

HP-ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ И
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С УРАВНЕНИЯМИ
КОЛЛОКАЦИИ В КОРНЯХ ПОЛИНОМОВ
ЛЕЖАНДРА

Л.С. БРЫНДИН , В.А. БЕЛЯЕВ 

Представлено М.А. ШИШЛЕНИНЫМ

Abstract: The paper addresses new hp-version of the least-squares collocation method (hp-LSCM) with Gaussian points. The optimal order of convergence of the developed method for solving boundary value problems for Poisson’s equation, biharmonic equation, and for a system of partial differential equations of the Reissner–Mindlin plate problem is shown numerically. An algorithm for obtaining a system of linear algebraic equations with an invertible quadratic matrix in hp-LSCM is given. The advantages of the developed collocation method in comparison with previous versions of the hp-LSCM and isogeometric collocation method are shown.

Keywords: least-squares collocation method, optimal convergence, Gaussian points, Poisson’s equation, biharmonic equation, Kirchhoff–Love theory, Reissner–Mindlin theory, plate bending.

1 Введение

Численное решение краевых задач для уравнений с частными производными (УЧП) играет одну из ключевых ролей в анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) различных элементов конструкций. При этом эффективность и точность расчетов в решающей степени зависят от лежащих в их основе численных методов. На сегодняшний день одним из наиболее распространенных способов решения задач механики деформируемого твердого тела является надежный и математически обоснованный метод конечных элементов (МКЭ).

Одним из главных конкурентов МКЭ являются коллокационные методы (КМ), которые проще реализовать, в том числе их hp-варианты для решения УЧП со сложными краевыми условиями [1–3]. Здесь под приставкой “hp” подразумевается возможность в численном методе повышать точность расчетов за счет измельчения шагов сетки (h-подход) и увеличения степеней аппроксимирующих полиномов (p-подход). КМ зачастую вычислительно эффективнее по сравнению с МКЭ, т. к. для первых отсутствует необходимость интегрирования на этапе сборки матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), и в некоторых случаях возникает меньшее количество ненулевых элементов в матрице СЛАУ [4–6].

В фундаментальной работе де Бора [7] показано, что КМ с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра обеспечивает оптимальный порядок сходимости приближенного решения в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Дальнейшее развитие КМ было связано с распространением данного подхода на решение двумерных краевых задач для УЧП. Так, в работе [8] использовались квадратичные сплайны для решения двумерного уравнения Гельмгольца, а в [9] — для бигармонического уравнения, которое было сведено к системе из двух УЧП. В статье [10] бикубический Эрмитов базис применялся для двумерного нестационарного уравнения диффузии, а в [5] он же — для уравнения Пуассона в области с криволинейной границей. Работа [11] посвящена решению нестационарного двумерного уравнения диффузии-реакции двух переменных с использованием ортогонального метода сплайн-коллокации с C^1 кусочно-полиномиальной аппроксимацией 3, 4 и 5 степеней, в которой показан оптимальный порядок сходимости по пространству. Здесь и в дальнейшем под оптимальным порядком сходимости погрешности приближенного решения по аналогии с [12] будем называть сходимость, соответствующую следующему соотношению

$$\max_{(x,y) \in \Omega} |u_h^{(k)}(x,y) - u^{(k)}(x,y)| = O(h^{p-k+1}), \quad (1)$$

где Ω — расчетная область, u_h и u — приближенное и точное решение задачи соответственно, $k = 0, 1, 2, \dots$ — порядок производной, p — старшая степень полиномов по каждому из пространственных направлений x и

y . При этом под аппроксимирующей функцией подразумевается прямое произведение полиномиальных приближений.

В данной статье мы рассматриваем численное решение краевых задач для уравнения Пуассона, бигармонического уравнения [1, 2], решение которого описывает прогиб пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява (ТКЛ) [13], а также для задач изгиба пластин в теории Рейсснера–Миндлина (ТРМ) [14]. Для решения упомянутых задач мы предлагаем новый hr-вариант метода коллокации и наименьших квадратов (hr-МКНК), в котором точками записи уравнений коллокации являются корни полиномов Лежандра, в отличие от работ [15, 16], где они расставлялись в корнях полиномов Чебышева и использовались соответствующие аппроксимирующие полиномы. С указанными работами, а также с изогеометрическим методом коллокации (IGA-C) [6], в данной статье проведено сравнение и показаны преимущества разработанного подхода.

2 Постановка задачи

В настоящей статье рассматривались несколько двумерных краевых задач для УЧП в квадратной области $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$. Первая из них — задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $u(x, y)$ — искомая функция, $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — заданные.

Следующая задача — бигармоническое уравнение, описывающее изгиб изотропных пластин в ТКЛ и дополненное краевыми условиями шарнирного закрепления (см. [13], гл. 4, разд. 21). Уравнения, записанные в безразмерном виде, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 12(1 - \nu^2) \frac{q}{q^*}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где $w(x, y)$ — прогиб пластины, $q(x, y)$ — поперечная нагрузка, $D = Et^3/(12(1 - \nu^2))$ — жесткость пластины при изгибе, $t = \text{const}$ — толщина, $E = \text{const}$ — модуль упругости, $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона, $M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$ — изгибающий момент, $M_x = -\frac{1}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, $M_y = -\frac{1}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$, $M_{xy} = \frac{1}{12(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, (n_x, n_y) — вектор внешней единичной нормали к $\partial\Omega$.

При обезразмеривании системы полагалось $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{w} = w \cdot Et^3/(q^*L^4)$, $\tilde{M}_x = M_x/L^2$, $\tilde{M}_y = M_y/L^2$, $q^* = \text{const}$ — выбираемая в каждом конкретном случае нагрузка, $L = \text{const}$ — характерный размер

области, равный в данном случае единице. Заметим, что при записи (4)–(5) волнистые черточки над переменными уже были опущены.

В ТКЛ (4) называется также уравнением Софи Жермен–Лагранжа (см. [13], гл. 4, разд. 21). Его особенностью является наличие производных высокого (четвертого) порядка в самом уравнении и вплоть до третьих производных в граничных условиях (см. [13], гл. 4, разд. 22), что влечет за собой плохую обусловленность математической задачи, приводящую к существенному усложнению ее численного решения [1, 3, 17].

В случае ТРМ возникает система, состоящая из трех УЧП и имеющая в безразмерных переменных следующий вид [14, 15]:

$$\frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \right) = -1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \\ \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \\ \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где $K = 5/6$ — сдвиговой коэффициент Тимошенко, $\phi_x(x, y)$ и $\phi_y(x, y)$ — углы поворота нормали срединной поверхности вокруг осей y и x соответственно, $\beta = t/L$ — малый параметр.

При обезразмеривании системы полагалось $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{w} = w \cdot Et^3/(q^*L^4)$, $\tilde{\phi}_x = \phi_x \cdot Et^3/(q^*L^3)$, $\tilde{\phi}_y = \phi_y \cdot Et^3/(q^*L^3)$. Заметим, что при записи (6)–(8) волнистые черточки над переменными уже были опущены.

Дополним систему (6)–(8) краевыми условиями заземления [18]

$$w = 0, \quad \phi_n = \phi_x n_x + \phi_y n_y = 0, \quad \phi_s = \phi_y n_x - \phi_x n_y = 0. \quad (9)$$

В отличие от ТКЛ в ТРМ возникает малый параметр β , стоящий перед вторыми (старшими) производными углов поворота ϕ_x и ϕ_y . Для системы (6)–(8) свойственен также эффект сдвигового запираия: при $t \rightarrow 0$ приближенное решение все хуже удовлетворяет требованиям, допускающим нулевые деформации поперечного сдвига [6, 19]. Для преодоления этой сложности существует несколько различных способов [20], одним из которых является применение относительно высоких степеней полиномов для исходной постановки (6)–(8). Так, в работе [19] подчеркивается эффективность от использования МКЭ с полиномами третьего порядка или выше в зависимости от малости толщины пластины. Про

другие приемы “борьбы” со сдвиговым запираением предлагаем читателю ознакомиться со статьей [19] и цитируемыми там публикациями.

Целью работы является построение hr-МКНК оптимального порядка сходимости, его компьютерная реализация и исследование возможностей при решении вышеуказанных задач.

3 Описание hr-МКНК с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра

Опишем подробно hr-МКНК на примере решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (2), (3), а для остальных постановок сделаем соответствующие примечания. Область Ω покрывается регулярной сеткой с квадратными ячейками в количестве $N \times N$. В каждой ячейке сетки вводится своя локальная система координат (ξ_1, ξ_2) по следующим формулам:

$$\xi_1 = \frac{x - x_c}{h}, \quad \xi_2 = \frac{y - y_c}{h},$$

где (x_c, y_c) — центр ячейки, а h — половина ее стороны, $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$.

Приближенное решение в j -й ячейке, $j = 1, \dots, N^2$, ищется в виде прямого произведения полиномов степени p по каждому из пространственных направлений

$$u_j^h(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^p \sum_{i_2=0}^p c_{j,i_1 i_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}, \quad (10)$$

где $c_{j,i_1 i_2}$ — неизвестные коэффициенты, определяющиеся из решения в общем случае переопределенной СЛАУ, состоящей из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

Уравнения коллокации получаются подстановкой приближенного решения (10) в уравнение (2) в точках (η_{k_1}, η_{k_2}) , $k_1, k_2 = 1, \dots, N_c$, являющимися корнями полинома Лежандра степени N_c (рисунок 1). Данные уравнения имеют следующий вид:

$$p_c \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \xi_2^2} \right) = p_c f, \quad (11)$$

где p_c — положительный весовой множитель уравнения коллокации.

Для построения hr-МКНК оптимального порядка сходимости здесь мы опираемся на теорему 4.1 из [7], в которой описываются условия достижения КМ оптимального порядка сходимости при решении ОДУ порядка m . Из нее следует, что количество точек коллокации в корнях полиномов Лежандра степени N_c строго связано с m и p и определяется как $N_c = p - m + 1$, при этом должно выполняться $N_c \geq m$. Таким образом, если $m = 2$, то $N_c = p - 1$ и $N_c \geq 2$, если $m = 4$, то $N_c = p - 3$ и $N_c \geq 4$. В данной работе численно устанавливается, распространяются ли результаты указанной теоремы на предлагаемый нами hr-МКНК

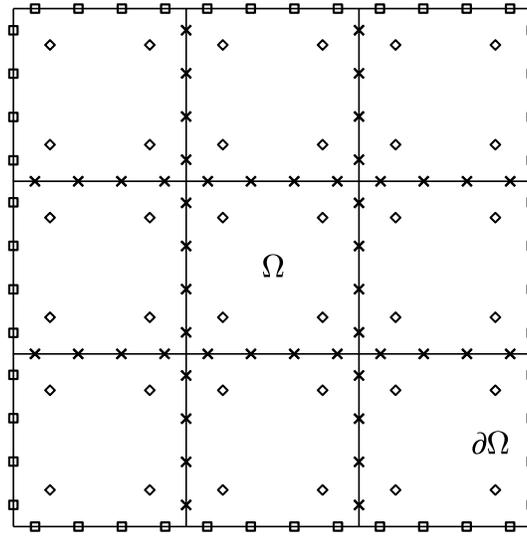


Рис. 1. Пример сетки 3×3 в МКНК при $N_c = 2$, $N_m = N_b = 4$. Значок “◇” обозначает точки коллокации, “×” — точки согласования, “□” — точки записи краевых условий

решения двумерных краевых задач для УЧП. Следовательно, для уравнения Пуассона (2) и системы (6)–(8) минимальная степень полиномов для получения КМ оптимального порядка сходимости в (10) должна равняться трем, а для бигармонического уравнения (4) — семи.

Для УЧП, содержащих старшие производные второго порядка, выписываются следующие условия согласования [1, 2, 15, 16]:

$$p_{m_0} u_j^h + p_{m_1} \frac{\partial u_j^h}{\partial \vec{n}} = p_{m_0} \hat{u} + p_{m_1} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{n}}, \quad (12)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, \hat{u} — приближенное решение из соседней с j -й ячейки, p_{m_0}, p_{m_1} — положительные весовые множители условий согласования.

Уравнения вида (12) необходимы для обеспечения непрерывности решения и его первых производных по нормали на границах между соседними ячейками. Выпишем их в N_m точках, равномерно расположенных на общих сторонах соседних ячеек (рисунок 1).

В случае решения уравнения, содержащего старшие производные четвертого порядка (4), дополнительно к (12) выписываются условия, обеспечивающие непрерывность кусочно-полиномиального базиса вплоть до третьих производных в N_m точках

$$p_{m_2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \vec{n}^2} + p_{m_3} \frac{\partial^3 u_j^h}{\partial \vec{n}^3} = p_{m_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \vec{n}^2} + p_{m_3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \vec{n}^3}, \quad (13)$$

где p_{m_2}, p_{m_3} — положительные весовые множители условий согласования.

Несложно показать, что из (12) и (13) следует непрерывность решения и его производных по отдельности [2]. Однако линейные комбинации сокращают количество уравнений в СЛАУ и ускоряют сходимость итерационного процесса ее решения (см. замечание 1 из [21]).

Краевые условия для (3) выписываются в ячейках, одна или две стороны которых совпадают с границей области $\partial\Omega$, в равномерно расположенных N_b точках на ней (рисунок 1)

$$p_b u_j^h = p_b g, \tag{14}$$

где p_b — положительный весовой множитель краевого условия.

Количество уравнений согласования N_m и краевых условий N_b строго не связано со степенью полиномов p в (10) и порядком старшей производной m в УЧП для обеспечения оптимального порядка сходимости метода. Однако их значения влияют на вид матриц и их числа обусловленности $\text{cond}_2(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$, где A — произвольная матрица локальной/глобальной СЛАУ, $\sigma_{\max}(A)$ и $\sigma_{\min}(A)$ — максимальное и минимальное сингулярное число соответственно. В данной работе значения N_m и N_b подбирались экспериментально с исследованием $\text{cond}_2(A)$.

При решении бигармонического уравнения (4) и системы (6)–(8) приближенное решение для каждой неизвестной функции искалось в форме (10); уравнения коллокации записывались аналогично (11); краевые условия (5) и (9) аппроксимировались аналогично (14). Условия согласования для (6)–(8) выписывались в виде (12) для каждой неизвестной функции.

Уравнения (11), (12) и (14) составляют локальную СЛАУ в j -й ячейке. Объединяя локальные СЛАУ каждой ячейки, получим глобальную СЛАУ, которая в МКНК в общем случае является переопределенной. Степенью переопределения η будем называть отношение количества уравнений к числу неизвестных коэффициентов. Если $\eta > 1$, то, во-первых, возникает усложнение решения линейной задачи наименьших квадратов из-за зависимости от значений весовых множителей [21–23], которые подбираются эмпирически, а, во-вторых, увеличивается время решения переопределенной СЛАУ по сравнению с временем решения квадратной СЛАУ. Далее будет сформулирован алгоритм построения квадратной СЛАУ (как частный случай разработанного КМ), показана его работоспособность и проведено сравнение с hp-МКНК, в котором применяются переопределенные СЛАУ.

В данной работе рассматриваются и сравниваются между собой два способа решения СЛАУ в МКНК:

- 1) прямой ортогональный метод с распараллеливанием на видеокартах компании Nvidia с применением технологии CUDA, реализованный в библиотеке SuiteSparse [24];

- 2) метод итераций по подобластям с применением ускорения итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова и решении переопределенных СЛАУ [23], операции продолжения на многосеточном комплексе при переходе с грубой сетки на более подробную для задания начального приближения [1], распараллеливания с помощью OpenMP со способом обхода подобластей, основанного на красно-черном упорядочивании (см. [25], гл. 3), и свойства специального вида матриц и правых частей локальных СЛАУ в МКНК [26].

Во втором методе итерационный процесс прекращался, когда

$$\max_{j, i_1 i_2} |c_{j, i_1 i_2}^{s+1} - c_{j, i_1 i_2}^s| < \epsilon, \quad (15)$$

где $c_{j, i_1 i_2}^s, c_{j, i_1 i_2}^{s+1}$ — коэффициенты в представлении приближенного решения u_j^h (10) на s -й и $(s + 1)$ -й итерациях соответственно, $s = 0, 1, \dots, N_{iter}$, N_{iter} — количество итераций, ϵ — малая величина, называемая псевдопогрешностью. В расчетах имеет смысл ее подбирать таким образом, чтобы при дальнейшем уменьшении ϵ существенных изменений в погрешности приближенного решения не происходило.

4 Результаты численных экспериментов и их обсуждение

В приведенных ниже результатах для оценки сходимости погрешности приближенного решения использовались следующие величины

$$\|E_a^u\|_\infty = \max_{j=1, \dots, N^2} \max_{l=1, \dots, \mathfrak{M}} |u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l)|,$$

$$\|E_r^u\|_\infty = \frac{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{l=1, \dots, \mathfrak{M}} |u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l)|}{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{l=1, \dots, \mathfrak{M}} |u_{ex}(x_l, y_l)|},$$

$$\|E_r^u\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N^2} \sum_{l=1}^{\mathfrak{M}} (u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l))^2}{\sum_{j=1}^{N^2} \sum_{l=1}^{\mathfrak{M}} u_{ex}^2(x_l, y_l)}},$$

где u_{ex} — точное решение задачи, \mathfrak{M} — множество, состоящее из 100 равномерно распределенных точек (x_l, y_l) в каждой j -й ячейке. Вместо u при решении бигармонического уравнения (4) и системы (6)–(8) в обозначениях погрешности полагаются характеристики НДС.

Порядок сходимости погрешности приближенного решения вычислялся следующим образом:

$$R = \frac{\log_2 \frac{E_2}{E_1}}{\log_2 \frac{N_1}{N_2}},$$

где E_1 и E_2 — погрешности на двух сетках с количеством ячеек $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$ соответственно.

Расчеты были проведены на процессоре 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H 2.70 GHz, DIMM DDR5 2400 MHz 16 Gb и видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3070 Ti Laptop, 8 GB. Для распараллеливания с помощью OpenMP использовалось 20 логических процессоров. В методе итераций по подобластям в качестве начального приближения на самой грубой сетке все неизвестные коэффициенты $c_{j,i_1 i_2}^0 = 0.4$. Для распараллеливания на видеокарте использовалась CUDA с выделением $7 \cdot 10^9$ бит памяти.

4.1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Рассмотрим (2), (3) в $\Omega = (0, 1)^2$ с тестовым решением $u_{ex}(x, y) = 3e^x e^y (x - x^2)(y - y^2)$. Данная задача решалась в [27] КМ с бикубическими сплайнами с установкой точек коллокации в корнях полиномов Лежандра 2-й степени.

В таблице 1 приведены результаты численных экспериментов, полученных в [27] и hr-МКНК, в котором были взяты следующие параметры: $N_c = p - 1, N_m = N_b = p + 1, p_c = h^2, p_{m_0} = p_{m_1} = p_b = 1$. В ней и других таблицах в последней строке приведены средние арифметические значения R_{av} всех значений R . Аналогичные значения использовались в hr-МКНК для переопределенных СЛАУ и в других примерах, если не указано иное.

Таблица 1. Результаты численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в примере 4.1

$N \times N$	Работа [27]		МКНК, $p = 3$		МКНК, $p = 4$		МКНК, $p = 5$	
	$\ E_a^u\ _\infty$	R						
2×2	8.85e-3	—	8.91e-3	—	2.42e-4	—	7.23e-6	—
3×3	1.70e-3	4.06	1.74e-3	4.02	3.42e-5	4.82	5.92e-7	6.17
4×4	5.69e-4	3.81	5.61e-4	3.93	7.63e-6	5.21	1.05e-7	6.01
5×5	2.35e-4	3.97	2.33e-4	3.93	2.49e-6	5.01	2.92e-8	5.73
6×6	1.13e-4	4.01	1.11e-4	4.06	1.02e-6	4.89	9.92e-9	5.92
7×7	6.16e-5	3.93	6.06e-5	3.92	4.77e-7	4.93	3.86e-9	6.12
8×8	3.58e-5	4.06	3.53e-5	4.04	2.40e-7	5.14	1.73e-9	6.01
9×9	2.25e-5	3.95	2.20e-5	4.01	1.33e-7	5.01	8.67e-10	5.86
10×10	1.48e-5	3.97	1.45e-5	3.95	7.94e-8	4.89	4.61e-10	5.99
R_{av}		3.97		3.98		4.99		5.98

Из таблицы 1 видно, что при $p = 3$ в hr-МКНК получены практически идентичные [27] результаты и при любом p достигнут порядок сходимости близкий к оптимальному. Здесь в hr-МКНК для решения СЛАУ использовался метод итераций по подобластям.

Увеличение N_c приводило к уменьшению порядка сходимости R , который становился равным $p - 1$ для нечетных p и равным p для четных p , как это также наблюдалось ранее в работах [15], [16], посвященных hr-МКНК с представлением приближенного решения в виде (10).

Отметим, что hr-МКНК обладает важным достоинством, которое выражено в его автоматизированной реализации на компьютере. В предыдущих статьях [1], [15], [16] всегда решались переопределенные СЛАУ и выбираемой по указанным там алгоритмам степени переопределения η хватало для того, чтобы решить линейную задачу наименьших квадратов, матрица которой имела конечное число обусловленности. Однако в цитируемых работах не исследовался вопрос попытки построения КМ с квадратными СЛАУ, матрица которых была бы невырожденной.

В разработанном здесь КМ можно получить квадратную СЛАУ различными способами. Если положить $N_m = N_b = p$, то $\eta = 1$, но локальная матрица СЛАУ для внутренних ячеек оказывается вырожденной. Однако СЛАУ с невырожденной квадратной матрицей в hr-МКНК можно получить, если выбрать $N_m = p + 1$, $N_b = p$ и при записи условий согласования на каждой противоположной стороне ячейки “пропустить” одну точку — либо первую, либо последнюю (отсчет в компьютерной программе ведется сверху вниз и слева направо), т. е. в них не выписывать условия (12). Например, на левой стороне пропускаем первую точку, а на правой — последнюю, и аналогично поступаем для верхней и нижней сторон ячейки. Путем вычисления чисел обусловленности $\text{cond}_2(A)$ было установлено, что они конечны и принимают небольшие значения. Так, например, на сетке 20×20 при $p = 3$ число обусловленности переопределенной глобальной СЛАУ $\text{cond}_2(A) = 933.92$, квадратной $\text{cond}_2(A) = 940.57$; максимальное число обусловленности локальных переопределенных СЛАУ $\text{cond}_2(A) = 33.44$, квадратных — $\text{cond}_2(A) = 103.44$. Отметим также, что в случае решения квадратной СЛАУ прямым методом получились абсолютно такие же результаты, как и в таблице 1.

Стоит отметить, что не все способы пропустить какие-либо точки согласования приводят к одинаковым результатам. Например, при $p = 4$ на сетке 10×10 в указанном выше случае максимальное число обусловленности локальных СЛАУ $\max \text{cond}_{loc}$ равно $1.01e + 3$, и для решения задачи при $\epsilon = 10^{-12}$ без использования ускорения по Крылову потребовалось 268 итераций для сходимости. Если же пропустить вторую, а не первую точку, то $\max \text{cond}_{loc} = 1.76e + 3$, однако это не влияет на число итераций и погрешность результатов. В случае, если пропускать третью, а не первую точку согласования, то $\max \text{cond}_{loc} = \infty$, то есть матрица

вырождена и найти решение здесь не удастся. Были проведены расчеты с разными вариантами пропуска точек согласования, наилучший из которых описан в предыдущем абзаце. Полученные экспериментальные результаты указывают на наличие теоретических предпосылок, заслуживающих дальнейшего изучения и детального рассмотрения в последующих исследованиях.

4.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Рассмотрим задачу (2), (3) в $\Omega = (0, 1)^2$ с тестовым решением $u(x, y) = e^{10x} + e^{10y} + e^{5x+5y}$, имеющим большие градиенты. В работе [16] данная задача решалась hr-МКНК с базисом из прямого произведения полиномов Чебышева степени p по каждому из пространственных направлений. В [16] в качестве точек коллокации в каждой ячейке были взяты точки $\{(\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2})\}_{k_1, k_2=1}^p$, где ζ_k — k -й корень полинома Чебышева первого рода степени p . Результаты сравнения даны в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Результаты численных экспериментов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с большими градиентами в примере 4.2

	$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 6$	
$N \times N$	$\ E_a^u\ _\infty$	R						
Работа [16]								
10×10	–	–	8.85e+0	–	3.90e-1	–	6.92e-3	–
20×20	–	–	5.80e-1	3.93	2.32e-2	4.07	6.71e-5	6.68
40×40	–	–	3.78e-2	3.94	1.43e-3	4.02	6.80e-7	6.62
80×80	–	–	2.52e-3	3.90	8.94e-5	4.00	1.33e-8	5.68
R_{av}				3.92		4.03		6.33
Эта работа, hr-МКНК с переопределением								
10×10	6.11e+1	–	2.12e+0	–	7.23e-2	–	2.43e-3	–
20×20	4.62e+0	3.72	8.04e-2	4.72	1.44e-3	5.64	2.46e-5	6.62
40×40	3.14e-1	3.87	2.76e-3	4.86	2.58e-5	5.80	2.19e-7	6.81
80×80	2.03e-2	3.95	9.06e-5	4.92	4.33e-7	5.89	1.84e-9	6.89
R_{av}		3.85		4.83		5.78		6.77
Эта работа, hr-МКНК без переопределения								
10×10	6.46e+1	–	2.32e+0	–	7.95e-2	–	2.62e-3	–
20×20	4.91e+0	3.72	8.91e-2	4.72	1.91e-3	5.38	2.58e-5	6.67
40×40	3.36e-1	3.87	3.05e-3	4.87	4.69e-5	5.35	2.47e-7	6.71
80×80	2.73e-2	3.62	1.00e-4	4.93	3.12e-6	3.91	3.79e-9	6.03
R_{av}		3.74		4.84		4.88		6.47

Из таблицы 2 видно, что порядок сходимости предложенного в данной работе hr-МКНК близок к оптимальному и приблизительно равен $p+1$ в отличие от hr-МКНК из [16]. Этого удалось достигнуть прежде всего за счет перезаписи уравнений коллокации в других точках, а именно в корнях полиномов Лежандра. При этом точность полученных результатов

в новом варианте лучше на один-два десятичных порядка по сравнению с [16]. Значительные улучшения получены прежде всего для нечетных p , т. к. в этом случае порядок сходимости повысился приблизительно на два по сравнению с [16]. Кроме того, степень переопределения в [16] была приблизительно равна двум для любых p , а в данной работе без особой потери точности можно использовать КМ с квадратной СЛАУ, т. е. когда $\eta = 1$. Хотя стоит отметить, что по сравнению с предыдущим примером, здесь hr-МКНК с переопределенной СЛАУ слегка выигрывает у КМ с квадратной СЛАУ.

Проводилась верификация hr-МКНК и на другой краевой задаче Дирихле для уравнения Пуассона. При решении (2), (3) в $\Omega = (0, 1)^2$ с тестовым решением $u(x, y) = \sin(10xy)$ удалось достигнуть точность $\|E_r^u\|_\infty = 9.49e-6$ и $\|E_r^u\|_\infty = 1.62e-8$ на сетках размера 2×2 и 4×4 соответственно при $p = 9$ реализованным здесь КМ с квадратной СЛАУ. На аналогичного размера расчетных сетках в [15], разд. 2.4.2, автором была достигнута точность $\|E_r^u\|_\infty = 1.49e-4$ и $\|E_r^u\|_\infty = 1.88e-7$ при использовании hr-МКНК с базисом из прямого произведения полиномов Чебышева степени $p = 9$ по каждому из пространственных направлений и записью уравнений коллокации в корнях полиномов Чебышева первого рода.

Таким образом, предложенный здесь hr-МКНК является более точным и экономичным по сравнению с hr-МКНК из [15] и [16].

4.3. Краевая задача для бигармонического уравнения. Рассмотрим задачу изгиба шарнирно закрепленной пластины в рамках ТКЛ (4), (5), на которую действует синусоидальная нагрузка

$$q(x, y) = 10^5 \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

В этом случае известно точное аналитическое решение задачи (см. [13], гл. 5)

$$w(x, y) = \frac{q(x, y)}{4\pi^4 D}.$$

В таблице 3 приведены результаты численного решения данного примера. В hr-МКНК были взяты следующие параметры: $N_c = p - 3$, $N_m = N_b = p + 1$, $p_c = h^4$, $p_{m_0} = 1$, $p_{m_1} = h$, $p_{m_2} = h^2$, $p_{m_3} = h^3$, весовой множитель в (5) перед w полагался $p_{b_0} = 1$, а перед $M_n - p_{M_n} = h^2$.

Из таблицы 3 видно, что порядок сходимости колеблется для $p = 5$ около четырех, для $p = 6$ — около шести, для $p = 7$ — около восьми, для $p = 8$ — около девяти. Таким образом, указанное в разделе 3 предположение о том, что оптимальный порядок сходимости будет проявляться, начиная с $p = 7$, оказалось верным. Отметим, что для $p = 8$, начиная с сетки 7×7 , погрешность не уменьшается. Это происходит из-за того, что уже достигнута очень высокая точность решения, и ошибки округления начинают преобладать над погрешностью аппроксимации.

ТАБЛИЦА 3. Результаты численного решения бигармонического уравнения в примере 4.3

	$p = 5$		$p = 6$		$p = 7$		$p = 8$	
$N \times N$	$\ E_a^w\ _\infty$	R						
2×2	2.93e-3	–	1.23e-4	–	2.46e-6	–	6.49e-8	–
3×3	8.15e-4	3.15	6.78e-6	7.15	1.87e-7	6.36	1.74e-9	8.92
4×4	2.15e-4	4.63	1.36e-6	5.58	1.59e-8	8.57	1.26e-10	9.12
5×5	9.52e-5	3.65	3.15e-7	6.55	3.12e-9	7.30	1.76e-11	8.82
6×6	4.31e-5	4.34	1.09e-7	5.82	6.76e-10	8.39	4.65e-12	7.30
7×7	2.41e-5	3.77	4.13e-8	6.30	2.10e-10	7.58	9.02e-12	–
8×8	1.37e-5	4.22	1.89e-8	5.85	7.05e-11	8.17	–	–
9×9	8.73e-6	3.82	9.07e-9	6.23	2.78e-11	7.90	–	–
10×10	5.62e-6	4.18	6.74e-9	2.82	1.51e-11	5.79	–	–
R_{av}		3.97		5.79		7.51		8.54

В данной задаче степень переопределения $\eta = \frac{(p-3)^2 + 2 \cdot 4(p+1)}{(p+1)^2} = \frac{(p+1)^2 + 16}{(p+1)^2}$. Здесь тоже можно получить вариант КМ с квадратной невырожденной матрицей. Для этого достаточно взять $N_m = p+1, N_b = p-1$ и при записи уравнений согласования на каждой стороне ячейки пропустить уже две первые или две последние точки аналогично тому, как это делалось при решении уравнения Пуассона. Однако в этом случае число обусловленности $\text{cond}_2(A)$ локальных и глобальной СЛАУ значительно увеличивается. Например, на сетке 10×10 при $p = 7$ максимальное значение $\text{cond}_2(A)$ среди всех локальных СЛАУ при $N_m = N_b = p+1$ равнялось $2.59e+5$, $\text{cond}_2(A)$ глобальной СЛАУ — $1.07e+7$, а для квадратной СЛАУ — $8.52e+7$ и $4.11e+8$ соответственно. Вследствие этого метод итераций по подобластям для квадратной СЛАУ переставал сходиться. Для получения решения в этой ситуации можно воспользоваться прямым ортогональным методом. В этом случае получаются результаты, близкие к приведенным в таблице 3 с сохранением оптимального порядка сходимости. Однако ошибки округления начинают раньше влиять на точность результатов. Например, при $p = 7$ на сетке 8×8 достигнута точность $\|E_a^w\|_\infty = 6.46e-11$, на сетке 9×9 — $\|E_a^w\|_\infty = 3.44e-11$, на сетке 10×10 — $\|E_a^w\|_\infty = 3.59e-11$.

4.4. Изгиб защемленной пластины в ТРМ. Рассмотрим в $\Omega = (0, 1)^2$ тестовую задачу изгиба защемленной пластины в рамках ТРМ (6)–(8), (9) из работы [6]. Пусть на пластину действует нагрузка $q(x, y) = \frac{E}{12(1-\nu^2)}(12y(y-1)(5x^2-5x+1)(2y^2(y-1)^2+x(x-1)(5y^2-5y+1))+12x(x-1)(5y^2-5y+1)(2x^2(x-1)^2+y(y-1)(5x^2-5x+1)))$, $E = 10.92 \cdot 10^6$, $\nu = 0.3$. В этом случае точное решение задачи в размерных переменных

имеет вид [6]

$$w = \frac{1}{t^3} \left(\frac{x^3(x-1)^3 y^3(y-1)^3}{3} - \frac{2t^2}{5(1-\nu)} \left(y^3(y-1)^3 x(x-1)(5x^2 - 5x + 1) + x^3(x-1)^3 y(y-1)(5y^2 - 5y + 1) \right) \right),$$

$$\phi_x = -\frac{y^3(y-1)^3 x^2(x-1)^2(2x-1)}{t^3},$$

$$Q_x = -\frac{E}{6(1-\nu^2)} \left(y^3(y-1)^3(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) + 3y(y-1)(5y^2 - 5y + 1)x^2(x-1)^2(2x-1) \right),$$

$$M_x = \frac{E}{6(1-\nu^2)} \left(y^3(y-1)^3(x-x^2)(5x^2 - 5x + 1) + \nu x^3(x-1)^3(y-y^2)(5y^2 - 5y + 1) \right),$$

$$M_{xy} = -\frac{E}{12(1+\nu)} \left(3y^2(y-1)^2(2y-1)x^2(x-1)^2(2x-1) \right),$$

где $\phi_y = \phi_x$, $Q_y = Q_x$ и $M_y = M_x$ с учетом замены x на y , $Q_x = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right)$, $Q_y = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right)$ — перерезывающие силы, $M_x = D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$, $M_y = D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$, $M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)$ — изгибающие моменты, $D_{11} = D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{12} = \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{66} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)}$.

На рисунке 2 приведено сравнение результатов решения данной задачи разработанным КМ с квадратной СЛАУ и IGA-C [6]. На нем $n = \lg \sqrt{\text{DOF}}$, DOF — общее количество степеней свободы. В IGA-C величина p означает наивысшую степень аппроксимирующей функции по каждому из пространственных направлений x и y , использующуюся при построении рациональных В-сплайнов.

Из рисунка 2 видно, что практически всегда предложенный КМ с квадратной СЛАУ превосходит по точности IGA-C, за исключением случая $p = 4$, $t = 0.1$, где результаты сопоставимы. Для тонкой пластины как для IGA-C, так и для МКНК с квадратной матрицей значительное влияние на точность оказывает эффект сдвигового запираания. При этом его влияние на порядок сходимости уменьшается с увеличением степени полиномов. Так, при $t = 0.001$ для $p = 3$ значение $R = 2$, для $p = 4$ — $R = 4$, а для $p = 5$ порядок R остается близким к оптимальному и приблизительно равняется 6.

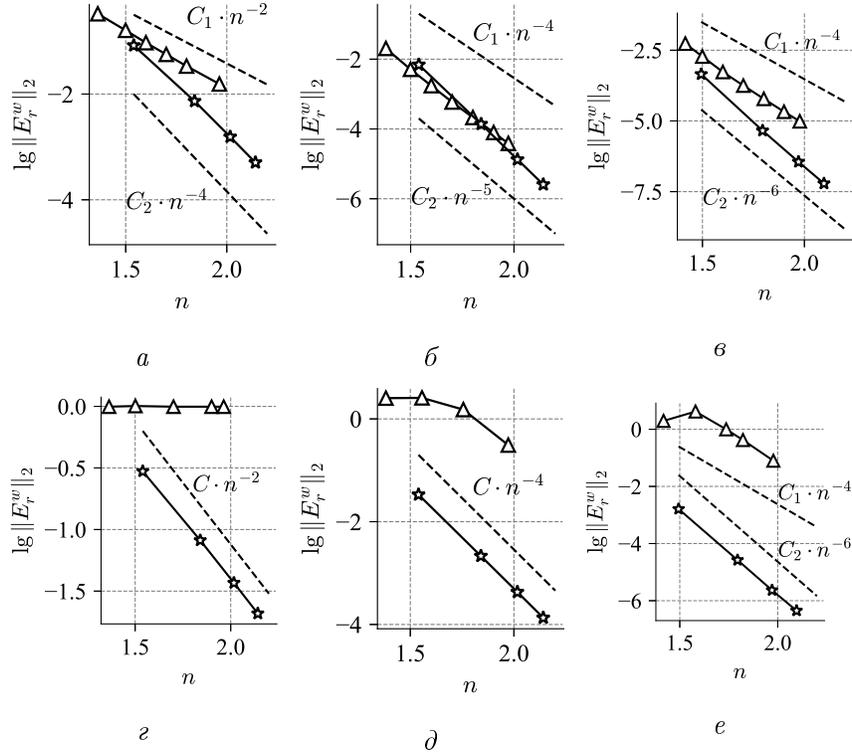


Рис. 2. Сходимость hp-МКНК с квадратной матрицей (\star) и IGA-C [6] (\triangle) расчетных значений w при $p = 3$ (а, г), $p = 4$ (б, д) и $p = 5$ (в, е) при $t = 10^{-1}$ (а, б, в) и $t = 10^{-3}$ (г, д, е)

Дополнительно на рисунке 3 приведены графики сходимости hp-МКНК при $t = 0.01$. На них видно, что на начальных сетках порядок сходимости R такой же, как и в случае $t = 0.001$. Однако при увеличении размера сетки значение R увеличивается: для $p = 3$ он становится не хуже $R = 3$, а для $p = 4$ он близким к оптимальному и приблизительно равняется пяти. Аналогичный эффект улучшения сходимости при уменьшении шага сетки в случае сдвигового записания наблюдался также, например, в МКЭ в работе [28] (см. разд. 3.2, рисунок 3.12) и в IGA-C в работе [6] (см. раздел 5.1.1, рисунок 2).

В таблице 4 приведено сравнение времени параллельного решения СЛАУ с помощью метода итераций по подобластям и прямого метода с использованием QR-разложения для $p = 3$ в зависимости от толщины пластины. В этой таблице N_{iter} обозначает количество итераций сходимости метода итераций по подобластям, t_{solve} — время решения задачи в секундах.

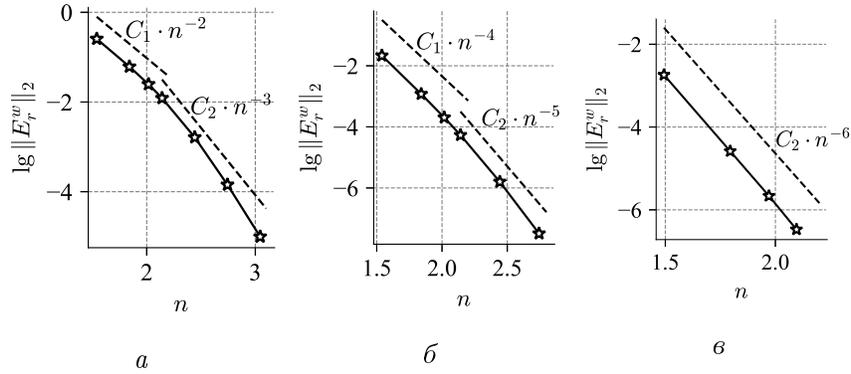


Рис. 3. Сходимость hp-МКНК с квадратной матрицей (\star) расчетных значений w при $p = 3$ (а), $p = 4$ (б) и $p = 5$ (в) при $t = 0.01$

В расчетах бралось 40 невязок на сетках 5×5 , 10×10 , 20×20 и 40×40 и 80 невязок на сетке 80×80 в случае $t = 0.1$ в методе ускорения итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [23], и 40 невязок для сеток 5×5 , 10×10 , 20×20 и 80 невязок на сетке 40×40 в случае $t = 0.001$. Значение псевдопогрешности в (15) для $t = 0.1$ полагалось $\epsilon = 10^{-10}$ для сеток 5×5 , 10×10 , 20×20 и 40×40 и $\epsilon = 10^{-12}$ для сетки 80×80 , а для тонкой пластины $\epsilon = 10^{-10}$, 10^{-12} , 10^{-13} , $5 \cdot 10^{-13}$ для сеток размера 5×5 , 10×10 , 20×20 и 40×40 соответственно. Например, если на сетке 40×40 для $t = 0.001$ взять $\epsilon = 10^{-10}$, то $\|E_r^{\phi_x}\|_\infty = 9.34 \cdot 10^{-2}$, а при $\epsilon = 5 \cdot 10^{-13}$ значение $\|E_r^{\phi_x}\|_\infty = 6.93 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, наблюдается потребность в уменьшении значения псевдопогрешности ϵ в методе итераций по подобластям при уменьшении толщины пластины t для получения лучшей точности.

Результаты демонстрируют существенное влияние малого параметра на скорость сходимости итерационного процесса. Так, для тонкой пластины на сетке 40×40 для получения решения понадобилось в несколько сотен раз больше времени, чем в случае применения прямого метода и распараллеливания на видеокарте с использованием технологии CUDA. Однако и этого не хватило, чтобы достичь такую же точность, как и во втором случае. В свою очередь, время применения прямого метода не зависит от толщины пластины. Стоит отметить, что существенное увеличение количества итераций при уменьшении толщины пластины связано со значительным увеличением числа обусловленности решаемой СЛАУ. Так, на сетке размера 20×20 число обусловленности матрицы A_{global} глобальной СЛАУ $\text{cond}_2(A_{global}) = 3.02e + 4$ при $t = 0.1$, а при $t = 0.001$ — $\text{cond}_2(A_{global}) = 2.36e + 11$. Таким образом, для толстой пластины рекомендуется использовать метод итераций по подобластям, а для тонких — однозначно прямой метод.

ТАБЛИЦА 4. Результаты сравнения итерационного и прямого решения СЛАУ в задаче с малым параметром при старших производных

$N \times N$	Метод итераций по подобластям				Прямое QR-разложение		
	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{solve}	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	R	t_{solve}
$t = 0.1$							
5×5	7.89e-2	—	41	0.016	7.89e-2	—	1.813
10×10	6.20e-3	3.67	41	0.031	6.20e-3	3.67	2
20×20	4.30e-4	3.85	82	0.109	4.30e-4	3.85	3.297
40×40	4.07e-5	3.40	145	0.718	2.75e-5	3.97	6.54
80×80	1.03e-6	5.30	961	24.563	1.73e-6	3.99	18.01
R_{av}		4.06				3.87	
$t = 0.001$							
5×5	2.75e-1	—	1002	0.172	2.87e-1	—	1.64
10×10	6.50e-2	2.08	8121	2.828	6.47e-2	2.15	1.98
20×20	1.58e-2	2.04	199501	235.813	1.57e-2	2.04	3.23
40×40	6.93e-3	1.19	715583	3377.55	3.84e-3	2.03	6.42
80×80	—	—	—	—	9.13e-4	2.07	16.25
R_{av}		1.77				2.07	

Исследуем сходимость величин M_x, Q_x (для M_{xy}, M_y погрешность ведет себя аналогично погрешности для M_x , для Q_y — аналогично Q_x), которые выражаются через первые производные от искомым функций w, ϕ_x и ϕ_y . В таблице 5 приведены результаты расчетов для различных p и t . В случае толстой пластины $t = 0.1$ и тонкой $t = 0.01$ (на относительно подробных сетках) расчетные значения M_x и Q_x сходятся с порядком не хуже $R = p$, что подтверждает его оптимальность и оценку (1). В случае еще более тонкой пластины толщиной $t = 0.001$ играет роль сдвиговое запираение, сказывающееся на порядке сходимости, который падает для M_x приблизительно на единицу, а для Q_x на два для любой степени полиномов p . Тем не менее даже для очень тонких пластин с малым параметром $\beta = 10^{-6}$ разработанный КМ при $p = 4, 5$ позволяет получить высокоточные результаты.

Для КМ с квадратной СЛАУ при $p = 5$ на сетке 80×80 точность приближенного решения не улучшилась по сравнению с 40×40 . При этом в случае hp-МКНК с переопределенной СЛАУ при $N_m = N_b = p + 1$ погрешности на сетке 80×80 равнялись $\|E_r^{M_x}\|_\infty = 4.72e-8, \|E_r^{Q_x}\|_\infty = 2.11e-6$. Остальные расчеты при других p и N совпали с приведенными в таблице 5. По-видимому, здесь также играет роль ухудшение обусловленности квадратной СЛАУ по сравнению с переопределенной.

ТАБЛИЦА 5. Сходимость M_x и Q_x в примере 4.4

$p = 3$								
$t = 0.1$								
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R
5×5	9.23e-2	—	1.50e-1	—	2.93e-1	—	5.63e-1	—
10×10	1.15e-2	3.00	2.77e-2	2.44	1.02e-1	1.52	3.10e-1	0.86
20×20	1.14e-3	3.33	4.00e-3	2.79	3.00e-2	1.77	1.63e-1	0.93
40×40	1.19e-4	3.26	5.26e-4	2.93	8.03e-3	1.90	8.28e-2	0.98
80×80	1.33e-5	3.16	6.71e-5	2.97	1.99e-3	2.01	4.00e-2	1.05
R_{av}		3.19		2.78		1.80		0.96
$p = 4$								
$t = 0.1$								
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R
5×5	5.66e-3	—	1.56e-2	—	3.78e-2	—	9.87e-2	—
10×10	2.46e-4	4.52	1.06e-3	3.88	5.44e-3	2.80	2.38e-2	2.05
20×20	9.84e-6	4.64	6.79e-5	3.96	7.12e-4	2.93	5.83e-3	2.03
40×40	4.38e-7	4.49	4.25e-6	4.00	8.83e-5	3.01	1.40e-3	2.06
80×80	2.26e-8	4.28	2.65e-7	4.00	1.00e-5	3.14	3.17e-4	2.14
R_{av}		4.48		3.96		2.97		2.07
$p = 5$								
$t = 0.1$								
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R
5×5	1.44e-4	—	4.48e-4	—	1.49e-3	—	4.76e-3	—
10×10	2.36e-6	5.93	1.24e-5	5.18	9.03e-5	4.04	4.92e-4	3.27
20×20	3.85e-8	5.94	3.66e-7	5.08	5.74e-6	3.98	5.55e-5	3.15
40×40	6.08e-10	5.98	1.11e-8	5.04	5.31e-7	3.43	6.49e-6	3.10
80×80	9.08e-12	6.06	3.43e-10	5.01	6.50e-7	—	1.88e-5	—
R_{av}		5.98		5.08		3.82		3.17
$p = 4, t = 0.01$								
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R
5×5	3.57e-2	—	9.33e-2	—	1.35e-3	—	4.33e-3	—
10×10	4.43e-3	3.01	1.94e-2	2.27	6.46e-5	4.33	3.52e-4	3.62
20×20	3.74e-4	3.57	3.07e-3	2.66	2.21e-6	4.87	2.15e-5	4.03
40×40	1.95e-5	4.26	3.13e-4	3.29	4.88e-8	5.50	9.04e-7	4.57
80×80	7.29e-7	4.74	2.32e-5	3.75	8.72e-10	5.80	3.10e-8	4.86
R_{av}		3.90		2.99		5.13		4.27
$p = 5, t = 0.01$								
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	R	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	R
5×5	3.57e-2	—	9.33e-2	—	1.35e-3	—	4.33e-3	—
10×10	4.43e-3	3.01	1.94e-2	2.27	6.46e-5	4.33	3.52e-4	3.62
20×20	3.74e-4	3.57	3.07e-3	2.66	2.21e-6	4.87	2.15e-5	4.03
40×40	1.95e-5	4.26	3.13e-4	3.29	4.88e-8	5.50	9.04e-7	4.57
80×80	7.29e-7	4.74	2.32e-5	3.75	8.72e-10	5.80	3.10e-8	4.86
R_{av}		3.90		2.99		5.13		4.27

5 Заключение

В настоящей работе разработан и верифицирован новый hr-МКНК с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра, сводящийся в частном случае к КМ с квадратными СЛАУ. Численно показан близкий к оптимальному порядок сходимости рассмотренных методов на примере решения краевых задач для УЧП, содержащих старшие производные второго и четвертого порядков. Продемонстрированы преимущества по точности реализованных методов по сравнению с предыдущими опубликованными вариантами МКНК [15, 16] и IGA-C [6].

В качестве дальнейшей работы может рассматриваться возможность сочетания разработанного здесь метода с сеткопостроителями с прямоугольными ячейками для нерегулярных областей [1, 2], существенно расширяющими область применения развиваемого численного алгоритма. Другой интересной задачей является совершенно неочевидное сравнение погрешности приближенного решения и времени решения СЛАУ при одинаковом порядке сходимости R в зависимости от DOF предложенного здесь подхода построения КМ по сравнению с hp-МКНК [1, 2], у которых

приближенное решение ищется в виде $u_{hj}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^p \sum_{i_2=0}^{p-i_1} c_{j,i_1 i_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}$ с $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ неизвестными коэффициентами в каждой ячейке, а не $(p+1)^2$, как в данной статье.

References

- [1] V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, S.K. Golushko, B.V. Semisalov, V.P. Shapeev, *h-, p-, and hp-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications*, Comput. Math. Math. Phys., **62**:4 (2022), 517–537. Zbl 1492.65338
- [2] L.S. Bryndin, V.A. Belyaev, V.P. Shapeev, *Development and verification of a simplified hp-version of the least-squares collocation method for irregular domains*, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **16**:3 (2023), 35–50. Zbl 1533.35102
- [3] W. Shao, X. Wu, S. Chen, *Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain*, Eng. Anal. Bound. Elem., **36**:12 (2012), 1787–1798. Zbl 1352.65575
- [4] D. Schillinger, J.A. Evans, A. Reali, M.A. Scott, T.J.R. Hughes, *Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **267** (2013), 170–232. Zbl 1286.65174
- [5] V.A. Kireev, *Hermite bicubic collocation method in domain with curvilinear boundary*, Vestnik SibGAU., **15**:3 (2014), 73–77.
- [6] J. Kiendl, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, A. Reali, *Isogeometric collocation methods for the Reissner–Mindlin plate problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **284** (2015), 489–507. Zbl 1425.65199
- [7] C. de Boor, B. Swartz, *Collocation at Gaussian points*, SIAM J. Numer. Anal., **10**:4 (1973), 582–606. Zbl 0232.65065
- [8] G. Fairweather, A. Karageorghis, J. Maack, *Compact optimal quadratic spline collocation methods for the Helmholtz equation*, J. Comput. Phys., **230**:8 (2011), 2880–2895. Zbl 1218.65135
- [9] B. Bialecki, G. Fairweather, A. Karageorghis, J. Maack, *A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem*, Numer. Algorithms, **83**:1 (2020), 165–199. Zbl 1434.65290
- [10] X. Yang, H. Zhang, D. Xu, *WSGD-OSC scheme for two-dimensional distributed order fractional reaction-diffusion equation*, J. Sci. Comput., **76**:3 (2018), 1502–1520. Zbl 1397.65210

- [11] R.I. Fernandes, G. Fairweather, *An ADI extrapolated Crank-Nicolson orthogonal spline collocation method for nonlinear reaction-diffusion systems*, J. Comput. Phys., **231**:19 (2012), 6248–6267. Zbl 1284.65026
- [12] B. Bialecki, G. Fairweather, *Orthogonal spline collocation methods for partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **128**:1-2 (2001), 55–82. Zbl 0971.65105
- [13] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Book Comp., New York etc., 1959. (Zbl 0114.40801 1966)
- [14] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd edn.*, CRC Press, Boca Raton, 2004. Zbl 1075.74001
- [15] S.V. Idimeshev, *Modified method of collocations and least residuals and its application in the mechanics of multilayer composite beams and plates*, Dissertation, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Computing Technologies, Novosibirsk, 2016.
- [16] V.A. Belyaev, *Solving the Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method*, Numer. Anal. Appl., **13**:3 (2020), 207–218.
- [17] G. Chen, Z. Li, P. Lin, *A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow*, Adv. Comput. Math., **29**:2 (2008), 113–133. Zbl 1241.76324
- [18] C.C. Ike, *Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate*, Math. Models Engineering, **4**:2 (2018), 50–72.
- [19] O. Garcia, E.A. Fancello, C.S. de Barcellos, C.A. Duarte, *hp-clouds in Mindlin's thick plate model*, Int. J. Numer. Methods Eng., **47**:8 (2000), 1381–1400. Zbl 0987.74067
- [20] C. Tiago, V.M.A. Leitão, *Eliminating shear-locking in meshless methods: a critical overview and a new framework for structural theories*, in Leitão V.M.A. (ed.) et al., *Advances in meshfree techniques*, Computational Methods in Applied Sciences, **5**, Springer, Dordrecht, 2007, 123–147. Zbl 1323.74111
- [21] A.G. Sleptsov, Yu.I. Shokin, *An adaptive grid-projection method for elliptic problems*, Comput. Math. Math. Phys., **37**:5 (1997), 558–571. Zbl 0946.65096
- [22] S.K. Golushko, S.V. Idimeshev, V.P. Shapeev, *Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory*, Computational Technologies, **18**:6 (2013), 31–43.
- [23] E.V. Vorozhtsov, V.P. Shapeev, *On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals*, Appl. Math. Comput., **363** (2019), Article ID 124644. Zbl 1433.65244
- [24] T.A. Davis, *Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization*, ACM Trans. Math. Softw., **38**:1 (2011), Article ID 8. Zbl 1365.65122
- [25] J.M. Ortega, *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*, Plenum Press, New York etc., 1988. Zbl 0669.65017
- [26] V.P. Shapeev, L.S. Bryndin, V.A. Belyaev, *The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation*, Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **26**:3 (2022), 556–572. Zbl 1513.65487
- [27] P.M. Prenter, R.D. Russel, *Orthogonal collocation for elliptic partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., **13**:6 (1976), 923–939. Zbl 0366.65052
- [28] L. Yunhua, *On Shear Locking in Finite Elements*, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1997.

LUKA SERGEEVICH BRYNDIN

KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,

INSTITUTSKAYA STR., 4/1,

630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA

Email address: bryndin-1996@mail.ru

МКНК С КОЛЛОКАЦИЯМИ В КОРНЯХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА 1201

VASILII ALEXEYEVICH BELIAEV
KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
INSTITUTSKAYA STR., 4/1,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: belyaevasily@mail.ru