S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 416–427 (2020) УДК 517.929.4
DOI 10.33048/semi.2020.17.027 MSC 34K20

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. ЫСКАК

Abstract. In the paper we consider a system of linear differential equations of neutral type with periodic coefficients and with distributed delay. Sufficient conditions for the exponential stability of the zero solution of this system are given, estimates for solutions that characterize the exponential decrease at infinity are indicated. In the study of exponential stability, the modified Lyapunov-Krasovskii functional is used. Also for system of delay difference equations, a criterion for the exponential stability of the zero solution in terms of the solvability of the matrix equation with a delayed argument is proved.

Keywords: exponential stability, Lyapunov-Krasovskii functional, distributed delay, neutral type equation, periodic coefficient.

1. Введение

В работах [1, 2] было положено начало теории функционально-дифференциальных уравнений. В настоящее же время существует большое число работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [1-11]).

В работе рассмотрим систему линейных дифференциально-разностных уравнений следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d}{dt}(D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds, \qquad (1.1)$$

Yskak, T., Estimates for solutions of one class of systems of equations of neutral type with distributed delay.

Работа поддержана РФФИ (проект № 18-31-00408).

Поступила 23 декабря 2019 г., опубликована 24 марта 2020 г.

где $D(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(s,\xi)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными по совокупности переменных и T-периодическими по первой переменной элементами, $\tau > 0$ — запаздывание.

При исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения будем использовать следующий функционал Ляпунова – Красовского, который является модификацией функционалов, введенных в [12-15],

$$V(t,y) = \langle H(t)\big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle\, ds. \qquad (1.2)$$

В работах [12-18] исследован случай системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием. В [19] рассмотрена система (1.1) в случае $D(t) \equiv 0$. В [20] рассмотрена система (1.1), указаны достаточные условия экспоненциальной устойчивости, при выполнении которых спектр матрицы $D(t)$ лежит строго в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В данной работе это условие удалось ослабить. Также в работе приводится критерий экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Демиденко Г.В., к.ф.-м.н. Матвеевой И.И. и к.ф.-м.н. Скворцовой М.А. за внимание и ценные советы.

2. Основной результат

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1) при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) + \dfrac{d}{dt}(D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C^1([-\tau,0]), \\ y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \qquad (2.1)$$

Введем обозначения

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\right) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}(H(t)A(t) + M(0,t))D(t) + K(0)D(t),$$

$$Q_{13}(t,t-s) = -H(t)B(t,t-s),$$

$$Q_{22}(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau,t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)) - D^*(t)K(0)D(t),$$

$$Q_{33}(t-s) = K(t-s).$$

Теорема 1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ такая, что $H(t) > 0$, матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ и матрица $M(s,\xi) = M^*(s,\xi)$, непрерывная по совокупности аргументов, непрерывно* *дифференцируемая по первой переменной и T-периодическая по второй переменной, при этом*

$$K(s) > 0,\ \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$M(s,\xi) > 0,\ \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0, \quad s \in [0,\tau],\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $q(t,\xi)$ такую непрерывную T-периодическую по первой переменной функцию, что

$$\begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t,t-s) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & 0 \\ Q_{13}^*(t,t-s) & 0 & Q_{33}(t-s) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} q(t,t-s)H(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) + kM(s,\xi) \leq 0, \quad s \in [0,\tau],\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда для решения задачи (2.1) верна следующая оценка

$$V(t,y) \leq \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)ds\right)$$
$$\times\Big(\langle H(0)(\varphi(0)+D(0)\varphi(-\tau)),(\varphi(0)+D(0)\varphi(-\tau))\rangle$$
$$+\int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\, ds d\eta + \int_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\, ds\Big), \quad (2.3)$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\int_{t-\tau}^t q(t,t-s)ds, k\right\}.$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (1.2) на решении $y(t)$. Его производная будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}V(t,y)$$
$$= \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + \tau K(0) + M(0,t)\right) y(t), y(t)\right\rangle$$
$$+\left\langle y(t), \left(\frac{d}{dt}H(t)D(t) + A^*(t)H(t)D(t)\right) y(t-\tau)\right\rangle$$
$$+\left\langle y(t), H(t)\int_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds\right\rangle$$
$$+\left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)D(t) + A^*(t)H(t)D(t)\right) y(t-\tau), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle\left(D^*(t)\frac{d}{dt}H(t)D(t)-M(\tau,t-\tau)\right)y(t-\tau),y(t-\tau)\right\rangle$$
$$+\left\langle y(t-\tau),D^*(t)H(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds\right\rangle$$
$$+\left\langle H(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds,y(t)\right\rangle$$
$$+\left\langle D^*(t)H(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds,y(t-\tau)\right\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Перепишем данное тождество в терминах квадратичной формы

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix}y(t)\\y(t-\tau)\\y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\y(t-\tau)\\y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$
$$=\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds, \tag{2.4}$$

где

$$O(t,s)=-\begin{pmatrix}O_{11}(t) & O_{12}(t) & O_{13}(t,s)\\ O_{12}^*(t) & O_{22}(t) & O_{23}(t,s)\\ O_{13}^*(t,s) & O_{23}^*(t,s) & O_{33}(t,s)\end{pmatrix},$$
$$O_{11}(t)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)+\tau K(0)+M(0,t)\right),$$
$$O_{12}(t)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t)D(t)+A^*(t)H(t)D(t)\right),$$
$$O_{13}(t,s)=H(t)B(t,t-s),$$
$$O_{22}(t)=\frac{1}{\tau}\left(D^*(t)\frac{d}{dt}H(t)D(t)-M(\tau,t-\tau)\right),$$
$$O_{23}(t,s)=D^*(t)H(t)B(t,t-s),$$
$$O_{33}(t,s)=-K(t-s).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle Q(t,s)\begin{pmatrix}z_1+D(t)z_2\\z_2\\z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1+D(t)z_2\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где

$$Q(t,s)=\begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t,t-s)\\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & 0\\ Q_{13}^*(t,t-s) & 0 & Q_{33}(t-s)\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix} I & -D(t) & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+D(t)z_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} I & -D(t) & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+D(t)z_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ -D^*(t) & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}O(t,s)\begin{pmatrix} I & -D(t) & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+D(t)z_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} z_1+D(t)z_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Перемножив матрицы, получим указанную формулу. Учитывая эту формулу, (2.4) можно переписать следующим образом

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle Q(t,s)\begin{pmatrix} y(t)+D(t)y(t-\tau)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)+D(t)y(t-\tau)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$=\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Из условия (2.2) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t}q(t,t-s)ds\left\langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),(y(t)+D(t)y(t-\tau))\right\rangle$$

$$\le\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{\partial}{\partial t}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Учитывая условия на матрицы $K(s)$, $M(s,\xi)$ и их производные, получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t} q(t,t-s)ds\,\langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),(y(t)+D(t)y(t-\tau))\rangle$$

$$+k\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, dsd\eta$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle\, ds\le 0.$$

Поскольку из условия теоремы $\gamma(t)=\min\left\{\int\limits_{t-\tau}^{t} q(t,t-s)ds,k\right\}$, то справедлива следующая оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\gamma(t)V(t,y)\le 0.$$

Домножим обе части на $\exp\left(\int\limits_{0}^{t}\gamma(s)ds\right)$:

$$\exp\left(\int\limits_{0}^{t}\gamma(s)ds\right)\frac{d}{dt}V(t,y)+\exp\left(\int\limits_{0}^{t}\gamma(s)ds\right)\gamma(t)V(t,y)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(V(t,y)\exp\left(\int\limits_{0}^{t}\gamma(s)ds\right)\right)\le 0.$$

Проинтегрировав данное неравенство от 0 до t, получим оценку (2.3). □

Замечание. Функция $\gamma(t)$ является T-периодической.

Заметим, что из условия (2.2) и условий на матрицы $K(s)$, $M(s,\xi)$ следует, что нулевое решение системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом

$$z(t)=D(t)z(t-\tau),\quad D(t)\equiv D(t+T), \tag{2.5}$$

экспоненциально устойчиво.

Действительно, из (2.2) вытекает, что матрица $Q_{22}(t)$ неотрицательно определена, т.е.

$$Q_{22}(t)=\frac{1}{\tau}(M(\tau,t-\tau)-D^*(t)M(0,t)D(t))-D^*(t)K(0)D(t)\ge 0,$$

откуда следует

$$M(\tau,t-\tau)-D^*(t)M(0,t)D(t)\ge 0.$$

Из условий на матрицу $M(s,\xi)$ имеем

$$M(\tau,\xi)-M(0,\xi)=\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi)ds<0.$$

Из последних двух оценок получим

$$M(0, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t) > 0.$$

Тем самым $L(t) = M(0,t) > 0$ является T-периодическим решением следующего матричного уравнения

$$L(t-\tau) - D^*(t)L(t)D(t) = C(t), \quad C(t) = C^*(t) > 0, \tag{2.6}$$

где элементы матрицы $C(t)$ непрерывны и T-периодичны. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.5) следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1. Нулевое решение системы (2.5) экспоненциально устойчиво.
2. У системы (2.6) существует единственное непрерывное T-периодическое решение $L(t) = L^*(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для системы (2.5) рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} z(t) = D(t)z(t-\tau), \quad t > t_0, \\ z(s) = \psi(s),\ s \in [t_0-\tau, t_0],\ \psi(s) \in C([t_0-\tau, t_0]), \\ z(t_0+0) = \psi(t_0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Введем обозначение

$$G_0(t) = E,$$

$$G_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} D(t-j\tau) = D(t)\dots D(t-(i-1)\tau),$$

при этом

$$G_i(t)D(t-i\tau) = G_{i+1}(t),\ G_i(t+T) = G_i(t). \tag{2.8}$$

Пусть $t \in ((n-1)\tau + t_0, n\tau + t_0]$, тогда решение (2.7) можно записать в следующем виде

$$z(t) = D(t)\dots D(t-(n-1)\tau)\psi(t-n\tau) = G_n(t)\psi(t-n\tau). \tag{2.9}$$

Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).
Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.5) означает, что существуют константы $c, \delta > 0$ такие, что для любой вектор-функции $\psi(s) \in C([t_0-\tau, t_0])$ для решения начальной задачи (2.7) справедлива следующая оценка

$$\|z(t)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]} \|\psi(s)\|, \quad t > t_0.$$

Учитывая (2.9) при $t \in ((n-1)\tau + t_0, n\tau + t_0]$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|z(t)\| = \|G_n(t)\psi(t-n\tau)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]} \|\psi(s)\|.$$

Возьмем в качестве вектор-функции $\psi(s) \equiv z_0$, где $z_0 \ne 0$, тогда перепишем оценку

$$\frac{\|G_n(t)z_0\|}{\|z_0\|} \le ce^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in ((n-1)\tau + t_0, n\tau + t_0].$$

В силу произвольности z_0 получаем оценку на норму матрицы $G_n(t)$:

$$\|G_n(t)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in ((n-1)\tau + t_0, n\tau + t_0].$$

Следовательно,
$$\|G_n(t)\| \leq ce^{-\delta\tau(n-1)}. \tag{2.10}$$
В силу произвольности t_0 оценка верна для всех t.
Теперь, имея данную оценку, приведем формулу решения матричного уравнения (2.6):
$$L(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} G_j^*(t+j\tau)C(t+(j+1)\tau)G_j(t+j\tau). \tag{2.11}$$
Докажем, что ряд справа сходится равномерно:
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|G_j^*(t+j\tau)C(t+(j+1)\tau)G_j(t+j\tau)\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|C(t+(j+1)\tau)\|\|G_j(t+j\tau)\|^2.$$
Учитывая оценку (2.10), T-периодичность и непрерывность элементов матрицы $C(t)$, имеем
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|G_j^*(t+j\tau)C(t+(j+1)\tau)G_j(t+j\tau)\| \leq c^2 \max_{s\in[0,T]} \|C(s)\| \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-2\delta\tau(j-1)}.$$
Что и требовалось доказать. Положительная определенность матрицы $L(t)$ следует из положительной определенности матрицы $C(t)$ и (2.11). Осталось теперь убедиться, что формула (2.11) действительно является решением (2.6). Распишем первое слагаемое в (2.6)
$$L(t-\tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} G_j^*(t+(j-1)\tau)C(t+j\tau)G_j(t+(j-1)\tau)$$
$$= C(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} G_j^*(t+(j-1)\tau)C(t+j\tau)G_j(t+(j-1)\tau).$$
Это эквивалентно
$$L(t-\tau) = C(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} G_{j+1}^*(t+j\tau)C(t+(j+1)\tau)G_{j+1}(t+j\tau).$$
Из (2.8) получим
$$L(t-\tau) = C(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} D^*(t)G_j^*(t+j\tau)C(t+(j+1)\tau)G_j(t+j\tau)D(t)$$
$$= C(t) + D^*(t)L(t)D(t).$$
Тем самым мы показали существование решения (2.6).

Докажем единственность решения от противного. Пусть $L_1(t)$ и $L_2(t)$ — два различных T-периодических решения (2.6), тогда $L_0(t) = L_1(t) - L_2(t) \not\equiv 0$ — T-периодическое решение следующего уравнения
$$L_0(t-\tau) - D^*(t)L_0(t)D(t) = 0.$$
Это эквивалентно
$$L_0(t) = D^*(t+\tau)L_0(t+\tau)D(t+\tau).$$
Воспользовавшись этой формулой n раз, получим
$$L_0(t) = D^*(t+\tau)\dots D^*(t+n\tau)L_0(t+n\tau)D(t+n\tau)\dots D(t+\tau)$$

$$= G_n^*(t+n\tau)L_0(t+n\tau)G_n(t+n\tau).$$

Оценим норму матрицы $L_0(t)$, используя (2.10),

$$\|L_0(t)\| \le \|L_0(t+n\tau)\|c^2e^{-2\delta\tau(n-1)}.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что $L_0(t) = 0$ — противоречие. Единственность доказана.

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 1).
Пусть $L(t)$ — положительно определенное T-периодическое решение (2.6). Рассмотрим следующую функцию вдоль решения (2.7) при $t \in ((n-1)\tau+t_0, n\tau+t_0]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle = \langle L(t)D(t)z(t-\tau), D(t)z(t-\tau)\rangle = \langle D^*(t)L(t)D(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Из этого следует

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle = \langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle - \langle C(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle. \tag{2.12}$$

Поскольку $C(t)$, $L(t-\tau)$ — положительно определенные эрмитовы матрицы, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\langle C(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle \\ &= \langle L^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)C(t)L^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)(L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)z(t-\tau)), (L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)z(t-\tau))\rangle \\ &\ge \|L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)C^{-1}(t)L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)\|^{-1}\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle. \end{aligned}$$

Тогда из (2.12) имеем

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \le (1 - \|L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)C^{-1}(t)L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)\|^{-1})\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Введем обозначения

$$\alpha = \max_{s\in[0,T]}(1 - \|L^{\frac{1}{2}}(s-\tau)C^{-1}(s)L^{\frac{1}{2}}(s-\tau)\|^{-1}) < 1, \tag{2.13}$$

$$\beta = \sqrt{\max_{s\in[0,T]}\|L(s)\| \max_{s\in[0,T]}\|L^{-1}(s)\|}.$$

Учитывая данные обозначения, имеем

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \le \alpha\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Повторим подобные рассуждения несколько раз:

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \le \alpha^n\langle L(t-n\tau)z(t-n\tau), z(t-n\tau)\rangle,\ t \in ((n-1)\tau+t_0, n\tau+t_0].$$

Поскольку $z(t)$ — решение (2.7), получим

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \le \alpha^n\langle L(t-n\tau)\psi(t-n\tau), \psi(t-n\tau)\rangle,\ t \in ((n-1)\tau+t_0, n\tau+t_0].$$

В силу неравенств $\frac{1}{\|L^{-1}(t)\|}\|z_0\|^2 \le \langle L(t)z_0, z_0\rangle \le \|L(t)\|\|z_0\|^2$, имеем

$$\|z(t)\|^2 \le \alpha^n\|L^{-1}(t)\|\|L(t-n\tau)\|\|\psi(t-n\tau)\|^2.$$

Используя определение величины β и то, что $t \in ((n-1)\tau+t_0, n\tau+t_0]$, получим

$$\|z(t)\|^2 \le \beta^2\alpha^{(t-t_0)/\tau} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]}\|\psi(s)\|^2.$$

Это эквивалентно

$$\|z(t)\| \le \beta e^{\frac{\ln\alpha}{2\tau}(t-t_0)} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]}\|\psi(s)\|. \tag{2.14}$$

Так как $\alpha < 1$, то из оценки выше следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения (2.5). $\square$

Замечание 1. Из (2.10) в силу определения $G_i(t)$, оценки (2.14), обозначений (2.13) имеем

$$\|G_i(t)\| = \|D(t)\dots D(t-(i-1)\tau)\| \le \beta e^{\frac{\ln\alpha}{2}(i-1)} = \beta\alpha^{\frac{i-1}{2}}. \tag{2.15}$$

Замечание 2. Рассмотрим случай $T=\tau$. Зафиксируем $t\in[0,\tau)$, система (2.5) примет следующий вид

$$z_i = \mathfrak{D} z_{i-1},$$

где $\mathfrak{D} = D(t)$, система (2.6) перейдет в континуум дискретных уравнений Ляпунова при каждом $t\in[0,\tau)$

$$L - \mathfrak{D}^* L \mathfrak{D} = C,$$

и теорема 2 вытекает из критерия Ляпунова об асимптотической устойчивости для разностных уравнений.

Замечание 3. Рассмотрим случай $T/\tau = m/n$, $m,\, n\in\mathbb{N}$. Зафиксируем $t\in[0,\tau/n)$, тогда система (2.5) примет следующий вид

$$z_i = \mathfrak{D}_i z_{i-1}, \quad \mathfrak{D}_i = D(t-i\tau), \quad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_{i+m},$$

система (2.6) перейдет в континуум разностных уравнений Ляпунова при каждом $t\in[0,\tau/n)$

$$L_{i-1} - \mathfrak{D}_i^* L_i \mathfrak{D}_i = C_i, \quad C_i = C_i^* > 0, \quad C_1 = C_{m+1}.$$

и теорема 2 вытекает из работы [21].

Если выполнены условия теоремы 1, то $L(t) = M(0,t)$ является решением (2.6), и для матрицы $D(t)$ из (1.1) справедлива оценка (2.15). Введем обозначения

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\hat\kappa = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2}$$

$$\times\left(2\|H(0)\|(1+\|D(0)\|^2) + \int_{-\tau}^{0} \|M(-s,s)\|\,ds + \int_0^{\tau}\int_{-\eta}^{0} \|K(-s)\|\,ds d\eta\right)^{\frac12},$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int_0^T \frac{\gamma(s)}{2}ds - \int_0^{\xi}\frac{\gamma(s)}{2}ds\right)\right).$$

В следующей теореме мы установим оценки решения начальной задачи (2.1).

Теорема 3. *Пусть*

а) выполнены условия теоремы 1,

б) $\Delta = \int_0^T \frac{\gamma(s)}{2T} ds > 0$.

1. Если $\alpha^{1/2}\exp(\Delta\tau) < 1$, *то для решения задачи (2.1) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta\alpha^{-1/2}\exp(-t\Delta)\hat\kappa c\left(1-\alpha^{1/2}\exp(\Delta\tau)\right)^{-1}.$$

2. Если $\alpha^{1/2}\exp(\Delta\tau) = 1$, *то для решения задачи (2.1) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta\alpha^{-1/2}\exp(-t\Delta)\left(\frac{\hat\kappa c}{\tau}t + \hat\kappa c + 1\right).$$

3. Если $\alpha^{1/2}\exp(\Delta\tau) > 1$, *то для решения задачи (2.1) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta\alpha^{-1/2}\alpha^{t/2\tau}$$
$$\times\left(\hat{\kappa}c\left(1-\alpha^{-1/2}\exp\left(-\Delta\tau\right)\right)^{-1}+\alpha^{1/2}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [20].

Замечание. Условия а) и б) являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1).

References

[1] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford University Press, Stanford, 1963. Zbl 0109.06001

[2] A.D. Myshkis, *Linear differential equations with retarded argument*, Gostehizdat Publ., Moscow, Leningrad, 1951. Zbl 0043.30904

[3] L.E. El'sgol'ts, S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973. Zbl 0287.34073

[4] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977. Zbl 0352.34001

[5] D.G. Korenevskiĭ, *Stability of Dynamical Systems under Random Perturbations of Parameters. Algebraic Criteria*, Naukova Dumka, Kiev, 1989. Zbl 0769.93081

[6] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, World Federation Publ. Comp., Atlanta, GA, 1995. Zbl 0867.34051

[7] Yu.F. Dolgiĭ, *Stability of Periodic Differential-Difference Equations*, Izd. Ural. Gos. Univ., Ekaterinburg, 1996.

[8] V.B. Kolmanovskiĭ, A.D. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Mathematics and its Applications, **463**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999. Zbl 0917.34001

[9] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2003. Zbl 1039.34067

[10] R. P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky, *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications*, Springer, Berlin, 2012. Zbl 1253.34002

[11] M.I. Gil', *Stability of Neutral Functional Differential Equations*, Atlantis Studies in Differential Equations, **3**, Atlantis Press, Amsterdam, 2014. Zbl 1315.34002

[12] G.V. Demidenko, *Stability of Solutions to Linear Differential Equations of Neutral Type*, J. Anal. Appl., **7**:3 (2009), 119–130. Zbl 1201.34116

[13] G.V. Demidenko, T.V. Kotova, M.A. Skvortsova, *Stability of Solutions to Differential Equations of Neutral Type*, J. Math. Sci., New York, **186**:3 (2012), 394–406. Zbl 1249.34210

[14] G.V. Demidenko, E.S. Vodop'yanov, M.A. Skvortsova, *Estimates of Solutions to the Linear Differential Equations of Neutral Type with Several Delays of the Argument*, J. Appl. Indust. Math., **7**:4 (2013), 472–479. Zbl 1340.34280

[15] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *On Estimates of Solutions to Systems of Differential Equations of Neutral Type with Periodic Coefficients*, Sib. Math. J., **55**:5 (2014), 866–881. Zbl 1315.34077

[16] I.I. Matveeva, *On Exponential Stability of Solutions to Periodic Neutral-Type Systems*, Siberian Math. J., **58**:2 (2017), 264–270. Zbl 1376.34062

[17] I.I. Matveeva, *On the Robust Stability of Solutions to Periodic Systems of Neutral Type*, J. Appl. Indust. Math., **12**:4 (2018), 684–693. Zbl 07099502

[18] I.I. Matveeva, *On the exponential stability of the solutions of neutral type linear periodic systems with variable delay*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **16** (2019), 748–756. Zbl 1426.34102

[19] T. Yskak, *Stability of Solutions to Systems of Differential Equations with Distributed Delay*, Funct. Differ. Equ., **25**:1-2 (2018), 97–108. MR3805049

[20] T. Yskak, *On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay*, J. Appl. Ind. Math., **13**:3 (2019), 575–583. Zbl 07139129

[21] G.V. Demidenko, *Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms*, J. Comput. Math. Optim., **6**:1 (2010) , 1–12. Zbl 1238.39006

Yskak Timur
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: istima92@mail.ru