ и $\mathbf{G_2}^{-1}$. В случае полиномиальной интерполяции Лежандра (11) получаем

$$\mathbf{G_1} \otimes \mathbf{G_2 A} = \mathbf{W},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_2}^{-1}\mathbf{W}, \tag{31}$$

где $\mathbf{W} = (\omega(x(x_{1,0}), y(x_{2,0}))\, \omega(x(x_{1,0}), y(x_{2,1}))\, \ldots\, \omega(x(x_{1,n_1}), y(x_{2,n_2})))^T$.

Используя свойство конечных сумм для многочленов Лежандра [13] и [16]

$$\sum_{k=0}^{n_1} P_{j_1}(x_{1,k}) P_{j_2}(x_{1,k}) w_P(x_{1,k}) = \gamma_{P,j_1} \delta_{j_1,j_2}, \quad \gamma_{P,j} = \frac{2}{2j+1},$$

где δ_{j_1,j_2} – символ Кронекера,

$$w_P(x_{1,k}) = \frac{2}{(1 - x_{1,k}^2)\left(P'_{n_1+1}(x_{1,k})\right)^2} = \frac{2(1 - x_{1,k}^2)}{(n_1+2)^2 P_{n_1+2}^2(x_{1,k})},$$

находим обратные матрицы $\mathbf{G_1}^{-1}$ и $\mathbf{G_2}^{-1}$: $(G_i^{-1})_{j_i,k_i} = G_{i,k_i,j_i} w_P(x_{i,k_i})/\gamma_{P,j_i}$ ($j_i,\ k_i = \overline{0, n_i},\ i = 1, 2$).

В случае полиномиальной интерполяции Чебышева (22) в точках (23) с помощью равенства [13] и [14]:

$$\sum_{k=0}^{n_1} T_{j_1}(x_{1,k}^*) T_{j_2}(x_{1,k}^*) w_T(x_{1,k}^*) = \gamma_{T,j_1} \delta_{j_1,j_2},$$

$$\gamma_{T,0} = \pi, \quad \gamma_{T,j} = \frac{\pi}{2},\ j > 0 \quad w_T(x_{1,k}) = \frac{\pi}{n_1+1},$$

получаем обратную матрицу $\mathbf{G_i}^{-1}$ путем транспонирования $\mathbf{G_i}$, умножения $\mathbf{G_i}^T$ на $2/(n_i+1)$ $(i = 1, 2)$ и деления элементов первой строки этой матрицы на 2.

Во втором и пятом столбцах таблицы 1 приведены погрешности вычислений $\|E_n\|_\infty$ по формуле (29) с использованием полиномиальных аппроксимаций Лежандра (11) и Чебышева (22) решения краевой задачи (8)-(10) в сравнении с аналитическим решением (28) этой задачи, в третьем и шестом столбцах таблицы 1 представлены погрешности вычислений $\|E_n\|$ по формуле (30) между последовательными итерациями $n-1$ и n при построении решения, в четвертом и седьмом столбцах указаны погрешности вычислений $\|E_{p,n}\|_\infty$ с использованием полиномиальных интерполяций функции (28) с использованием обратных матриц.

Таблица 1. Значения погрешностей для защемленной по контуру пластины

n	(11)			(22), (23)		
	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$
9	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
11	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-7}$
18	$5.9 \cdot 10^{-12}$	$3.8 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$9.4 \cdot 10^{-15}$

Рассмотрим изгиб срединной плоскости прямоугольной изотропной пластины, все края которой шарнирно закреплены (4) и (5) и которая находится под действием поперечной нагрузки $q(x,y) = q_0 \sin(\pi x/d_1)\sin(\pi y/d_2)$.

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1), (4) и (5) имеет вид [2]

$$\omega(x,y) = \frac{q(x,y) d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \tag{32}$$

В таблице 2 представлены результаты вычислений в сравнении с [3]. Приведем сравнение с результатами, полученные в [4] и [5]. В работе [4] значение относительной погрешности вычислений интегральным методом коллокации и наименьших квадратов $\|E_n\|_\infty = 7.58 \cdot 10^{-13}$ достигнуто с использованием сетки 16×16 и локальной системы линейных $l = (K+1)(K+2)/2$ уравнений при $K = 10$. Для достижения относительной погрешности методом коллокации и наименьших квадратов в пространстве полиномов Чебышева решения значения $\|E_n\|_\infty = 1.11 \cdot 10^{-7}$ в [5] применена сетка 16×16, в каждой ячейке которой записана локальная система линейных алгебраических уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными, где $K = 7$ – степень старшего полинома Чебышева.

Из представленных результатов следует, что для построения решения предлагаемым в настоящей работе методом необходимо значительно меньше точек дискретного спектра по сравнению с [3]-[5] и ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (19), к решению которой сведена краевая задача (1), (4) и (5), равен $(n+1)^2$.

Таблица 2. Значения погрешностей для шарнирного закрепления

n	(11)			(22), (23)			[3]
	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$	
9	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
11	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	–
18	$5.8 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$2.3 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$7.8 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$

Рассмотрим случай, когда на двух краях $x = 0$ и $x = d_1$ пластина защемлена (6), на других краях шарнирно опирается (7). На прямоугольную пластину действует распределенная нагрузка

$$q(x,y) = q_0 \left(\frac{d_1^4}{(d_1^2 + 4d_2^2)^2} - \cos\left(\frac{2\pi x}{d_1}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

Аналитическое решение задачи (1), (6) и (7) имеет вид

$$\omega(x,y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + 4d_2^2)^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

Таблица 3. Значения погрешности для граничного условия (6) и (7)

n	(11)			(22), (23)		
	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$	$\|E_n\|_\infty$	$\|E_n\|$	$\|E_{p,n}\|_\infty$
9	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
11	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$
18	$6.9 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$

Из таблиц 1-3 видно, что решения краевых задач, полученные представленным методом с использованием нулей многочленов Лежандра и Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n. Значения относительных погрешностей этих решений приближаются к соответствующим значениям погрешностей полиномиальных интерполяций функций решений, что говорит об хороших аппроксимационных свойствах метода.

6. Заключение

В работе с использованием многочленов Лежандра и Чебышева построено решение краевой задачи для неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка в рамках теории Кирхгофа–Лява. Показано, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями краевых задач при сравнительно небольших значениях степеней этих многочленов в разложении искомой функции, определяющей решение эллиптического уравнения.

References

[1] G. O. Altsybeev, D. P. Goloskokov, A.V. Matrosov, *Metod superpozitsii v zadache izgiba zashchemlennoy po konturu tonkoy izotropnoy plastinki*, Vestn. S.-Peterburg. Un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Prots. Upr., **93**: 3 (2022), 347–364.

[2] S. Timoshenko, S. Woinowsky–Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York: McGraw-Hill Book Comp., 1959.

[3] S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, V. P. Shapeev, *Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin*, Vychisl. tekhnologii, **18**: 6 (2013), 31–43.

[4] V. P. Shapeev, L. S. Bryndin, V. A. Belyaev, *hp-Variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya*, Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, bf 26: 3 (2022), 556–572.

[5] V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, S. K. Golushko, B. V. Semisalov, V. P.Shapeev, *h-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications*, Comput. Math. Math. Phys. **62**: 4 (2022), 517–537.

[6] N. Mai-Duy, D. Strunin, W. Karunasena, *A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **143** (2022), 687–699.

[7] W. Shao, Wu X, *An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations*, Appl. Math. Model. bf 39: 9 (2015). 2554–2569.

[8] X. Ye, Sh. Zhang, *A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation*, Results in Applied Mathematics, **15** (2022) 100318.

[9] R. K. Mokhanti, D. Kaur, *Kompaktnaya raznostnaya skhema vysokoy tochnosti dlya odnomernoy nestatsionarnoy kvazilineynoy bigarmonicheskoy zadachi vtorogo roda: prilozheniye k fizicheskim zadacham*, Sib. Zhurn. Vychisl. Matematiki, **21**: 1 (2018), 65–82.

[10] O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, I. S. Tomanova, *Solving the Biharmonic Plate Bending Problem by the Ritz Method Using Explicit Formulas for Splines of Degree 5*, Cybern. Syst. Anal. **54** (2018), 944–947.

[11] Ye. M. Zveryayev, M. D. Kovalenko, D. A. Abrukov, I. V. Men'shova, A. P. Kerzhayev, *O razlozheniyakh po funktsiyam Papkovicha-Fadlya v zadache izgiba plastiny*, Preprinty IPM im. M.V.Keldysha, **38** (2019), 28.

[12] P. K. Suyetin, *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny*, M.: Nauka, 1976.

[13] J. Shen, T. Tang, L. Wang, *Spectral Methods*, Heidelberg: Springer Berlin, 2011

[14] J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Florida: CRC Press, 2003.

[15] S. Liu, G. Trenkler, *Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products*, International Journal of Information and Systems Sciences. **4**: 1 (2008), 160–177.

[16] F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis. Second Edition*, New York: Dover Publications, 1987.

[17] G. Yuksel, O. Isik, M. Sezer, *Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second-order partial differential equations*, International Journal of Computer Mathematics, **92**: 10 (2015), 2121–2138.

[18] G. Chen, Zh. Li, P. Lin, *A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow*, Adv. Comput. Math. **29** (2008), 113–133.

Oksana Vladimirovna Germider
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: v.popov@narfu.ru