

HP-ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ И  
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С УРАВНЕНИЯМИ  
КОЛЛОКАЦИИ В КОРНЯХ ПОЛИНОМОВ  
ЛЕЖАНДРА

Л.С. БРЫНДИН , В.А. БЕЛЯЕВ 

*Представлено И.О. ФАМИЛИЯ*

**Abstract:** The paper addresses new hp-version of the least-squares collocation method (hp-LSCM) with Gaussian points. The optimal order of convergence of the developed method for solving boundary value problems for Poisson's equation, biharmonic equation, and for a system of partial differential equations of the Reissner – Mindlin plate problem is shown numerically. An algorithm for obtaining a system of linear algebraic equations with an invertible quadratic matrix in hp-LSCM is given. The advantages of the developed collocation method in comparison with previous versions of the hp-LSCM and isogeometric collocation method are shown.

**Keywords:** least-squares collocation method, optimal convergence, Gaussian points, Poisson's equation, biharmonic equation, Kirchhoff – Love theory, Reissner – Mindlin theory, plate bending.

## 1 Введение

Численное решение краевых задач для уравнений с частными производными (УЧП) играет одну из ключевых ролей в анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) различных элементов конструкций. При этом эффективность и точность расчетов в решающей степени зависят от лежащих в их основе численных методов. На сегодняшний день одним из наиболее распространенных способов решения задач механики деформируемого твердого тела является надежный и математически обоснованный метод конечных элементов (МКЭ).

Одним из главных конкурентов МКЭ являются коллокационные методы (КМ), которые проще реализовать, в том числе их hp-варианты и для решения УЧП со сложными краевыми условиями [1–3]. Здесь под приставкой “hp” подразумевается возможность в численном методе повышать точность расчетов за счет измельчения шагов сетки (h-подход) и увеличения степеней аппроксимирующих полиномов (p-подход). КМ зачастую вычислительно эффективнее по сравнению с МКЭ, т. к. для первых отсутствует необходимость интегрирования на этапе сборки матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), и в некоторых случаях возникает меньшее количество ненулевых элементов в матрице СЛАУ [4–6].

В фундаментальной работе де Бора [7] показано, что КМ с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра обеспечивает оптимальный порядок сходимости приближенного решения в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Дальнейшее развитие КМ было связано с распространением данного подхода на решение двумерных краевых задач для УЧП. Так, в работе [8] использовались квадратичные сплайны для решения двумерного уравнения Гельмгольца, а в [9] — для бигармонического уравнения, которое было сведено к системе из двух УЧП. В статье [10] бикубический Эрмитов базис применялся для двумерного нестационарного уравнения диффузии, а в [5] он же — для уравнения Пуассона в области с криволинейной границей. Работа [11] посвящена решению нестационарного двумерного уравнения диффузии-реакции двух переменных с использованием ортогонального метода сплайн-коллокации с  $C^1$  кусочно-полиномиальной аппроксимацией 3, 4 и 5 степеней, в которой показан оптимальный порядок сходимости по пространству. Здесь и в дальнейшем под оптимальным порядком сходимости погрешности приближенного решения по аналогии с [12] будем называть сходимостью, если справедливо следующее соотношение

$$\max_{(x,y) \in \Omega} |u_h^{(k)}(x,y) - u^{(k)}(x,y)| = O(h^{p-k+1}), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — расчетная область,  $u_h$  и  $u$  — приближенное и точное решение задачи соответственно,  $k = 0, 1, 2, \dots$  — порядок производной,  $p$  — старшая степень полиномов по каждому из пространственных направлений  $x$  и

$y$ . При этом под аппроксимирующей функции подразумевается прямое произведение полиномиальных приближений.

В данной статье мы рассматриваем численное решение краевых задач для уравнения Пуассона, бигармонического уравнения [1, 2], решение которого описывает прогиб пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява (ТКЛ) [13], а также для задач изгиба пластин в теории Рейсснера–Миндлина (ТРМ) [14]. Для решения упомянутых задач мы предлагаем новый hp-вариант метода коллокации и наименьших квадратов (hp-МКНК), в котором точками записи уравнений коллокации являются корни полиномов Лежандра, в отличие от работ [15, 16], где они расставлялись в корнях полиномов Чебышева и использовались аналогичные аппроксимирующие полиномы. С указанными работами, а также с изogeометрическим методом коллокации (IGA-C) [6], в данной статье проведено сравнение и показаны преимущества разработанного подхода.

## 2 Постановка задачи

В настоящей статье рассматривалось несколько двумерных краевых задач для УЧП в квадратной области  $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\partial\Omega$ . Первая из них — задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где  $u(x, y)$  — искомая функция,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  — заданные.

Следующая задача — бигармоническое уравнение, описывающее изгиб изотропных пластин в ТКЛ и дополненное краевыми условиями шарнирного закрепления (см. [13], гл. 4, разд. 21):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где  $w(x, y)$  — прогиб пластины,  $q(x, y)$  — поперечная нагрузка,  $D = Et^3/(12(1 - \nu^2))$  — жесткость пластины при изгибе,  $t = \text{const}$  — толщина,  $E = \text{const}$  — модуль упругости,  $\nu = \text{const}$  — коэффициент Пуассона,  $M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$  — изгибающий момент,  $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ ,  $M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ ,  $M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ,  $(n_x, n_y)$  — вектор внешней единичной нормали к  $\partial\Omega$ .

В ТКЛ (4) называется также уравнением Софи Жермен–Лагранжа (см. [13], гл. 4, разд. 21). Его особенностью является наличие производных высокого (четвертого) порядка в самом уравнении и вплоть до третьих производных в граничных условиях (см. [13], гл. 4, разд. 22), что влечет за собой плохую обусловленность математической задачи, приводящую к существенному усложнению ее численного решения [1, 3, 17].

В случае ТРМ возникает система, состоящая из трех УЧП и имеющая в безразмерных переменных следующий вид [14, 15]:

$$\frac{K}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \right) = -1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \\ \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(2-\nu)\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\beta^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \\ \frac{\beta^2}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{K}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $K = 5/6$  — сдвиговой коэффициент Тимошенко,  $\phi_x(x, y)$  и  $\phi_y(x, y)$  — углы поворота нормали срединной поверхности вокруг осей  $y$  и  $x$  соответственно,  $\beta = t/L$  — малый параметр,  $L = \text{const}$  — характерный размер области, равный в данном случае единице.

При обезразмеривании системы полагалось  $\tilde{x} = x/L, \tilde{y} = y/L, \tilde{w} = w \cdot Et^3/(q^*L^4), \tilde{\phi}_x = \phi_x \cdot Et^3/(q^*L^3), \tilde{\phi}_y = \phi_y \cdot Et^3/(q^*L^3), q^* = \text{const}$  — выбираемая в каждом конкретном случае нагрузка. Заметим, что при записи (6)–(8) волнистые черточки над переменными уже были опущены.

Дополним систему (6)–(8) краевыми условиями защемления [18]

$$w = 0, \quad \phi_n = \phi_x n_x + \phi_y n_y = 0, \quad \phi_s = \phi_y n_x - \phi_x n_y = 0. \quad (9)$$

В отличие от ТКЛ в ТРМ возникает малый параметр  $\beta$ , стоящий перед вторыми (старшими) производными углов поворота  $\phi_x$  и  $\phi_y$ . Для системы (6)–(8) свойственен также эффект сдвигового запираия: при  $t \rightarrow 0$  приближенное решение все хуже удовлетворяет требованиям, допускающим нулевые деформации поперечного сдвига [6, 19]. Для преодоления этой сложности существует несколько различных способов [20], одним из которых является применение относительно высоких степеней полиномов для исходной постановки (6)–(8). Так, в работе [19] подчеркивается эффективность от использования МКЭ с полиномами третьего порядка или выше в зависимости от малости толщины пластины. Про другие приемы “борьбы” со сдвиговым запираием предлагаем читателю ознакомиться со статьей [19] и цитируемыми там публикациями.

Целью работы является построение hp-МКНК оптимального порядка сходимости, его компьютерная реализация и исследование возможностей при решении вышеуказанных задач.

### 3 Описание hr-МКНК с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра

Опишем подробно hr-МКНК на примере решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (2), (3), а для остальных постановок сделаем соответствующие примечания. Область  $\Omega$  покрывается регулярной сеткой с квадратными ячейками в количестве  $N \times N$ . В каждой ячейке сетки вводится своя локальная система координат  $(\xi_1, \xi_2)$  по следующим формулам:

$$\xi_1 = \frac{x - x_c}{h}, \quad \xi_2 = \frac{y - y_c}{h},$$

где  $(x_c, y_c)$  — центр ячейки, а  $h$  — половина ее стороны,  $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ .

Приближенное решение в  $j$ -й ячейке,  $j = 1, \dots, N^2$ , ищется в виде прямого произведения полиномов степени  $p$  по каждому из пространственных направлений

$$u_j^h(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^p \sum_{i_2=0}^p c_{j,i_1 i_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}, \quad (10)$$

где  $c_{j,i_1 i_2}$  — неизвестные коэффициенты, определяющиеся из решения в общем случае переопределенной СЛАУ, состоящей из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

Уравнения коллокации получаются подстановкой приближенного решения (10) в уравнение (2) в точках  $(\eta_{k_1}, \eta_{k_2})$ ,  $k_1, k_2 = 1, \dots, N_c$ , являющимися корнями полинома Лежандра степени  $N_c$  (рисунок 1). Данные уравнения имеют следующий вид:

$$p_c \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \xi_2^2} \right) = p_c f, \quad (11)$$

где  $p_c$  — положительный весовой множитель уравнения коллокации.

Для построения hr-МКНК оптимального порядка сходимости здесь мы опираемся на теорему 4.1 из [7], в которой описываются условия достижения КМ оптимального порядка сходимости при решении ОДУ порядка  $m$ . Из нее следует, что количество точек коллокации в корнях полиномов Лежандра степени  $N_c$  строго связано с  $m$  и  $p$  и определяется как  $N_c = p - m + 1$ , при этом должно выполняться  $N_c \geq m$ . Таким образом, если  $m = 2$ , то  $N_c = p - 1$  и  $N_c \geq 2$ , если  $m = 4$ , то  $N_c = p - 3$  и  $N_c \geq 4$ . В данной работе численно устанавливается, распространяются ли результаты указанной теоремы на предлагаемый нами hr-МКНК решения двумерных краевых задач для УЧП. Следовательно, для уравнения Пуассона (2) и системы (6)–(8) минимальная степень полиномов для получения КМ оптимального порядка сходимости в (10) должна равняться трем, а для бигармонического уравнения (4) — семи.

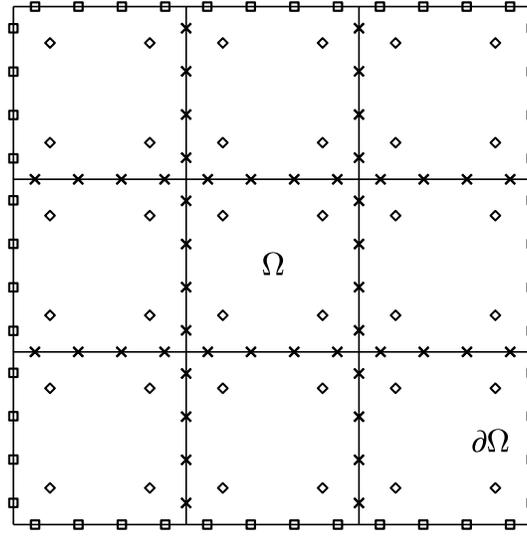


Рис. 1. Пример сетки  $3 \times 3$  в МКНК при  $N_c = 2$ ,  $N_m = N_b = 4$ . Значок “ $\diamond$ ” обозначает точки коллокации, “ $\times$ ” — точки согласования, “ $\square$ ” — точки записи краевых условий

Для УЧП, содержащих старшие производные второго порядка, выписываются следующие условия согласования [1, 2, 15, 16]:

$$p_{m_0} u_j^h + p_{m_1} \frac{\partial u_j^h}{\partial \vec{n}} = p_{m_0} \hat{u} + p_{m_1} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{n}}, \quad (12)$$

где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к границе  $j$ -й ячейки,  $\hat{u}$  — приближенное решение из соседней с  $j$ -й ячейки,  $p_{m_0}, p_{m_1}$  — положительные весовые множители условий согласования.

Уравнения вида (12) необходимы для обеспечения непрерывности решения и его первых производных по нормали на границах между соседними ячейками. Выпишем их в  $N_m$  точках, равномерно расположенных на общих сторонах соседних ячеек (рисунок 1).

В случае решения уравнения, содержащего старшие производные четвертого порядка (4), дополнительно к (12) выписываются условия, обеспечивающие непрерывность кусочно-полиномиального базиса вплоть до третьих производных в  $N_m$  точках

$$p_{m_2} \frac{\partial^2 u_j^h}{\partial \vec{n}^3} + p_{m_3} \frac{\partial^3 u_j^h}{\partial \vec{n}^3} = p_{m_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \vec{n}^2} + p_{m_3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \vec{n}^3}, \quad (13)$$

где  $p_{m_2}, p_{m_3}$  — положительные весовые множители условий согласования.

Несложно показать, что из (12) и (13) следует непрерывность решения и его производных по отдельности [2]. Однако линейные комбинации

сокращают количество уравнений в СЛАУ и ускоряют сходимость итерационного процесса ее решения (см. замечание 1 [21]).

Краевые условия для (3) выписываются в ячейках, одна или две стороны которых совпадают с границей области  $\partial\Omega$ , в равномерно расположенных  $N_b$  точках на ней (рисунок 1)

$$p_b u_j^h = p_b g, \quad (14)$$

где  $p_b$  — положительный весовой множитель краевого условия.

Количество уравнений согласования  $N_m$  и краевых условий  $N_b$  строго не связано со степенью полиномов  $p$  в (10) и порядком старшей производной  $m$  в УЧП для обеспечения оптимального порядка сходимости метода. Однако их значения влияют на вид матриц и их числа обусловленности  $\text{cond}_2(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$ , где  $A$  — произвольная матрица локальной/глобальной СЛАУ,  $\sigma_{\max}(A)$  и  $\sigma_{\min}(A)$  — максимальное и минимальное сингулярное число соответственно. В данной работе значения  $N_m$  и  $N_b$  подбирались экспериментально с исследованием  $\text{cond}_2(A)$ .

При решении бигармонического уравнения (4) и системы (6)–(8) приближенное решение для каждой неизвестной функции искалось в форме (10); уравнения коллокации записывались аналогично (11); краевые условия (5) и (9) аппроксимировались аналогично (14). Условия согласования для (6)–(8) выписывались в виде (12) для каждой неизвестной функции.

Уравнения (11), (12) и (14) составляют локальную СЛАУ в  $j$ -й ячейке. Объединяя локальные СЛАУ каждой ячейки, получим глобальную СЛАУ, которая в МКНК в общем случае является переопределенной. Степенью переопределения  $\eta$  будем называть отношение количества уравнений к числу неизвестных коэффициентов. Если  $\eta > 1$ , то, во-первых, возникает усложнение решения линейной задачи наименьших квадратов из-за зависимости от значений весовых множителей [21–23], которые подбираются эмпирически, а, во-вторых, увеличивается время решения переопределенной СЛАУ по сравнению с временем решения квадратной СЛАУ. Далее будет сформулирован алгоритм построения квадратной СЛАУ (как частный случай разработанного КМ), показана его работоспособность и проведено сравнение с hr-МКНК, в котором применяются переопределенные СЛАУ.

В данной работе рассматриваются и сравниваются между собой два способа решения СЛАУ в МКНК:

- 1) прямой ортогональный метод с распараллеливанием на видеокартах компании Nvidia с применением технологии CUDA, реализованный в библиотеке SuiteSparse [24];
- 2) метод итераций по подобластям с применением ускорения итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова и решении переопределенных СЛАУ [23], операции продолжения на многосеточном комплексе при переходе с грубой сетки на

более подробную для задания начального приближения [1], распараллеливания с помощью OpenMP со способом обхода подобластей, основанного на красно-черном упорядочивании (см. [25], гл. 3), и свойства специального вида матриц и правых частей локальных СЛАУ в МКНК [26].

Во втором методе итерационный процесс прекращался, когда

$$\max_{j,i_1,i_2} |c_{j,i_1,i_2}^{s+1} - c_{j,i_1,i_2}^s| < \epsilon, \quad (15)$$

где  $c_{j,i_1,i_2}^s, c_{j,i_1,i_2}^{s+1}$  — коэффициенты в представлении приближенного решения  $u_j^h$  (10) на  $s$ -й и  $(s+1)$ -й итерациях соответственно,  $s = 0, 1, \dots, N_{iter}$ ,  $N_{iter}$  — количество итераций,  $\epsilon$  — малая величина, называемая псевдопогрешностью. В расчетах имеет смысл ее подбирать таким образом, чтобы при дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  существенных изменений в погрешности приближенного решения не происходило.

#### 4 Результаты численных экспериментов и их обсуждение

В приведенных ниже результатах для оценки сходимости погрешности приближенного решения использовались следующие величины

$$\begin{aligned} \|E_a^u\|_\infty &= \max_{j=1,\dots,N^2} \max_{l=1,\dots,\mathfrak{M}} |u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l)|, \\ \|E_r^u\|_\infty &= \frac{\max_{j=1,\dots,N^2} \max_{l=1,\dots,\mathfrak{M}} |u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l)|}{\max_{j=1,\dots,N^2} \max_{l=1,\dots,\mathfrak{M}} |u_{ex}(x_l, y_l)|}, \\ \|E_r^u\|_2 &= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N^2} \sum_{l=1}^{\mathfrak{M}} (u_j^h(x_l, y_l) - u_{ex}(x_l, y_l))^2}{\sum_{j=1}^{N^2} \sum_{l=1}^{\mathfrak{M}} u_{ex}^2(x_l, y_l)}}, \end{aligned}$$

где  $u_{ex}$  — точное решение задачи,  $\mathfrak{M}$  — множество, состоящее из 100 равномерно распределенных точек  $(x_l, y_l)$  в каждой  $j$ -й ячейке. Вместо  $u$  при решении бигармонического уравнения (4) и системы (6)–(8) в обозначениях погрешности полагаются характеристики НДС.

Порядок сходимости погрешности приближенного решения вычислялся следующим образом:

$$R = \frac{\log_2 \frac{E_2}{E_1}}{\log_2 \frac{N_1}{N_2}},$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — погрешности на двух сетках с количеством ячеек  $N_1 \times N_1$  и  $N_2 \times N_2$  соответственно.

Расчеты были проведены на процессоре 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H 2.70 GHz, DIMM DDR5 2400 MHz 16 Gb и видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3070 Ti Laptop, 8 GB. Для распараллеливания с помощью OpenMP использовалось 20 логических процессоров. В методе итераций по подобластям в качестве начального приближения на самой грубой сетке все неизвестные коэффициенты коэффициенты  $c_{j,i_1 i_2}^0 = 0.4$ . Для распараллеливания на видеокарте использовалась CUDA с выделением  $7 \cdot 10^9$  бит памяти.

**4.1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.** Рассмотрим (2), (3) в  $\Omega = (0, 1)^2$  с тестовым решением  $u_{ex}(x, y) = 3e^x e^y (x - x^2)(y - y^2)$ . Данная задача решалась в [27] КМ с бикубическими сплайнами с постановкой точек коллокации в корнях полиномов Лежандра 2-й степени.

В таблице 1 приведены результаты численных экспериментов, полученных в [27] и hr-МКНК, в котором были взяты следующие параметры:  $N_c = p - 1$ ,  $N_m = N_b = p + 1$ ,  $p_c = h^2$ ,  $p_{m_0} = p_{m_1} = p_b = 1$ . Аналогичные значения использовались в hr-МКНК для переопределенных СЛАУ и в других примерах, если не указано иное.

Таблица 1. Результаты численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в примере 4.1

$N \times N$	Работа [27]		МКНК, $p = 3$		МКНК, $p = 4$		МКНК, $p = 5$	
	$\ E_a^u\ _\infty$	$R$						
$2 \times 2$	8.85e-3	—	8.91e-3	—	2.42e-4	—	7.23e-6	—
$3 \times 3$	1.70e-3	4.06	1.74e-3	4.02	3.42e-5	4.82	5.92e-7	6.17
$4 \times 4$	5.69e-4	3.81	5.61e-4	3.93	7.63e-6	5.21	1.05e-7	6.01
$5 \times 5$	2.35e-4	3.97	2.33e-4	3.93	2.49e-6	5.01	2.92e-8	5.73
$6 \times 6$	1.13e-4	4.01	1.11e-4	4.06	1.02e-6	4.89	9.92e-9	5.92
$7 \times 7$	6.16e-5	3.93	6.06e-5	3.92	4.77e-7	4.93	3.86e-9	6.12
$8 \times 8$	3.58e-5	4.06	3.53e-5	4.04	2.40e-7	5.14	1.73e-9	6.01
$9 \times 9$	2.25e-5	3.95	2.20e-5	4.01	1.33e-7	5.01	8.67e-10	5.86
$10 \times 10$	1.48e-5	3.97	1.45e-5	3.95	7.94e-8	4.89	4.61e-10	5.99

Из таблицы 1 видно, что при  $p = 3$  в hr-МКНК получены практически идентичные [27] результаты и при любом  $p$  достигнут оптимальный порядок сходимости. Здесь в hr-МКНК для решения СЛАУ использовался метод итераций по подобластям.

Увеличение  $N_c$  приводило к уменьшению порядка сходимости  $R$ , который становился равным  $p - 1$  для нечетных  $p$  и равным  $p$  для четных  $p$ , как это также наблюдалось ранее в работах [15], [16], посвященных hr-МКНК с представлением приближенного решения в виде (10).

Отметим, что hr-МКНК обладает важным достоинством, которое выражено в его автоматизированной реализации на компьютере. В предыдущих статьях [1], [15], [16] всегда решались переопределенные СЛАУ и

выбираемой по указанным там алгоритмам степени переопределения  $\eta$  хватало для того, чтобы решить линейную задачу наименьших квадратов, матрица которой имела конечное число обусловленности. Однако в цитируемых работах не исследовался вопрос попытки построения КМ с квадратными СЛАУ, матрица которых была бы невырожденной.

В разработанном здесь КМ можно получить квадратную СЛАУ различными способами. Если положить  $N_m = N_b = p$ , то  $\eta = 1$ , но локальная матрица СЛАУ для внутренних ячеек оказывается вырожденной. Однако СЛАУ с невырожденной квадратной матрицей в hr-МКНК можно получить, если выбрать  $N_m = p + 1$ ,  $N_b = p$  и при записи условий согласования на каждой противоположной стороне ячейки “пропустить” одну точку — либо первую, либо последнюю (отсчет в компьютерной программе ведется сверху вниз и слева направо), т. е. в них не выписывать условия (12). Например, на левой стороне пропускаем первую точку, а на правой — последнюю, и аналогично поступаем для верхней и нижней сторон ячейки. Путем вычисления чисел обусловленности  $\text{cond}_2(A)$  было установлено, что они конечны и принимают небольшие значения. Так, например, на сетке  $20 \times 20$  при  $p = 3$  число обусловленности переопределенной глобальной СЛАУ  $\text{cond}_2(A) = 933.92$ , квадратной  $\text{cond}_2(A) = 940.57$ ; максимальное число обусловленности локальных переопределенных СЛАУ  $\text{cond}_2(A) = 33.44$ , квадратных —  $\text{cond}_2(A) = 103.44$ . Отметим также, что в случае решения квадратной СЛАУ прямым методом получились абсолютно такие же результаты, как и в таблице 1.

**4.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.** Рассмотрим решение (2), (3) в  $\Omega = (0, 1)^2$  с тестовым решением  $u(x, y) = e^{10x} + e^{10y} + e^{5x+5y}$ , имеющим большие градиенты. В работе [16] данная задача решалась hr-МКНК с базисом из прямого произведения полиномов Чебышева степени  $p$  по каждому из пространственных направлений. В [16] в качестве точек коллокации в каждой ячейке были взяты точки  $\{(\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2})\}_{k_1, k_2=1}^p$ , где  $\zeta_k$  —  $k$ -й корень полинома Чебышева первого рода степени  $p$ . Результаты сравнения даны в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что порядок сходимости предложенного в данной работе hr-МКНК является оптимальным и равняется  $p + 1$  в отличие от hr-МКНК из [16]. Этого удалось достигнуть прежде всего за счет перезаписи уравнений коллокации в других точках, а именно в корнях полиномов Лежандра. При этом точность полученных результатов в новом варианте лучше на один-два десятичных порядка по сравнению с [16]. Значительные улучшения получены прежде всего для нечетных  $p$ , т. к. в этом случае порядок сходимости повысился на два по сравнению с [16]. Кроме того, степень переопределения в [16] была приблизительно равна двум для любых  $p$ , а в данной работе без особой потери точности можно

ТАБЛИЦА 2. Результаты численных экспериментов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с большими градиентами в примере 4.2

	$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 6$	
$N \times N$	$\ E_a^u\ _\infty$	$R$						
Работа [16]								
$10 \times 10$	–	–	8.85e+0	–	3.90e-1	–	6.92e-3	–
$20 \times 20$	–	–	5.80e-1	3.93	2.32e-2	4.07	6.71e-5	6.68
$40 \times 40$	–	–	3.78e-2	3.94	1.43e-3	4.02	6.80e-7	6.62
$80 \times 80$	–	–	2.52e-3	3.90	8.94e-5	4.00	1.33e-8	5.68
Эта работа, hr-МКНК с переопределением								
$10 \times 10$	6.11e+1	–	2.12e+0	–	7.23e-2	–	2.43e-3	–
$20 \times 20$	4.62e+0	3.72	8.04e-2	4.72	1.44e-3	5.64	2.46e-5	6.62
$40 \times 40$	3.14e-1	3.87	2.76e-3	4.86	2.58e-5	5.80	2.19e-7	6.81
$80 \times 80$	2.03e-2	3.95	9.06e-5	4.92	4.33e-7	5.89	1.84e-9	6.89
Эта работа, hr-МКНК без переопределения								
$10 \times 10$	6.46e+1	–	2.32e+0	–	7.95e-2	–	2.62e-3	–
$20 \times 20$	4.91e+0	3.72	8.91e-2	4.72	1.91e-3	5.38	2.58e-5	6.67
$40 \times 40$	3.36e-1	3.87	3.05e-3	4.87	4.69e-5	5.35	2.47e-7	6.71
$80 \times 80$	2.73e-2	3.62	1.00e-4	4.93	3.12e-6	3.91	3.79e-9	6.03

использовать КМ с квадратной СЛАУ, т. е. когда  $\eta = 1$ . Хотя стоит отметить, что по сравнению с предыдущим примером, здесь hr-МКНК с переопределенной СЛАУ слегка выигрывает у КМ с квадратной СЛАУ.

Проводилась верификация hr-МКНК и на другой краевой задаче Дирихле для уравнения Пуассона. При решении (2), (3) в  $\Omega = (0, 1)^2$  с тестовым решением  $u(x, y) = \sin(10xy)$  удалось достигнуть точность  $\|E_r^u\|_\infty = 9.49e-6$  и  $\|E_r^u\|_\infty = 1.62e-8$  на сетках размера  $2 \times 2$  и  $4 \times 4$  соответственно при  $p = 9$  реализованным здесь КМ с квадратной СЛАУ. На аналогичного размера расчетных сетках в [15], разд. 2.4.2, автором была достигнута точность  $\|E_r^u\|_\infty = 1.49e-4$  и  $\|E_r^u\|_\infty = 1.88e-7$  hr-МКНК с базисом из прямого произведения полиномов Чебышева степени  $p = 9$  по каждому из пространственных направлений и записью уравнений коллокации в корнях полиномов Чебышева первого рода.

Таким образом, предложенный здесь hr-МКНК является более точным и экономичным по сравнению с hr-МКНК из [15] и [16].

**4.3. Краевая задача для бигармонического уравнения.** Рассмотрим задачу изгиба шарнирно закрепленной пластины в рамках ТКЛ (4), (5), на которую действует синусоидальная нагрузка

$$q(x, y) = 10^5 \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

В этом случае известно точное аналитическое решение задачи (см. [13], гл. 5)

$$w(x, y) = \frac{q(x, y)}{4\pi^4 D}.$$

В таблице 3 приведены результаты численного решения данного примера. В hp-МКНК были взяты следующие параметры:  $N_c = p - 3$ ,  $N_m = N_b = p + 1$ ,  $p_c = h^4$ ,  $p_{m_0} = 1$ ,  $p_{m_1} = h$ ,  $p_{m_2} = h^2$ ,  $p_{m_3} = h^3$ , весовой множитель в (5) перед  $w$  полагался  $p_{b_0} = 1$ , а перед  $M_n - p_{M_n} = h^2$ .

Таблица 3. Результаты численного решения бигармонического уравнения в примере 4.3

	$p = 5$		$p = 6$		$p = 7$		$p = 8$	
$N \times N$	$\ E_a^w\ _\infty$	$R$						
$2 \times 2$	2.93e-3	–	1.23e-4	–	2.46e-6	–	6.49e-8	–
$3 \times 3$	8.15e-4	3.15	6.78e-6	7.15	1.87e-7	6.36	1.74e-9	8.92
$4 \times 4$	2.15e-4	4.63	1.36e-6	5.58	1.59e-8	8.57	1.26e-10	9.12
$5 \times 5$	9.52e-5	3.65	3.15e-7	6.55	3.12e-9	7.30	1.76e-11	8.82
$6 \times 6$	4.31e-5	4.34	1.09e-7	5.82	6.76e-10	8.39	4.65e-12	7.30
$7 \times 7$	2.41e-5	3.77	4.13e-8	6.30	2.10e-10	7.58	9.02e-12	–
$8 \times 8$	1.37e-5	4.22	1.89e-8	5.85	7.05e-11	8.17	–	–
$9 \times 9$	8.73e-6	3.82	9.07e-9	6.23	2.78e-11	7.90	–	–
$10 \times 10$	5.62e-6	4.18	6.74e-9	2.82	1.51e-11	5.79	–	–

Из таблицы 3 видно, что порядок сходимости колеблется для  $p = 5$  около четырех, для  $p = 6$  — около шести, для  $p = 7$  — около восьми, для  $p = 8$  — около девяти. Таким образом, указанное в разделе 3 предположение о том, что оптимальный порядок сходимости будет проявляться, начиная с  $p = 7$ , оказалось верным. Отметим, что для  $p = 8$ , начиная с сетки  $7 \times 7$ , погрешность не уменьшается. Это происходит из-за того, что уже достигнута очень высокая точность решения, и ошибки округления начинают преобладать над погрешностью аппроксимации.

В данной задаче степень переопределения  $\eta = \frac{(p - 3)^2 + 2 \cdot 4(p + 1)}{(p + 1)^2} = \frac{(p + 1)^2 + 16}{(p + 1)^2}$ . Здесь тоже можно получить вариант КМ с квадратной невырожденной матрицей. Для этого достаточно взять  $N_m = p + 1$ ,  $N_b = p - 1$  и при записи уравнений согласования на каждой стороне ячейки пропустить уже две первые или две последние точки аналогично тому, как это делалось при решении уравнения Пуассона. Однако в этом случае число обусловленности  $\text{cond}_2(A)$  локальных и глобальной СЛАУ значительно увеличивается. Например, на сетке  $10 \times 10$  при  $p = 7$  максимальное значение  $\text{cond}_2(A)$  среди всех локальных СЛАУ при  $N_m = N_b = p + 1$  равнялось  $2.59e+5$ ,  $\text{cond}_2(A)$  глобальной СЛАУ —  $1.07e+7$ , а для квадратной СЛАУ —  $8.52e+7$  и  $4.11e+8$  соответственно. Вследствие

этого метод итераций по подобластям для квадратной СЛАУ переставал сходиться. Для получения решения в этой ситуации можно воспользоваться прямым ортогональным методом. В этом случае получаются результаты, близкие к приведенным в таблице 3 с сохранением оптимального порядка сходимости. Однако ошибки округления начинают раньше влиять на точность результатов. Например, при  $p = 7$  на сетке  $8 \times 8$  достигнута точность  $\|E_a^w\|_\infty = 6.46e-11$ , на сетке  $9 \times 9$  —  $\|E_a^w\|_\infty = 3.44e-11$ , на сетке  $10 \times 10$  —  $\|E_a^w\|_\infty = 3.59e-11$ .

**4.4. Изгиб защемленной пластины в ТРМ.** Рассмотрим в  $\Omega = (0, 1)^2$  тестовую задачу изгиба защемленной пластины в рамках ТРМ (6)–(8), (9) из работы [6]. Пусть на пластину действует нагрузка  $q(x, y) = \frac{E}{12(1-\nu^2)}(12y(y-1)(5x^2-5x+1)(2y^2(y-1)^2+x(x-1)(5y^2-5y+1))+12x(x-1)(5y^2-5y+1)(2x^2(x-1)^2+y(y-1)(5x^2-5x+1)))$ ,  $E = 10.92 \cdot 10^6$ ,  $\nu = 0.3$ . В этом случае точное решение задачи в размерных переменных имеет вид [6]

$$w = \frac{1}{t^3} \left( \frac{x^3(x-1)^3 y^3(y-1)^3}{3} - \frac{2t^2}{5(1-\nu)} \left( y^3(y-1)^3 x(x-1)(5x^2-5x+1) + x^3(x-1)^3 y(y-1)(5y^2-5y+1) \right) \right),$$

$$\varphi_x = -\frac{y^3(y-1)^3 x^2(x-1)^2(2x-1)}{t^3},$$

$$Q_x = -\frac{E}{6(1-\nu^2)} (y^3(y-1)^3(20x^3-30x^2+12x-1) + 3y(y-1)(5y^2-5y+1)x^2(x-1)^2(2x-1)),$$

$$M_x = \frac{E}{6(1-\nu^2)} (y^3(y-1)^3(x-x^2)(5x^2-5x+1) + \nu x^3(x-1)^3(y-y^2)(5y^2-5y+1)),$$

$$M_{xy} = -\frac{E}{12(1+\nu)} (3y^2(y-1)^2(2y-1)x^2(x-1)^2(2x-1)),$$

где  $\phi_y = \phi_x$ ,  $Q_y = Q_x$  и  $M_y = M_x$  с учетом замены  $x$  на  $y$ ,  $Q_x = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right)$ ,  $Q_y = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right)$  — перерезывающие силы,  $M_x = D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$ ,  $M_y = D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$ ,  $M_{xy} = D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)$

— изгибающие моменты,  $D_{11} = D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $D_{12} = \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,

$$D_{66} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)}.$$

На рисунке 2 приведено сравнение результатов решения данной задачи разработанным МК с квадратной СЛАУ и IGA-C [6]. На нем  $n = \lg \sqrt{\text{DOF}}$ ,  $\text{DOF}$  — общее количество степеней свободы. В IGA-C величина  $p$  означает наивысшую степень аппроксимирующей функции по каждому из пространственных направлений  $x$  и  $y$ , использующуюся при построении рациональных В-сплайнов.

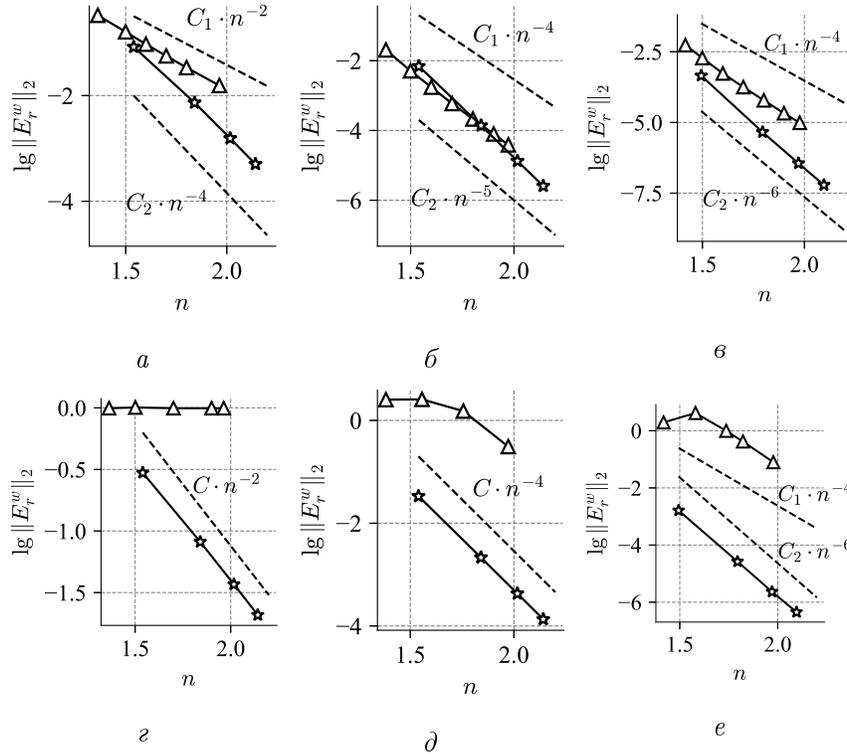


Рис. 2. Сходимость hp-МКНК с квадратной матрицей ( $\star$ ) и IGA-C [6] ( $\Delta$ ) расчетных значений  $w$  при  $p = 3$  (а, г),  $p = 4$  (б, д) и  $p = 5$  (в, е) при  $t = 10^{-1}$  (а, б, в) и  $t = 10^{-3}$  (г, д, е)

Из рисунка 2 видно, что практически всегда предложенный МК с квадратной СЛАУ превосходит по точности IGA-C, за исключением случая  $p = 4, t = 0.1$ , где результаты сопоставимы. Для тонкой пластины как для IGA-C, так и для МКНК с квадратной матрицей значительное влияние на точность оказывает эффект сдвигового запирания. При этом его влияние на порядок сходимости уменьшается с увеличением степени полиномов. Так, при  $t = 0.001$  для  $p = 3$  значение  $R = 2$ , для  $p = 4$  —  $R = 4$ , а для  $p = 5$  порядок  $R$  остается оптимальным и равняется 6.

В таблице 4 приведено сравнение времени параллельного решения СЛАУ с помощью метода итераций по подобластям и прямого метода

с использованием QR-разложения для  $p = 3$  в зависимости от толщины пластины. В этой таблице  $N_{iter}$  обозначает количество итераций сходимости метода итераций по подобластям,  $t_{solve}$  — время решения задачи в секундах.

В расчетах бралось 40 невязок на сетках  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  и  $40 \times 40$  и 80 невязок на сетке  $80 \times 80$  в случае  $t = 0.1$  в методе ускорения итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [23], и 40 невязок для сеток  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  и 80 невязок на сетке  $40 \times 40$  в случае  $t = 0.001$ . Значение псевдопогрешности в (15) для  $t = 0.1$  полагалось  $\epsilon = 10^{-10}$  для сеток  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  и  $40 \times 40$  и  $\epsilon = 10^{-12}$  для сетки  $80 \times 80$ , а для тонкой пластины  $\epsilon = 10^{-10}$ ,  $10^{-12}$ ,  $10^{-13}$ ,  $5 \cdot 10^{-13}$  для сеток размера  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  и  $40 \times 40$  соответственно. Например, если на сетке  $40 \times 40$  для  $t = 0.001$  взять  $\epsilon = 10^{-10}$ , то  $\|E_r^{\phi_x}\|_\infty = 9.34 \cdot 10^{-2}$ , а при  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-13}$  значение  $\|E_r^{\phi_x}\|_\infty = 6.93 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, наблюдается тенденция уменьшения значения псевдопогрешности  $\epsilon$  в методе итераций по подобластям при уменьшении толщины пластины  $t$  для получения лучшей точности.

ТАБЛИЦА 4. Результаты сравнения итерационного и прямого решения СЛАУ в задаче с малым параметром при старших производных

$N \times N$	Метод итераций по подобластям				Прямое QR-разложение		
	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	$R$	$N_{iter}$	$t_{solve}$	$\ E_r^{\phi_x}\ _\infty$	$R$	$t_{solve}$
$t = 0.1$							
$5 \times 5$	7.89e-2	—	41	0.016	7.89e-2	—	1.813
$10 \times 10$	6.20e-3	3.67	41	0.031	6.20e-3	3.67	2
$20 \times 20$	4.30e-4	3.85	82	0.109	4.30e-4	3.85	3.297
$40 \times 40$	4.07e-5	3.40	145	0.718	2.75e-5	3.97	6.54
$80 \times 80$	1.03e-6	5.30	961	24.563	1.73e-6	3.99	18.01
$t = 0.001$							
$5 \times 5$	2.75e-1	—	1002	0.172	2.87e-1	—	1.64
$10 \times 10$	6.50e-2	2.08	8121	2.828	6.47e-2	2.15	1.98
$20 \times 20$	1.58e-2	2.04	199501	235.813	1.57e-2	2.04	3.23
$40 \times 40$	6.93e-3	1.19	715583	3377.55	3.84e-3	2.03	6.42
$80 \times 80$	—	—	—	—	9.13e-4	2.07	16.25

Результаты демонстрируют существенное влияние малого параметра на скорость сходимости итерационного процесса. Так, для тонкой пластины на сетке  $40 \times 40$  для получения решения понадобилось в несколько сотен раз больше времени, чем в случае применения прямого метода и распараллеливания на видеокарте с использованием технологии CUDA. Однако и этого не хватило, чтобы достичь такую же точность, как и во втором случае. В свою очередь, время применения прямого метода

не зависит от толщины пластины. Таким образом, для толстой пластины рекомендуется использовать метод итераций по подобластям, а для тонких — однозначно прямой метод.

Исследуем сходимость величин  $M_x, Q_x$  (для  $M_{xy}, M_y$  погрешность ведет себя аналогично погрешности для  $M_x$ , для  $Q_y$  — аналогично  $Q_x$ ), которые выражаются через первые производные от искомым функций  $w, \phi_x$  и  $\phi_y$ . В таблице 5 приведены результаты расчетов для различных  $p$  и  $t$ . В случае толстой пластины  $t = 0.1$  и тонкой  $t = 0.01$  (на относительно подробных сетках) расчетные значения  $M_x$  и  $Q_x$  сходятся с порядком не хуже  $R = p$ , что подтверждает его оптимальность и оценку (1). В случае сильно тонкой пластины толщиной  $t = 0.001$  играет роль сдвиговое запираие, сказывающееся на порядке сходимости, который падает для  $M_x$  приблизительно на единицу, а для  $Q_x$  на два для любой степени полиномов  $p$ . Тем не менее даже для очень тонких пластин с малым параметром  $\beta = 10^{-6}$  разработанный КМ при  $p = 4, 5$  позволяет получить высокоточные результаты.

Для КМ с квадратной СЛАУ при  $p = 5$  на сетке  $80 \times 80$  точность приближенного решения не улучшилась по сравнению с  $40 \times 40$ . При этом в случае hr-МКНК с переопределенной СЛАУ при  $N_m = N_b = p + 1$  погрешности на сетке  $80 \times 80$  равнялись  $\|E_r^{M_x}\|_\infty = 4.72e-8$ ,  $\|E_r^{Q_x}\|_\infty = 2.11e-6$ . Остальные расчеты при других  $p$  и  $N$  совпали с приведенными в таблице 5. По-видимому, здесь также играет роль ухудшение обусловленности квадратной СЛАУ по сравнению с переопределенной.

## 5 Заключение

В настоящей работе разработан и верифицирован новый hr-МКНК с записью уравнений коллокации в корнях полиномов Лежандра, сводящийся в частном случае к КМ с квадратными СЛАУ. Численно показан оптимальный порядок сходимости рассмотренных методов на примере решения краевых задач для УЧП, содержащих старшие производные второго и четвертого порядков. Продемонстрированы преимущества по точности реализованных методов по сравнению с предыдущими опубликованными вариантами МКНК [15, 16] и IGA-C [6].

В качестве дальнейшей работы может рассматриваться возможность сочетания разработанного здесь метода с сеткопостроителями с прямоугольными ячейками для нерегулярных областей [1, 2], существенно расширяющих область применения развиваемого численного алгоритма. Другой интересной задачей является совершенно неочевидное сравнение погрешности приближенного решения и времени решения СЛАУ при одинаковом порядке сходимости  $R$  в зависимости от DOF предложенного здесь подхода построения КМ по сравнению с hr-МКНК [1, 2], у которых приближенное решение ищется в виде  $u_{hj}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^p \sum_{i_2=0}^{p-i_1} c_{j,i_1 i_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}$

ТАБЛИЦА 5. Сходимость  $M_x$  и  $Q_x$  в примере 4.4

$p = 3$								
$t = 0.1$					$t = 0.001$			
$N \times N$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	$R$	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	$R$	$\ E_r^{M_x}\ _\infty$	$R$	$\ E_r^{Q_x}\ _\infty$	$R$
5×5	9.23e-2	—	1.50e-1	—	2.93e-1	—	5.63e-1	—
10×10	1.15e-2	3.00	2.77e-2	2.44	1.02e-1	1.52	3.10e-1	0.86
20×20	1.14e-3	3.33	4.00e-3	2.79	3.00e-2	1.77	1.63e-1	0.93
40×40	1.19e-4	3.26	5.26e-4	2.93	8.03e-3	1.90	8.28e-2	0.98
80×80	1.33e-5	3.16	6.71e-5	2.97	1.99e-3	2.01	4.00e-2	1.05
$p = 4$								
$t = 0.1$					$t = 0.001$			
5×5	5.66e-3	—	1.56e-2	—	3.78e-2	—	9.87e-2	—
10×10	2.46e-4	4.52	1.06e-3	3.88	5.44e-3	2.80	2.38e-2	2.05
20×20	9.84e-6	4.64	6.79e-5	3.96	7.12e-4	2.93	5.83e-3	2.03
40×40	4.38e-7	4.49	4.25e-6	4.00	8.83e-5	3.01	1.40e-3	2.06
80×80	2.26e-8	4.28	2.65e-7	4.00	1.00e-5	3.14	3.17e-4	2.14
$p = 5$								
$t = 0.1$					$t = 0.001$			
5×5	1.44e-4	—	4.48e-4	—	1.49e-3	—	4.76e-3	—
10×10	2.36e-6	5.93	1.24e-5	5.18	9.03e-5	4.04	4.92e-4	3.27
20×20	3.85e-8	5.94	3.66e-7	5.08	5.74e-6	3.98	5.55e-5	3.15
40×40	6.08e-10	5.98	1.11e-8	5.04	5.31e-7	3.43	6.49e-6	3.10
80×80	9.08e-12	6.06	3.43e-10	5.01	6.50e-7	—	1.88e-5	—
$p = 4, t = 0.01$					$p = 5, t = 0.01$			
5×5	3.57e-2	—	9.33e-2	—	1.35e-3	—	4.33e-3	—
10×10	4.43e-3	3.01	1.94e-2	2.27	6.46e-5	4.33	3.52e-4	3.62
20×20	3.74e-4	3.57	3.07e-3	2.66	2.21e-6	4.87	2.15e-5	4.03
40×40	1.95e-5	4.26	3.13e-4	3.29	4.88e-8	5.50	9.04e-7	4.57
80×80	7.29e-7	4.74	2.32e-5	3.75	8.72e-10	5.80	3.10e-8	4.86

с  $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$  неизвестными коэффициентами в каждой ячейке, а не  $(p+1)^2$ , как в данной статье.

## References

- [1] V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, S.K. Golushko, B.V. Semisalov, V.P. Shapeev *H-, p-, and hp-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications*, Comput. Math. Math. Phys., **62**:4 (2022), 517–537.
- [2] L.S. Bryndin, V.A. Belyaev, V.P. Shapeev *Development and verification of a simplified hp-version of the least-squares collocation method for irregular domains*, Bull. South Ural State Univ. Ser.: Math. Model. Program. Comput. Softw., **16**:3 (2023), 35–50.

- [3] Shao W., Wu X., Chen S. *Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain*, Eng. Anal. Bound. Elem., **36**:12 (2012), 1787–1798.
- [4] D. Schillinger, J.A. Evans, A. Reali, M.A. Scott, J.R.T. Hughes *Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **267** (2013), 170–232.
- [5] V.A. Kireev *Hermite bicubic collocation method in domain with curvilinear boundary*, Vestnik SibGAU., **3**:55 (2 14), 73–77.
- [6] J. Kiendl, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, C. Lovadina, A. Reali *Isogeometric collocation methods for the Reissner–Mindlin plate problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **284** (2015), 489–507.
- [7] C. de Boor, B. Swartz *Collocation at Gaussian points*, SIAM J. Numer. Anal., **10**:4 (1973), 582–606.
- [8] G. Fairweather, A. Karageorghis, J. Maack *Compact optimal quadratic spline collocation methods for the Helmholtz equation*, J. Comput. Phys., **230**:8 (2010), 2880–2895.
- [9] B. Bialecki, G. Fairweather, A. Karageorghis, J. Maack *A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem*, Numer. Algorithms, **83** (2020), 165–199.
- [10] X. Yang, H. Zhang, D. Xu *WSGD-OSC Scheme for Two-Dimensional Distributed Order Fractional Reaction–Diffusion Equation*, J. Sci. Comput., **76** (2018), 1502–1520.
- [11] R.I. Fernandes, G. Fairweather *An ADI extrapolated Crank–Nicolson orthogonal spline collocation method for nonlinear reaction–diffusion systems*, J. Comput. Phys., **231**:19 (2012), 6248–6267.
- [12] B. Bialecki, G. Fairweather, A. Karageorghis, J. Maack *Orthogonal spline collocation methods for partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **128** (2001), 55–82.
- [13] S. Timoshenko, S. Woinowsky–Krieger *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Book Comp., New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Hamburg, London, Madrid, Mexico, Milan, Montreal, New Delhi, Panama, Paris, São Paulo, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto, 1959.
- [14] J.N. Reddy *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd edn.*, CRC Press, Boca Raton, London, N.Y., Washington, D.C., 2004.
- [15] S.V. Idimeshev *Modified method of collocations and least residuals and its application in the mechanics of multilayer composite beams and plates*, Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Institute of Computing Technologies, Novosibirsk, 2016.
- [16] V.A. Belyaev *Solving a Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method*, Numer. Anal. Appl., **13**:3 (2020), 207–218.
- [17] G. Chen, Z. Li, P. Lin *A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow*, Adv. Comput. Math., **29**:2 (2008), 113–133.
- [18] C.C. Ike *Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate*, Mathematical Models in Engineering, **4**:2 (2018), 50–72.
- [19] O. Garcia, E.A. Fancello, C.S. de Barcellos, C.A. Duarte *Hp-clouds in Mindlin's thick plate model*, Int. J. Numer. Methods Eng., **47**:8 (2000), 1367–1522.
- [20] C. Tiago, V.M.A. Leitão *Eliminating shear-locking in meshless methods: a critical overview and a new framework for structural theories*, Advances in meshfree techniques. Computational methods in applied sciences, **5** (2007), 123–147.
- [21] A.G. Sleptsov, Yu.I. Shokin *An adaptive grid-projection method for elliptic problems*, Comput. Math. Math. Phys., **37**:5 (1997), 558–571.
- [22] S.K. Golushko, S.V. Idimeshev, V.P. Shapeev *Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory*, Computational Technologies, **18**:6 (2013), 31–43.

- [23] E.V. Vorozhtsov, V.P. Shapeev *On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals*, Appl. Math. Comput., **363** (2019), 124644:1–124644:19.
- [24] T.A. Davis *Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization*, ACM Trans. Math. Softw., **38**:1 (2011), 8:1–8:22.
- [25] J.M. Ortega *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*, Springer, Plenum Press, 1988.
- [26] V.P. Shapeev, L.S. Bryndin, V.A. Belyaev *The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation*, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., **26**:3 (2022), 556–572.
- [27] P.M. Prenter, R.D. Russel *Orthogonal collocation for elliptic partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., **13**:6 (1976), 923–939.

LUKA SERGEEVICH BRYNDIN

KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE  
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
INSTITUTSKAYA STR., 4/1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [bryndin-1996@mail.ru](mailto:bryndin-1996@mail.ru)

VASILII ALEXEYEVICH BELIAEV

KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE  
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
INSTITUTSKAYA STR., 4/1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [belyaevasily@mail.ru](mailto:belyaevasily@mail.ru)