S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 512.643
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 15B48

ЦЕПНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Ю.А. Альпин, А.Э. Гутерман, Е.Р. Шафеев

Abstract: Теорема Протасова — Войнова о комбинаторной структуре полугрупп неотрицательных матриц расширяет известный результат Фробениуса о канонической форме неприводимой неотрицательной матрицы. Настоящая работа посвящена обобщению теоремы Протасова — Войнова на необязательно неприводимые полугруппы матриц. Для этого на основе цепных свойства неотрицательных матриц введено расширение понятий индекса импримитивности и канонического разбиения.

The theorem by Protasov and Voinov on the combinatorial structure of semigroups of nonnegative matrices extends a well-known result of Frobenius on the canonical form of an irreducible nonnegative matrix. We generalize the Protasov — Voinov theorem to not necessarily irreducible semigroups of matrices. For this purpose, an extensions of the concepts of imprimitivity index and canonical partition are introduced which are based on the chain properties of non-negative matrices.

Keywords: неотрицательные матрицы, цепные матрицы, цепной индекс
non-negative matrices, chainable matrices, chainable index

Alpin Yu.A., Guterman A.E., Shafeev E.R., Chainable sets of nonnegative matrices.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Согласно известной теореме Фробениуса любая неотрицательная неприводимая матрица либо примитивна, либо преобразованием перестановочного подобия приводится к так называемой форме Фробениуса (см., например [6]).

В работе [8] Протасов и Войнов доказали обобщение теоремы Фробениуса на неприводимые полугруппы неотрицательных матриц. Для этого они предложили полугрупповые аналоги определений неприводимой и примитивной матрицы и сформулировали важную теорему о строении неприводимых полугрупп неотрицательных матриц [8, теорема 1], см. также теорему 4 в разделе 6, которая описывает комбинаторную структуру неприводимой полугруппы неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов. Ключевым понятием теоремы является понятие индекса импримитивности полугруппы.

Основным результатом данной работы является обобщение теоремы Протасова — Войнова. Мы используем понятия потенциально цепной матрицы и индекса несолидарности, которые, соответственно, являются естественными расширениями понятий примитивной матрицы и индекса импримитивности и показываем, см. теорему 3, что любая полугруппа матриц без нулевых строк или столбцов, без дополнительного предположения о ее неприводимости, также обладает специальной комбинаторной структурой, зависящей от ее индекса несолидарности. В теореме 7 доказано, что для неприводимой полугруппы разбиение на классы солидарности совпадает с разбиением на классы совместимости. Это показывает, что теорема 3 является естественным обобщением теоремы Протасова–Войнова. Неформально говоря, она показывает, что удается спасти из теоремы Протасова–Войнова, если отказаться от требования неприводимости, оставив лишь необременительное предположение об отсутствии нулевых строк или столбцов в матрицах.

Цепные матрицы были впервые рассмотрены в [7], где изучалась их структура и алгебраические свойства. Позднее цепные и потенциально цепные матрицы, а также цепной ранг, рассматривались в работах [4] и [5].

В параграфе 2 вводятся основные определения и формулируются базовые утверждения. В параграфе 3 формулируется теорема об оценке цепного ранга произведения двух матриц и исследуется случай равенства в приведенном неравенстве. Параграф 4 описывает в терминах цепного ранга матрицы, действующие на классах солидарности как перестановки. В параграфе 5 для полугрупп матриц вводятся новые определения и доказывается основная теорема этой работы. В шестом параграфе мы соотносим полученный результат с известными фактами о неприводимых матрицах и с теоремой Протасова — Войнова.

2 О цепном ранге

Множество прямоугольных неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов обозначется символом $\mathbb{P}$, а символом $\mathbb{P}_n$ — подмножество $\mathbb{P}$, состоящее из матриц порядка n. Пусть дана $(n \times m)$-матрица $A \in \mathbb{P}$. Говорят, что i-ая и j-ая строки A *пересекаются*, если они имеют положительные элементы в некотором общем столбце. Обозначим множество индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$ через $\mathbf{n}$.

Со всякой $n \times m$ матрицей $A \in \mathbb{P}$ связаны следующие бинарные отношения на множестве $\mathbf{n}$.

Определение 1. Индексы i и j совместимы матрицей A (A-совместимы), если i-ая и j-ая строки A пересекаются.

Определение 2. Индексы i и j солидарны в матрице A (A-солидарны), если существует такая последовательность индексов $i = i_1, i_2, \ldots, i_s = j$, что строки с номерами i_k, i_{k+1} совместимы матрицей A при $k = 1, \ldots, s-1$.

Отношение A-солидарности индексов является, очевидно, отношением эквивалентности на $\mathbf{n}$.

На языке матрицы A определение 2 означает следующее:

Предложение 1. *Индексы $i, j \in \mathbf{n}$ солидарны в матрице A тогда и только тогда, когда при некотором показателе s справедливо неравенство:*

$$(AA^T)^s_{ij} > 0.$$

Доказательство. Индексы i_1 и i_2 совместимы матрицей A тогда и только тогда, когда $(AA^T)_{i_1 i_2} > 0$. В свою очередь, последовательность из определения 2 существует тогда и только тогда, когда найдутся такие индексы $i_2, \ldots i_{s-1}$, что

$$(AA^T)_{i_1,i_2}(AA^T)_{i_2,i_3}\ldots(AA^T)_{i_{s-1},i_s} > 0, \tag{2.1}$$

Существование такой последовательности индексов по определению матричного произведения эквивалентно условию $(AA^T)^s_{i_1,i_s} > 0$. □

Определение 3. Матрица $A \in \mathbb{P}$ размера $n \times m$ называется цепной, если любые индексы $i, j \in \mathbf{n}$ солидарны в A, т.е. $(AA^T)^s_{ij} > 0$ при некотором s.

Определение 4. Цепным рангом $n \times m$ матрицы $A \in \mathbb{P}$ называется число классов A-солидарности и обозначается $\mathrm{crk}A$.

Из определения 4 видно, что цепной ранг $n \times m$ матрицы $A \in \mathbb{P}$ лежит в следующих границах: $1 \le \mathrm{crk}A \le n$. При этом $\mathrm{crk}(A) = 1$ только если A — цепная матрица (теорема 2.1 из [4]). Максимальное значение $\mathrm{crk}A = n$ достигается, если в A нет пересекающихся строк, последнее же имеет место в точности тогда, когда в каждом столбце A есть ровно один положительный элемент. В этом случае в A всего m положительных элементов. Обозначим через r_i число положительных элементов i-й строки. Ясно, что $r_1 + \cdots + r_n = m$. Это равенство возможно лишь при $n \le m$, а если $m = n$, то при $r_1 = \cdots = r_n = 1$. Сформулируем это полезное утверждение отдельно (другое его доказательство см. в [5, лемма 3.7]):

Предложение 2. *Если $A \in \mathbb{P}_n$, то $\mathrm{crk}A = n$ тогда и только тогда, когда матрица A содержит ровно один положительный элемент в каждой строке и каждом столбце, т.е. является мономиальной матрицей.*

Согласно теореме 3.1 из [4] цепной ранг произведения прямоугольных неотрицательных матриц удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{crk}(AB) \le \min(\mathrm{crk}A, \mathrm{crk}B). \tag{2.2}$$

Напомним (см. напр. [4]), что со всякой неотрицательной $n \times m$ матрицей A связан *ассоциированный* оператор A, отображающий множество $2^{\mathbf{n}}$ в множество $2^{\mathbf{m}}$ и определяемый формулой

$$\alpha \mapsto \alpha A = \{j | (A)_{ij} > 0, i \in \alpha\}. \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3), множество αA состоит из номеров столбцов матрицы A, имеющих положительные элементы в строках с номерами из α.

Для полноты определения будем считать, что $\varnothing A = \varnothing$.

Лемма 1. *Оператор $A : 2^{\boldsymbol{n}} \to 2^{\boldsymbol{m}}$, ассоциированный с $n \times m$ матрицей $A \in \mathbb{P}$, обладает следующими свойствами:*

1) $\alpha \neq \varnothing \ \Rightarrow \alpha A \neq \varnothing$, т.е. непустые множества отображаются в непустые;

2) для любого $j \in \boldsymbol{m}$ существует такое подмножество α, что $j \in \alpha A$.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что в матрице A нет нулевых строк, а второе — из отсутствия в A нулевых столбцов. □

Из определения отношения солидарности и леммы 1 вытекает следующее описание нецепной матрицы.

Предложение 3. *Пусть даны матрица $A \in \mathbb{P}$ и соответствующие ей классы солидарности $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ $(r \geq 2)$. Тогда при $s = 1, \dots, r$*

1) на пересечении строк с номерами из множества α_s и столбцов с номерами из множества $\alpha_s A$ стоит цепная подматрица, обозначим её A_s^{ch}.

2) в строках с номерами из α_s и столбцах с номерами из $\alpha_s A$ все элементы, не принадлежащие A_s^{ch}, равны нулю.

3 Равенство $\mathrm{crk}(AB) = \mathrm{crk}(A) = \mathrm{crk}(B)$

Лемма 2. *Пусть дана цепная матрица с n строками. При любом разбиении множества $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ для любого класса π_1 разбиения найдётся такой класс $\pi_2, \pi_1 \neq \pi_2$, что некоторая строка с номером из класса π_1 пересекается с некоторой строкой с номером из класса π_2.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое разбиение множества $\mathbf{n}$, что строки некоторого класса не пересекаются со строками, не принадлежащими этому классу. Ясно, что такая матрица не может быть цепной. □

Теорема 1. *Даны $n \times m$ матрица A и $m \times p$ матрица B из $\mathbb{P}$. Пусть цепной ранг матриц A, B одинаков и равен $r \geq 2$. Дано разбиение множества $\boldsymbol{n}$ на классы A-солидарности:*

$$\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r), \tag{3.1}$$

а также разбиение множества $\boldsymbol{m}$ на классы B-солидарности:

$$\beta = (\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_r). \tag{3.2}$$

Равенство $\mathrm{crk}(AB) = r$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждого класса β_j найдётся единственный класс α_i, такой, что $\alpha_i A = \beta_j$, или, другими словами, когда разбиение (3.2) совпадает с разбиением

$$\alpha_1 A,\ \alpha_2 A,\ \dots,\ \alpha_r A. \tag{3.3}$$

с точностью до порядка элементов.

Доказательство. Без уменьшения общности можно считать, что матрица A разбита на горизонтальные полосы в соответствии с классами (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Действительно, этого можно добиться, умножив A слева на подходящую матрицу перестановки. Цепной ранг A при этом не меняется. Согласно предложению 3 матрица A_s содержит цепную подматрицу A_s^{ch}, расположенную в столбцах с номерами из класса $\alpha_s A$, а все другие её элементы равны нулю. Множества

$$\beta_1 B,\ \beta_2 B,\ \ldots,\ \beta_r B \tag{3.5}$$

определяют разбиение матрицы B на вертикальные подматрицы. Матрица, составленная из столбцов с номерами из $\beta_t B$, обозначается через B_t. Без уменьшения общности можно считать, что эти вертикальные подматрицы образуют сплошные полосы, расположенные в порядке (3.5):

$$B = \left(B_1 | B_2 |\ \ldots\ | B_r\right). \tag{3.6}$$

Такого вида можно добиться, умножив матрицу B справа на подходящую матрицу перестановки. Цепной ранг B при этом не меняется. По предложению 3 матрица B_t содержит цепную подматрицу B_t^{ch}, расположенную в строках с номерами из класса β_t, а прочие её элементы равны нулю.

Матрицы A и B можно перемножить поблочно:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} \left(B_1 | B_2 |\ \ldots\ | B_r\right) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_r \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_rB_1 & A_rB_2 & \ldots & A_rB_r \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Предположим, что условие теоремы выполнено, т.е. для всякого класса β_t найдётся единственный класс α_s, такой, что $\alpha_s A = \beta_t$. Тогда

$$A_s B_t = \begin{cases} A_s^{ch} B_t^{ch}, & \text{если } \alpha_s A = \beta_t; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, матрица (3.7) имеет блочно-мономиальный вид: в каждой блочной строке и каждом блочном столбце есть ровно один ненулевой, причём цепной, блок. Цепной ранг такой матрицы равен r.

Предположим, что условие теоремы не выполнено. Это условие (относящееся к двум разбиениям одного конечного множества) можно пересказать такими словами: каждый класс β_j содержится в одном из классов $\alpha_i A$. Невыполнение условия означает, что элементы некоторого класса β_k из (3.2) распределены по некоторым классам разбиения (3.3), обозначим их

$$\alpha_{j_1} A\ \ldots,\ \alpha_{j_h} A.$$

Это значит, что класс β_k разбит на подклассы

$$\beta_k \cap (\alpha_{j_1} A),\ \ldots,\ \beta_k \cap (\alpha_{j_h} A). \tag{3.8}$$

Соответственно, матрица B_k разбивается на горизонтальные подматрицы, отвечающие подклассам (3.8). То же происходит с цепной подматрицей B_k^{ch} матрицы B_k, расположенной в строках с номерами из β_k. По лемме 2 для подкласса $\beta_k \cap \alpha_{j_1} A$ найдётся такой подкласс $\beta_k \cap \alpha_{j_g} A$, что некоторые строки с номерами из этих двух подклассов пересекаются. Пусть пересекаются строки с номерами

$$u \in \beta_k \cap \alpha_{j_1} A,\ v \in \beta_k \cap \alpha_{j_g} A.$$

Пусть также через $p \in \alpha_{j_1}$ и $q \in \alpha_{j_g}$ обозначены номера строк матрицы A, содержащих элементы $(A)_{pu} > 0, (A)_{qv} > 0$.

Умножая p-ю строку матрицы A на матрицу B, получим p-ю строку матрицы AB. В эту строку в качестве слагаемого с положительным коэффициентом $(A)_{pu}$ входит u-я строка B. Соответственно, в q-ю строку матрицы AB в качестве слагаемого с положительным коэффициентом $(A)_{qv}$ входит v-я строка B. Следовательно p-я и q-я строки AB пересекаются по тому же столбцу, по которому пересекаются u-я и v-я строки матрицы B. В результате для матрицы AB справедливо:

а) индексы из α_{j_1} солидарны, поскольку они солидарны в A, по той же причине солидарны индексы из α_{j_g} (см. [4, лемма 3.1]);

б) строка $p \in \alpha_{j_1}$ пересекается со строкой $q \in \alpha_{j_g}$.

Из свойств а) и б) вытекает, что классы α_{j_1} и α_{j_g} входят в один класс AB-солидарности, следовательно, число классов AB-солидарности меньше числа классов A-солидарности, т.е. $\mathrm{crk}(AB) < \mathrm{crk}(A)$. $\square$

4 Равенство $\mathrm{crk}(A^2) = \mathrm{crk}(A)$

Определение 5. Пусть дана матрица $A \in \mathbb{P}_n$. Дано также некоторое разбиение $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r$ множества $\mathbf{n}$. Следуя [8], будем говорить, что *матрица A действует на классах разбиения как перестановка*, если для каждого класса α_j найдётся единственный класс α_i, такой, что $\alpha_i A = \alpha_j$.

Пример 1. Рассмотрим разбиение $\alpha_1 = \{1, 2\}, \alpha_2 = \{3\}$ и матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, $\alpha_1 M = \alpha_2, \alpha_2 M = \alpha_1$. Это значит, что M действует на классах данного разбиения как перестановка.

Индекс j будем называть A-*последователем* индекса i, если $(A)_{ij} > 0$.

Лемма 3. *Матрица $A \in \mathbb{P}_n$ действует на классах разбиения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ множества $\boldsymbol{n}$ как перестановка, если для любых $i, j \in \boldsymbol{n}$, лежащих в разных классах разбиения, их A-последователи тоже лежат в разных классах разбиения.*

Доказательство. Выберем в каждом классе разбиения по одному представителю:

$$i_1 \in \alpha_1, \ldots, i_r \in \alpha_r.$$

Пусть j_s — A-последователь индекса i_s, $s = 1, \ldots, r$. Согласно условию леммы, A-последователи лежат в попарно различных классах разбиения. Это значит, что есть такая перестановка σ на множестве $\{1,\dots,r\}$, что

$$j_1 \in \alpha_{\sigma(1)}, \dots, j_r \in \alpha_{\sigma(r)}. \tag{4.1}$$

Докажем, что если $j_s \in \alpha_{\sigma(s)}$, то *все* A-последователи индекса i_s лежат в $\alpha_{\sigma(s)}$, т.е. $\alpha_s A \subseteq \alpha_{\sigma(s)}$. Предположим противное: некоторый A-последователь индекса i_s, например, индекс k, лежит в $\alpha_{\sigma(t)}, t \neq s$. Но имеем также $j_t \in \alpha_{\sigma(t)}$. Выходит, что A-последователи индексов i_s и i_t, принадлежащих разным классам разбиения α, лежат в одном классе $\alpha_{\sigma(t)}$. Это противоречит условию леммы. Итак, мы доказали, что $\alpha_s A \subseteq \alpha_{\sigma(s)}$, $s = 1,\dots,r$. Из того, что A — матрица без нулевых столбцов, следует, что все вложения являются на самом деле равенствами:

$$\alpha_s A = \alpha_{\sigma(s)},\ s = 1,\dots,r.$$

□

Лемма 4. *Пусть матрица $A \in \mathbb{P}_n$ действует на классах некоторого разбиения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ множества $\boldsymbol{n}$ как перестановка. Тогда матрица A перестановочно подобна блочно-мономиальной матрице блочного порядка r.*

Доказательство. Пусть матрица P переставляет строки A так, чтобы первые позиции заняли строки с номерами из α_1, затем следовали строки с номерами из α_2 и т.д. Тогда PAP^T — блочно-мономиальная матрица блочного порядка r. □

Следствие 1. *Для матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ равенство*

$$\mathrm{crk} A^2 = \mathrm{crk} A \tag{4.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) матрица A действует на классах солидарности как перестановка,

2) матрица A перестановочно подобна блочно-мономиальной матрице блочного порядка $r = \mathrm{crk} A$, в которой все ненулевые блоки — цепные матрицы.

Доказательство. Пусть равенство (4.2) выполнено, тогда свойство 1) доказывается применением теоремы 1 к случаю $A = B$. Свойство 2) доказывается применением леммы 4, причём утверждение относительно ненулевых блоков вытекает из следующих соображений. Цепной ранг блочно-мономиальной матрицы равен, очевидно, сумме цепных рангов ненулевых блоков. Так как число ненулевых блоков равно $r = \mathrm{crk} A$, то цепные ранги всех ненулевых блоков равны единице, т.е. эти блоки — цепные матрицы.

Пусть условия 1) и 2) выполнены. Квадрат блочно-мономиальной матрицы с цепными блоками является блочно-мономиальной матрицей, каждый ненулевой блок которой равен произведению двух цепных блоков исходной матрицы в силу чего и сам является цепной матрицей. Очевидно, что $\mathrm{crk} A^2 = \mathrm{crk} A$. □

5 Цепные свойства полугрупп

Вначале приведём определения, которые обобщают на полугруппы определения 1 и 2.

Определение 6. ([3]) Индексы $i, j \in \mathbf{n}$ *совместимы* полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, если они совместимы некоторой матрицей $A \in \mathcal{P}$.

Определение 7. Индексы i и j *солидарны* в полугруппе $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, если существует последовательность индексов

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_s = j, \tag{5.1}$$

в которой соседние индексы i_k, i_{k+1} совместимы полугруппой $\mathcal{P}$, т.е. совместимы некоторой матрицей $A_k \in \mathcal{P}$ $(k = 1, \ldots, s-1)$.

Отношение солидарности индексов в $\mathcal{P}$ является, очевидно, отношением эквивалентности на $\mathbf{n}$.

Лемма 5. *Пусть для матриц $A, B \in \mathbb{P}_n$*

$$\operatorname{crk}(A) = \operatorname{crk}(A^2) = \operatorname{crk}(B) = \operatorname{crk}(B^2) = \operatorname{crk}(AB) = r \geq 2. \tag{5.2}$$

Тогда

1) разбиение на классы солидарности для матриц A и B является одинаковым, причём на этих классах матрицы A и B действуют как перестановки;

2) матрицы A и B одним преобразованием перестановочного подобия приводятся к блочно-мономиальному виду блочного порядка r, причём все ненулевые блоки являются цепными матрицами.

Доказательство. Рассмотрим разбиения множества $\mathbf{n}$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r \tag{5.3}$$

$$\alpha_1 A,\ \alpha_2 A,\ \ldots,\ \alpha_r A, \tag{5.4}$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_r, \tag{5.5}$$

$$\beta_1 B,\ \beta_2 B,\ \ldots,\ \beta_r B. \tag{5.6}$$

Здесь (5.3) и (5.5) — классы солидарности для матриц A и B. При условии (5.2) указанные четыре разбиения совпадают (т.е. отличаются лишь порядком перечисления членов). Действительно, разбиения (5.3) и (5.4), а также (5.5) и (5.6), совпадают по следствию 1 (с.150); совпадение (5.4) и (5.5) вытекает из теоремы 1 (с.147).

Поскольку матрицы A и B определяют одно и то же разбиение множества $\mathbf{n}$ на классы солидарности, то можно выбрать одно перестановочное подобие (способом, описанным в доказательстве леммы 4), приводящее эти матрицы к блочно-мономиальному виду. В этих матрицах, согласно лемме 4, ненулевые блоки являются цепными матрицами. □

Пусть $I(\mathcal{P})$ — множество матриц полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, имеющих минимальный цепной ранг:

$$I(\mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{P} \mid \operatorname{crk}(A) = \min_{M \in \mathcal{P}} \operatorname{crk}(M)\}. \tag{5.7}$$

Из (2.2) следует, что $I(\mathcal{P})$ — (двусторонний) идеал в $\mathcal{P}$.

Следствие 2. *Для матриц идеала $I(\mathcal{P})$ классы солидарности одинаковы.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любых $A, B \in I(\mathcal{P})$ выполняются условия леммы 5. Следовательно, если для какой-нибудь матрицы $A \in I(\mathcal{P})$ известны классы солидарности, то они являются классами солидарности для любой из матриц идеала $I(\mathcal{P})$. □

Лемма 6. [3, лемма 2] *Пусть для матриц A, B из $\mathbb{P}$ существует произведение AB. Если индексы i и j совместимы матрицей A, то они совместимы и матрицей AB.*

Доказательство. Пусть $(A)_{ik} > 0, (A)_{jk} > 0, (B)_{kl} > 0$. Отсюда

$$(AB)_{il} \geq (A)_{ik}(B)_{kl} > 0, \ (AB)_{jl} \geq (A)_{jk}(B)_{kl} > 0.$$

□

Лемма 7. *Индексы $i, j \in \boldsymbol{n}$ совместимы полугруппой $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда они совместимы (любой) матрицей, принадлежащей идеалу $I(\mathcal{P})$.*

Доказательство. Согласно следствию 2 достаточно доказать, что индексы i, j совместимы какой-нибудь матрицей из $I(\mathcal{P})$. Пусть индексы $i, j \in \mathbf{n}$ совместимы матрицей $B \in \mathcal{P}$. В силу леммы 6 при $C \in I(\mathcal{P})$ они совместимы матрицей $BC \in I(\mathcal{P})$.

Обратное утверждение очевидно. □

Теорема 2. *Индексы $i, j \in \boldsymbol{n}$ солидарны в $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда они солидарны в (любой) матрице, принадлежащей идеалу $I(\mathcal{P})$.*

Доказательство. Пусть индексы i, j солидарны в $\mathcal{P}$. Тогда в последовательности (5.1) соседние индексы совместимы полугруппой $\mathcal{P}$ и по лемме 7 они A-солидарны при любой $A \in I(\mathcal{P})$. Поскольку солидарность индексов есть транзитивное отношение, то индексы i, j тоже A-солидарны.

Обратное утверждение очевидно. □

Определение 8. Индексом несолидарности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ называется максимальное число $r = r(\mathcal{P})$ индексов, любые два из которых несолидарны в $\mathcal{P}$. Другими словами, индекс $r(\mathcal{P})$ равен числу классов $\mathcal{P}$-солидарности.

По теореме 2 классы солидарности полугруппы $\mathcal{P}$ совпадают с классами солидарности любой из матриц идеала $I(\mathcal{P})$. Отсюда и из описания (5.7) идеала $I(\mathcal{P})$ следует, что индекс несолидарности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ равен наименьшему из цепных рангов матриц полугруппы:

$$r(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} \operatorname{crk}(A). \tag{5.8}$$

Теорема 3. *Пусть дана полугруппа $\mathcal{P}$ матриц с индексом несолидарности, равным r, в множестве $n \times n$-матриц без нулевых строк или столбцов.*

1. Если $r = 1$, то полугруппа $\mathcal{P}$ цепная (т.е. содержит цепную матрицу).

2. Если $r \geq 2$, то все матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют на классах солидарности как перестановки. Все матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ одним преобразованием перестановочного подобия приводятся к блочно-мономиальному виду блочного порядка r. Преобразованная полугруппа содержит матрицы, в которых все ненулевые блоки являются цепными матрицами.

Доказательство. 1. Утверждение немедленно следует из (5.8).

2. По лемме 5 все матрицы идеала $I(\mathcal{P})$ действуют на классах солидарности как перестановки и одним преобразованием перестановочного подобия приводятся к блочно-мономиальному виду блочного порядка r с цепными ненулевыми блоками.

Теперь докажем, что не только матрицы из $I(\mathcal{P})$, но любая матрица $A \in \mathcal{P}$ действует на классах солидарности как перестановка. Согласно лемме 3 достаточно доказать, что A-последователи несолидарных индексов несолидарны. Предположим противное: для несолидарных индексов i и j имеем $(A)_{ik} > 0, (A)_{jl} > 0$, но индексы k и l солидарны. Тогда, если $B \in I(\mathcal{P})$ и

$(B)_{ks} > 0, (B)_{lt} > 0$, то s и t солидарны. Для матрицы $AB \in I(\mathcal{P})$ и индексов i и j имеем:

$$(AB)_{is} \geq (A)_{ik}(B)_{ks} > 0, (AB)_{jt} \geq (A)_{jl}(B)_{lt} > 0,$$

следовательно, индексы i и j, как имеющие солидарных последователей, должны быть солидарными. Пришли к противоречию. □

6 Связь теоремы Протасова–Войнова и теоремы 3

Напомним, что по одному из эквивалентных определений неотрицательная матрица A порядка n называется неприводимой, если для любых индексов i, j из множества $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$ существует такой показатель l, что (i, j)-элемент матрицы A^l положителен. Из теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц известно, что спектральный радиус $\rho(A)$ неприводимой матрицы A является её простым собственным значением. Количество $r = r(A)$ собственных значений, равных $\rho(A)$ по модулю, называется индексом импримитивности неприводимой матрицы. При $r = 1$ матрица является примитивной, а если $r > 1$, то импримитивной. Комбинаторная (т. е. определяемая расположением положительных элементов) характеристика примитивной матрицы состоит в том, что некоторая её степень является положительной матрицей. По известной теореме Фробениуса неприводимая матрица либо примитивна, либо преобразованием перестановочного подобия приводится к так называемой форме Фробениуса:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

причём в матрице $A^r = \mathrm{diag}(A_{11}^{(r)}, A_{22}^{(r)}, \ldots, A_{rr}^{(r)})$ диагональные блоки примитивны (см., например [6, гл. 8, пар. 2]).

В работе [8] Протасов и Войнов доказали обобщение теоремы Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. При этом использовались следующие полугрупповые аналоги определений неприводимой и примитивной матрицы. Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n называется неприводимой, если для любых $i, j \in \mathbf{n}$ в $\mathcal{P}$ найдётся матрица с положительным (i, j)-элементом. Легко видеть, что неприводимость неотрицательной матрицы A эквивалентна неприводимости полугруппы $\langle A \rangle$. Полугруппа называется примитивной, если она содержит хотя бы одну положительную матрицу. Неприводимые полугруппы, не являющиеся примитивными, называются импримитивными.

Теорема Протасова–Войнова ([8]) описывает комбинаторную структуру неприводимой полугруппы неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов. Ключевым понятием теоремы является понятие индекса импримитивности полугруппы. Мы приведём соответствующее определение и теорему в формулировке, несколько отличающейся от оригинальной, но более удобной в контексте данной работы.

Определение 9. Индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ называется наибольшее число r, такое, что существуют r индексов, любые два из которых не совместимы полугруппой $\mathcal{P}$.

Теорема 4. *([8, теорема 1]) Пусть $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ неприводимая полугруппа с индексом импримитивности r. Если $r = 1$, то полугруппа $\mathcal{P}$ содержит положительную матрицу.*

Если $r \geq 2$, то существует единственное разбиение множества $\boldsymbol{n}$ на r классов, на котором все матрицы полугруппы действуют как перестановки. Это разбиение называется каноническим.

Все матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ одним преобразованием перестановочного подобия приводятся к блочно-мономиальному виду блочного порядка r. Преобразованная полугруппа содержит матрицы, в которых все ненулевые блоки положительны.

Для дальнейшего существенно то, что каноническое разбиение допускает описание в терминах совместимости:

Теорема 5. *([2]) Для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ разбиение множества $\boldsymbol{n}$ на классы совместимости является каноническим разбиением.*

Теорема 6. *Разбиение множества $\boldsymbol{n}$ на классы солидарности является подразбиением любого разбиения, на котором матрицы полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ действуют как перестановки.*

Доказательство. Пусть на разбиении π матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют как перестановки. Предположим, что индексы i и j солидарны в полугруппе $\mathcal{P}$. Тогда, согласно определению 7, существует такая последовательность индексов

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_s = j, \tag{6.2}$$

что индексы i_k, i_{k+1} совместимы некоторой матрицей $A_k \in \mathcal{P}$, $k = 1, \ldots, s-1$. Индексы, лежащие в разных π-классах, не совместимы, очевидно, никакой матрицей из $\mathcal{P}$. Другими словами, индексы, совместимые матрицей из $\mathcal{P}$, необходимо лежат в одном π-классе. Отсюда следует, что любые два соседних индекса в последовательности (6.2) лежат в одном π-классе, а потому солидарные индексы i и j лежат в том же π-классе. Это значит, что разбиение на классы солидарности является подразбиением разбиения π. □

Теорема 7. *Для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ разбиение на классы солидарности совпадает с разбиением на классы совместимости.*

Доказательство. 1) По теореме 6 разбиение на классы $\mathcal{P}$-солидарности является подразбиением разбиения на классы $\mathcal{P}$-совместимости, т.е. $\mathcal{P}$-солидарные индексы $\mathcal{P}$-совместимы. 2) Из определения 7 видно, что $\mathcal{P}$-совместимые индексы $\mathcal{P}$-солидарны. Из 1) и 2) следует утверждение теоремы. □

В силу теоремы 7 индекс несолидарности неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ совпадает с её индексом импримитивности. В частности, индекс несолидарности неприводимой матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ равен её индексу импримитивности.

Применим полученные результаты к полугруппе $\langle A \rangle$, порождённой единственной матрицей $A \in \mathbb{P}_n$. Из неравенства (2.2) следует цепочка неравенств

$$\mathrm{crk} A \geq \mathrm{crk} A^2 \geq \cdots \geq \mathrm{crk} A^k \geq \mathrm{crk} A^{k+1} \geq \cdots \tag{6.3}$$

причём имеет место теорема

Теорема 8. *([5], теор. 3.5) Если $\mathrm{crk} A^{k+1} = \mathrm{crk} A^k$, то $\mathrm{crk} A^{k+t} = \mathrm{crk} A^k$ для всех $t \in \mathbb{N}$.*

Обозначим через $\varkappa$ минимальный показатель, при котором в цепочке неравенств (6.3) имеет место равенство $\mathrm{crk}A^{\varkappa+1} = \mathrm{crk}A^{\varkappa}$.

Предложение 4. $\varkappa \le n-1$.

Доказательство. Вначале отметим очевидное: $\varkappa \le n$. Допустим, что $\varkappa = n$. Это равенство возможно только если $\mathrm{crk}A = n$, следовательно, по предложению 2, A — мономиальная матрица. Множество мономиальных матриц замкнуто относительно умножения, поэтому $\mathrm{crk}A^k = n$ при $k = 1, 2, \dots$ Но в этом случае $\varkappa = 1$. Ввиду полученного противоречия получаем $\varkappa \le n-1$. □

Из предложения 4 следует, что матрица A^{n-1} принадлежит идеалу $I(\langle A\rangle)$. Учитывая это, из теоремы 2 выводим:

Следствие 3. *Пусть $A \in \mathbb{P}_n$. Индексы $i, j \in \boldsymbol{n}$ солидарны в полугруппе $\langle A\rangle$ тогда и только тогда, когда они солидарны в матрице A^{n-1}.*

Индекс несолидарности полугруппы $\langle A\rangle$ обозначим символом $r(A)$. Тогда утверждение следствия 3 можно записать в виде равенства

$$r(A) = \mathrm{crk}A^{n-1}. \tag{6.4}$$

Теорема 9. *Пусть $A \in \mathbb{P}_n$.*

1. Если $r(A) = 1$, то A — потенциально цепная матрица, а именно, матрицы A^k, $k \ge n-1$, являются цепными матрицами.

2. Если $r = r(A) \ge 2$, то матрица A преобразованием перестановочного подобия приводится к блочно-мономиальному виду блочного порядка r. В матрицах A^k, $k \ge n-1$, ненулевые блоки являются цепными матрицами.

Предположим, что матрица A неприводима. По теореме 7 классы солидарности полугруппы $\langle A\rangle$ совпадают с классами совместимости. Если $r(A) = 1$, т.е. любые два индекса совместимы, то A — примитивная матрица, см. [4, предложение 6.1]. Теперь пусть $r = r(A) \ge 2$. Тогда классы совместимости образуют так называемое циклическое разбиение множества n. Это значит, что существует нумерация классов совместимости: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, при которой $\alpha_1 A = \alpha_2, \alpha_2 A = \alpha_3, \dots, \alpha_r A = \alpha_1$. Этой нумерации соответствует форма (6.1). Таким образом, в неприводимом случае блочно-мономиальная форма из теоремы 9 превращается в форму Фробениуса. Подробный вывод формы Фробениуса с помощью отношения совместимости см. в [1].

Благодарности

Авторы благодарны Владимиру Протасову за интересные обсуждения.

References

[1] Yu.A. Alpin, *Nonnegative matrices* — Kazan. Fed. University, 2015.

[2] Al'pin Yu. A., Al'pina V.S. *A New Proof of the Protasov-Voynov Theorem on Semigroups of Nonnegative Matrices* — Math Notes **105**, 805–811 (2019).

[3] Yu.A. Alpin, V.S. Alpina, Combinatorial Properties of Entire Semigroups of Nonnegative Matrices J Math Sci **207**, 674–685 (2015).

[4] Yu.A. Alpin, I.V. Bashkin, *Nonnegative chainable matrices* — Computational methods and algorithms. Part XXXIII, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **496**, POMI, St. Petersburg, 5–25, (2020). Translation in J. Math. Sci. (N.Y.) **255**, no. 3, 217–230 (2021).

[5] Yu.A. Alpin, A.E. Guterman, E.R. Shafeev *An upper bound for the chainable index* — J Math Sci **272**, 487–495, (2023).
[6] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices* — Nauka, 1967.
[7] J. Hartfiel, J. Maxson, The chainable matrix, a special combinatorial matrix. — Discrete Math., **12** (1975), 245-256.
[8] V.Yu. Protasov, A.S. Voynov, Sets of nonnegative matrices without positive products. — Linear Algebra Appl., **437**, 749-765 (2012).

(Ю.А. Альпин) Yuri Abdullovich Alpin
Gogol st. 9, ap. 1,
420015 Kazan, Russia

(А.Э. Гутерман) Alexander Emilevich Guterman
Department of Mathematics, Bar-Ilan University,
5290002 Ramat Gan, Israel

(Е.Р. Шафеев) Eugenii Rinatovich Shafeev
Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University,
119991 Moscow, Russia

Email address: yurialpin016@gmail.com, alexander.guterman@biu.ac.il, shafeev.ev@yandex.ru