S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.988
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 30C65

КОЭФФИЦИЕНТЫ БЕЛЬТРАМИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д.К. Дорохин

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The article examines some properties of quasiconformal mappings on the Heisenberg group. In particular, an explicit expression for the Beltrami coefficient is obtained for the composition of two quasiconformal mappings. It is also shown that if two maps have identical Beltrami coefficients almost everywhere, then these maps are conformally equivalent. Рассмотрен ряд примеров..

Keywords: Heisenberg group, quasiconformal mappings, Beltrami coefficients, Brownian motion.

1 Введение

В данной работе мы выводим формулу для коэффициента Бельтрами композиции двух квазиконформных отображений на группе Гейзенберга $\mathbb{H}$. Квазиконформные отображения на $\mathbb{H}$ активно изучаются начиная с работ А. Кораньи и Х. М. Раймана [1]. Так в [2] показано, что квазиконофорное отображение является решением системы Бельтрами. Однако, насколько нам известно, явная формула коэффициента Бельтрами композиции отображений ранее в литературе не встречалась. А между тем

Dorokhin, D.K., Beltrami coefficients of composition on the Heisenberg group.

Работа поддержана Матцентром.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

с её помощью можно доказать аналог факторизация Стойлова и исследовать квазиброуновские движения на группе Гейзенберга.

На плоскости верна теорема(факторизация Стойлова):

Теорема 1 ([3, Theorem 5.5.1])**.** *Пусть $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ и $f : \Omega \to \Omega'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, являющийся решением уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

где $\mu(z)$ - измеримая функция и $|\mu(z)| \leqslant k < 1$ почти всюду в Ω.
Пусть $g \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ будем другим любым решением уравнения в Ω. Тогда существует голоморфная функция $h : \Omega' \to \mathbb{C}$, такая что

$$g = h \circ f.$$

Обратно, если h голоморфно в Ω', то композиция $h \circ f$ это $W^{1,2}_{loc}$-решение уравнения в Ω.

Более того, известно, что на плоскости любое дискретное открытое отображение топологически эквивалентно аналитической функции $h = \varphi \circ f$, где f гомеоморфизм, а φ голоморфная функция. Ю. Г. Решетняком был доказан([4]) общий факт, что квазирегулярное отображение является открытым и дискретным. В свою очередь, квазиконформное отображение - это инъективное квазирегулярное отображение. Тогда, из теоремы 1, мы приходим к тому, что если на плоскости даны два квазиконформных отображения $f : \Omega \to \Omega_1$ и $g : \Omega_1 \to \Omega_2$, то коэффициент Бельтрами для отображения $f \circ g^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ имеет вид

$$\mu_{f \circ g^{-1}} \circ g = \frac{g_z}{\overline{g_z}} \cdot \frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_f \overline{\mu_g}},$$

где μ_f, μ_g это коэффициенты Бельтрами для функций f, g, соответственно, и $g_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})g$. Выводим, что если коэффициенты Бельтрами двух функций совпадают почти всюду, то сами функции отличаются друг от друга некоторым конформным преобразованием слева.

В этой статье мы ставим задачу получить аналогичный результат на группе Гейзенберга $\mathbb{H}$. Сначала, мы находим, чему будут равны дифференциальные операторы от композиции функций. Потом рассматриваем коэффициенты Бельтрами от композиции, используя полученные формулы. И затем получаем теорему аналогичную теореме Стойлова, что равенство коэффициентов Бельтрами квазиконформных отображений почти всюду на группе Гейзенберга равносильно тому, что найдётся конформная функция, композиционно подействовав которой слева, мы получим равенство одного отображения через другое. Также эти результаты помогают в анализе квазиконформных образов броуновского движения на группе Гейзенберга. Задача состоит в следующем, пусть даны два квазиконформных отображения с общим коэффициентом Бельтрами, будут ли тогда соответствующие образы броуновского движения эквивалентны?

2 Предварительные сведения

Основы теории квазиконформных отображений представлены в [1]. Ниже мы приводим необходимые нам определения и результаты.

Группу Гейзенберга $\mathbb{H}$ можно отождествлять с $\mathbb{R}^3$, а элементы группы можно представить как $(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Тогда групповая операция задаётся соотношением

$$(z_1,t_1)*(z_2,t_2)=(z_1+z_2,t_1+t_2-2\operatorname{Im}(z_1\cdot\bar z_2))=(z_1+z_2,t_1+t_2-2(x_1y_2-x_2y_1)),$$

где $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$.
Однопараметрическая группа растяжений: $\delta_s(z,t)=(sz,s^2t)$, $s>0$. Левоинвариантные векторные поля

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial t},\quad Y=\frac{\partial}{\partial y}-2x\frac{\partial}{\partial t},\quad T=-\frac{[X,Y]}{4}=\frac{\partial}{\partial t}$$

образуют стандартный базис алгебры Ли. Однородная норма (норма Кораньи) $\rho(z,t)=(|z|^4+t^2)^{\frac{1}{4}}$ задаёт метрику на $\mathbb{H}$: $\rho((z_1,t_1),(z_2,t_2)):=\rho((z_2,t_2)^{-1}*(z_1,t_1))$.

Определение 1 ([1]). *Пусть $f=(f_1,f_2,f_3):\Omega\to\mathbb{H}$ отображение, определённое на открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{H}$. Будем говорить, что f удовлетворяет условию контактности, если оно сохраняет контактную структуру:*

$$-2f_2Xf_1+2f_1Xf_2+Xf_3=0;$$
$$-2f_2Yf_1+2f_1Yf_2+Yf_3=0.$$

Пусть $\Omega\subset\mathbb{H}$ – открытое множество. Пространство Соболева $W^{1,q}(\Omega)$, где $1\le q\le\infty$, состоит из локально интегрируемых функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$ обладающих обобщёнными производными Xf и Yf и так что норма $\|f\|_{W^{1,q}(\Omega)}=\|f\|_{L^q(\Omega)}+\|\nabla_hf\|_{L^q(\Omega)}<\infty$, где $\nabla_hf=(Xf,Yf)$ – горизонтальный градиент. Будем говорить, что $f\in W^{1,q}_{\rm loc}(\Omega)$ если $f\in W^{1,q}(U)$ для любого открытого множества U такого что $\bar U\subset\Omega$.

Отображение $f:\Omega\to\mathbb{H}$ принадлежит классу $W^{1,q}_{\rm loc}(\Omega;\mathbb{H})$ если $f\in L^q(\Omega;\mathbb{H})$ и выполнены два условия:
(A) Для любого $w\in\mathbb{H}$ функция $[f]_w:x\in\Omega\mapsto\rho(f(x),w)$ принадлежит пространству $W^{1,q}_{\rm loc}(\Omega)$;
(B) Семейство функций $\nabla_h[f]_w$ имеет мажоранту, принадлежащую $L^q_{\rm loc}(\Omega)$.

Для отображений $f=(f_1,f_2,f_3):\Omega\to\mathbb{H}$ класса Соболева $W^{1,q}_{\rm loc}(\Omega;\mathbb{H})$ определим формальный горизонтальный дифференциал D_hf как матрицу

$$D_hf=\begin{pmatrix}Xf_1 & Yf_1\\ Xf_2 & Yf_2\end{pmatrix},$$

а $J_f=\det(D_hf)$ будем называть якобианом отображения f.

Определение 2. *Гомеоморфизм $f:\Omega\to\mathbb{H}$, определённый на открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{H}$ является квазикофнормным отображением,* *если* $f \in W^{1,4}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, *и существует константа* $K \geqslant 1$, *такая, что неравенство*

$$|D_h f|^4 \leqslant K J_f$$

выполнено почти всюду на Ω.

Теорема 2 ([5] стр. 326). *Любое 1-квазиконфомрное (т.е. конформное) отображение на группе Гейзенберга представляется как композиция отображений следующего типа:*

(1) *сдвиг* $\pi_a(x) = a * x$, $a \in \mathbb{H}$;
(2) *растяжение* $\delta_s(x) = (sz, s^2 t), \quad s > 0$;
(3) *поворот* $\phi_\alpha(x) = (e^{i\alpha} z, t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$;
(4) *инверсия* $j(x) = (\frac{z}{|z|^2 - it}, \frac{-t}{\rho(x)^4})$;
(5) *отражение* $\iota(x) = (\overline{z}, t)$.

3 Уравнение Бельтрами на группе Гейзенберга

Чтобы сформулировать уравнение Бельтрами рассмотрим векторные поля в комплексной форме

$$Z = \frac{1}{2}(X - iY) \quad \text{и} \quad \overline{Z} = \frac{1}{2}(X + iY).$$

Теорема 3 ([1, Theorem 7]). *C^2-диффеоморфизм f является K-квазиконформным отображением, тогда и только тогда, когда существует комплексная функция μ с $|\mu| \leqslant \frac{K-1}{K+1}$, которая удовлетворяет*

$$\overline{Z} f_{\mathrm{I}} = \mu Z f_{\mathrm{I}},$$

$$\overline{Z} f_{\mathrm{II}} = \mu Z f_{\mathrm{II}}.$$

где $f_{\mathrm{I}} = f_1 + i f_2$ *и* $f_{\mathrm{II}} = f_3 + i|f_{\mathrm{I}}|^2$.

Лемма 1. *Пусть $\Omega, \Omega', \Omega''$ области в $\mathbb{H}$, $g : \Omega \to \Omega'$ и $h : \Omega' \to \Omega''$ – квазиконформные отображения. Тогда*

$$Z(h_{\mathrm{I}} \circ g) = (Z h_{\mathrm{I}} \circ g) Z g_{\mathrm{I}} + (\overline{Z} h_{\mathrm{I}} \circ g) Z \overline{g_{\mathrm{I}}},$$
$$\overline{Z}(h_{\mathrm{I}} \circ g) = (Z h_{\mathrm{I}} \circ g) \overline{Z} g_{\mathrm{I}} + (\overline{Z} h_{\mathrm{I}} \circ g) \overline{Z} \overline{g_{\mathrm{I}}}.$$

Доказательство. Пусть $g : \Omega \to \Omega'$ и $h : \Omega' \to \Omega''$ квазиконформные функции.
Найдём чему равен коэффициент Бельтрами для композиции функций.

Для этого сначала найдём операторы Z и $\overline{Z}$ от композиции функций:

$$Z(h_{\mathrm{I}}\circ g)=\frac{1}{2}(X-iY)(h_{\mathrm{I}}\circ g)=\frac{1}{2}([X(h_1\circ g)+Y(h_2\circ g)]+i[X(h_2\circ g)-Y(h_1\circ g)])=$$
$$=\frac{1}{2}([(h_{1x}\circ g)g_{1x}+(h_{1y}\circ g)g_{2x}+(h_{1t}\circ g)g_{3x}+2y((h_{1x}\circ g)g_{1t}+(h_{1y}\circ g)g_{2t}+$$
$$+(h_{1t}\circ g)g_{3t})]+[(h_{2x}\circ g)g_{1y}+(h_{2y}\circ g)g_{2y}+(h_{2t}\circ g)g_{3y}-2x((h_{2x}\circ g)g_{1t}+$$
$$+(h_{2y}\circ g)g_{2t}+(h_{2t}\circ g)g_{3t})]+i[(h_{2x}\circ g)g_{1x}+(h_{2y}\circ g)g_{2x}+(h_{2t}\circ g)g_{3x}+$$
$$+2y((h_{2x}\circ g)g_{1t}+(h_{2y}\circ g)g_{2t}+(h_{2t}\circ g)g_{3t})]-i[(h_{1x}\circ g)g_{1y}+(h_{1y}\circ g)g_{2y}+$$
$$+(h_{1t}\circ g)g_{3y}-2x((h_{1x}\circ g)g_{1t}+(h_{1y}\circ g)g_{2t}+(h_{1t}\circ g)g_{3t})])=$$

Скомбинируем $g_{ix}+2yg_{it}$ и $g_{iy}-2xg_{it}$ в Xg_1 и Yg_1, соответственно, для всех $i=1,2,3$:

$$=\frac{1}{2}([(h_{1x}\circ g)Xg_1+(h_{1y}\circ g)Xg_2+(h_{1t}\circ g)Xg_3]+[(h_{2x}\circ g)Yg_1+$$
$$+(h_{2y}\circ g)Yg_2+(h_{2t}\circ g)Yg_3]+i[(h_{2x}\circ g)Xg_1+(h_{2y}\circ g)Xg_2+$$
$$+(h_{2t}\circ g)Xg_3]-i[(h_{1x}\circ g)Yg_1+(h_{1y}\circ g)Yg_2+(h_{1t}\circ g)Yg_3]=$$

По условию контактности, раскроем Xg_3 и Yg_3:

$$=\frac{1}{2}([(Xh_1\circ g)Xg_1+(Yh_1\circ g)Xg_2]+[(Xh_2\circ g)Yg_1+(Yh_2\circ g)Yg_2]+$$
$$+i[(Xh_2\circ g)Xg_1+(Yh_2\circ g)Xg_2]-i[(Xh_1\circ g)Yg_1+(Yh_1\circ g)Yg_2]=$$
$$=\frac{1}{2}([(Xh_{\mathrm{I}}\circ g)Xg_1+(Yh_{\mathrm{I}}\circ g)Xg_2]-i[(Xh_{\mathrm{I}}\circ g)Yg_1+(Yh_{\mathrm{I}}\circ g)Yg_2])=$$
$$=(Xh_{\mathrm{I}}\circ g)Zg_1+(Yh_{\mathrm{I}}\circ g)Zg_2=((\overline{Z}+Z)h_{\mathrm{I}}\circ g)Zg_1-i((\overline{Z}-Z))h_{\mathrm{I}}\circ g)Zg_2=$$
$$=(Zh_{\mathrm{I}}\circ g)Zg_{\mathrm{I}}+(\overline{Z}h_{\mathrm{I}}\circ g)Z\overline{g_{\mathrm{I}}}.$$

Аналогично:

$$\overline{Z}(h_{\mathrm{I}}\circ g)=\frac{1}{2}(X+iY)(h_{\mathrm{I}}\circ g)=\frac{1}{2}([X(h_1\circ g)-Y(h_2\circ g)]+i[X(h_2\circ g)+Y(h_1\circ g)])=$$
$$=(Zh_{\mathrm{I}}\circ g)\overline{Z}g_{\mathrm{I}}+(\overline{Z}h_{\mathrm{I}}\circ g)\overline{Z}\overline{g_{\mathrm{I}}}.$$

□

Лемма 2. *Пусть $f:\Omega\to\Omega_1$ и $g:\Omega\to\Omega_2$ квазиконформные отображения на группе Гейзенберга с коэффициентами Бельтрами μ_f и μ_g, соответственно. Тогда композиция $f\circ g^{-1}:\Omega_2\to\Omega_1$ это квазиконформная функция с коэффициентом Бельтрами*

$$\mu_{f\circ g^{-1}}\circ g=\frac{Zg_{\mathrm{I}}}{\overline{Zg_{\mathrm{I}}}}\cdot\frac{\mu_f-\mu_g}{1-\mu_f\overline{\mu_g}}.$$

Доказательство. Положим $h = f \circ g^{-1}$, тогда $f_{\mathrm{I}} = h_{\mathrm{I}} \circ g$. Применяя лемму 1 к Zf_{I} и $\overline{Z}f_{\mathrm{I}}$, получим

$$
\begin{aligned}
Zf_{\mathrm{I}} &= (Zh_{\mathrm{I}} \circ g)Zg_{\mathrm{I}} + (\overline{Z}h_{\mathrm{I}} \circ g)Z\overline{g_{\mathrm{I}}},\\
\overline{Z}f_{\mathrm{I}} &= (Zh_{\mathrm{I}} \circ g)\overline{Z}g_{\mathrm{I}} + (\overline{Z}h_{\mathrm{I}} \circ g)\overline{Z}\overline{g_{\mathrm{I}}}.
\end{aligned}
$$

Выразим теперь $Zh_{\mathrm{I}} \circ g$ и $\overline{Z}h_{\mathrm{I}} \circ g$

$$
\begin{aligned}
Zh_{\mathrm{I}} \circ g &= \frac{Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}} - \overline{Z}f_{\mathrm{I}}Z\overline{g}_{\mathrm{I}}}{Zg_{\mathrm{I}}\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}} - \overline{Z}g_{\mathrm{I}}Z\overline{g}_{\mathrm{I}}},\\
\overline{Z}h_{\mathrm{I}} \circ g &= -\frac{Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}g_{\mathrm{I}} - \overline{Z}f_{\mathrm{I}}Zg_{\mathrm{I}}}{Zg_{\mathrm{I}}\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}} - \overline{Z}g_{\mathrm{I}}Z\overline{g}_{\mathrm{I}}}.
\end{aligned}
$$

Отсюда находим $\mu_h \circ g$

$$
\mu_h \circ g = -\frac{Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}g_{\mathrm{I}} - \overline{Z}f_{\mathrm{I}}Zg_{\mathrm{I}}}{Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}} - \overline{Z}f_{\mathrm{I}}Z\overline{g}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}}}\frac{\overline{Z}f_{\mathrm{I}}Zg_{\mathrm{I}} - Zf_{\mathrm{I}}\overline{Z}g_{\mathrm{I}}}{1 - \mu_f\overline{\mu_g}} = \frac{Zg_{\mathrm{I}}}{\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}}}\frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_f\overline{\mu_g}}.
$$

□

Как следствие, получаем выражение для коэффициента Бельтрами обратного отображения (в лемме 2 нужно положить $f(x) = x$):

$$
\mu_{g^{-1}} \circ g = -\frac{Zg_{\mathrm{I}}}{\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}}} \cdot \mu_g.
$$

Теорема 4. *Пусть $f : \Omega \to \Omega_1$ и $g : \Omega \to \Omega_2$ квазиконформные отображения на группе Гейзенберга с коэффициентами Бельтрами μ_f и μ_g. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mu_f = \mu_g$ почти всюду в Ω;*
(2) *Найдётся конформное отображение $h : \Omega_2 \to \Omega_1$ так, что $f = h \circ g$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) По лемме 2 рассмотрим отображения с равными почти всюду коэффициентами Бельтрами. Получим, что коэффициент Бельтрами функции $h = f \circ g^{-1}$ равен нулю и, следовательно, h - конформная функция такая, что $f = h \circ g$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $f \circ g^{-1} = h$. Тогда по лемме 2 получаем

$$
0 = \mu_{f \circ g^{-1}} \circ g = \frac{Zg_{\mathrm{I}}}{\overline{Z}\overline{g}_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_f\overline{\mu_g}}.
$$

Следовательно $\mu_f = \mu_g$ почти всюду.

□

4 Примеры

Для демонстрации полученных результатов рассмотрим ряд примеров.

4.1. Инвариантность коэффициента Бельтрами относительно конформного отображения. Проверим, что композиция слева на конформное отображение не меняет коэффициент Бельтрами отображения. Рассмотрим функции $g = (tz, \frac{t^3}{3})$ и $h = j \circ g = (\frac{3z}{3t|z|^2 - it^2}, -\frac{3}{9t|z|^4 + t^3})$, где j инверсия на группе Гейзенберга. Найдём μ_g

$$\mu_g = \frac{\overline{Z} g_{\mathrm{I}}}{Z g_{\mathrm{I}}} = -\frac{izz}{t + i|z|^2}.$$

Проверим, что μ_g и μ_h совпадают почти всюду:

$$\mu_h = \frac{\overline{Z} h_{\mathrm{I}}}{Z h_{\mathrm{I}}} = \frac{\frac{-9tzz + i3zz(3|z|^2 - 2it)}{(3t|z|^2 - it^2)^2}}{\frac{9t|z|^2 - 3it^2 - 9tz\overline{z} - i3\overline{z}z(3|z|^2 - 2it)}{(3t|z|^2 - it^2)^2}}$$
$$= \frac{-3tzz + izz(3|z|^2 - 2it)}{-it^2 - izz(3|z|^2 - 2it)} = \frac{-izz(3|z|^2 + it)}{(t + i|z|^2)(3|z|^2 + it)} = -\frac{izz}{t + i|z|^2}.$$

4.2. Коэффициент Бельтрами для обратной функции. Покажем, что коэффициент Бельтрами для обратной функции можно выразить через коэффициент Бельтрами данной функций. Рассмотрим функции $h = (tz, \frac{t^3}{3})$, и $h^{-1} = (\frac{z}{\sqrt[3]{3t}}, \sqrt[3]{3t})$. Найдём μ_h и $\mu_{h^{-1}}$

$$\mu_h = \frac{\overline{Z} h_{\mathrm{I}}}{Z h_{\mathrm{I}}} = -\frac{izz}{t + i|z|^2},$$

$$\mu_{h^{-1}} = \frac{\overline{Z} h_{\mathrm{I}}^{-1}}{Z h_{\mathrm{I}}^{-1}} = \frac{izz}{3t - i|z|^2}.$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\mu_{h^{-1}} = \frac{\overline{Z}({h^{-1}}_{\mathrm{I}})}{Z({h^{-1}}_{\mathrm{I}})} = -(\frac{Z h_{\mathrm{I}}}{\overline{Z h_{\mathrm{I}}}} \mu_h) \circ h^{-1} = (\frac{t + iz\overline{z}}{t - iz\overline{z}} \cdot \frac{izz}{t + i|z|^2}) \circ h^{-1} = \frac{izz}{3t - i|z|^2}.$$

4.3. Коэффициент Бельтрами композиции отображений. Покажем, что коэффициент Бельтрами для композиции функций можно выразить через коэффициенты Бельтрами двух других функций. Рассмотрим функции $h = (2z + \overline{z}, 3t)$, $g = (tz, \frac{t^3}{3})$ и $g^{-1} = (\frac{z}{(3t)^{\frac{1}{3}}}, (3t)^{\frac{1}{3}})$. Найдём μ_h, μ_g и $\mu_{g^{-1}}$

$$\mu_h = \frac{\overline{Z} h_{\mathrm{I}}}{Z h_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{2},$$

$$\mu_g = \frac{\overline{Z} g_{\mathrm{I}}}{Z g_{\mathrm{I}}} = -\frac{izz}{t + i|z|^2},$$

$$\mu_{g^{-1}} = \frac{\overline{Z} g_{\mathrm{I}}^{-1}}{Z g_{\mathrm{I}}^{-1}} = \frac{izz}{3t - i|z|^2}.$$

Рассмотрим коэффициент Бельтрами для $f = h \circ g = (2tz + t\overline{z}, -t^3)$

$$\mu_f = \frac{\overline{Z} f_{\mathrm{I}}}{Z f_{\mathrm{I}}} = \frac{t - iz(2z + \overline{z})}{2t + i\overline{z}(2z + \overline{z})}.$$

По лемме 2,

$$\mu_{h\circ g} = \frac{\overline{Z}(h_{\mathrm{I}} \circ g)}{Z(h_{\mathrm{I}} \circ g)} = \Big(\frac{\overline{Z g_{\mathrm{I}}^{-1}}}{Z g_{\mathrm{I}}^{-1}} \cdot \frac{\mu_h - \mu_{g^{-1}}}{1 - \mu_h \overline{\mu_{g^{-1}}}}\Big) \circ g = \Big(\frac{(3t)^{-\frac{1}{3}} - (3t)^{-\frac{4}{3}} \cdot i\overline{z}z}{(3t)^{-\frac{1}{3}} + (3t)^{-\frac{4}{3}} \cdot i\overline{z}z} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{izz}{3t - i|z|^2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{i\overline{zz}}{3t + i|z|^2}}\Big) \circ g =$$

$$= \Big(\frac{3t - iz\overline{z}}{3t + iz\overline{z}} \cdot \frac{\frac{3t - i|z|^2 - 2izz}{3t - i|z|^2}}{\frac{6t + 2i|z|^2 + i\overline{zz}}{3t + i|z|^2}}\Big) \circ g = \frac{t^3 - it^2|z|^2 - 2it^2 zz}{2t^3 + 2it^2|z|^2 + it^2\overline{zz}} = \frac{t - iz(2z + \overline{z})}{2t + i\overline{z}(2z + \overline{z})}.$$

4.4. Квазиброуновское движение на группе Гейзенберга. Известно свойство конформной инвариантности броуновского движения: на плоскости конформный образ броуновского движения есть броуновское движение с изменённым временем, а в $\mathbb{R}^n$ это возможно только, если отображение является гармоническим морфизмом [6] (см. также [7]). Аналогичный результат для отображений на группе Гейзенберга получен в работе [8]. Тогда представляет интерес вопрос об описании случайных процессов инвариантных относительно квазиконформных отображений. На плоскости такие процессы описаны в диссертации [9].

Определение 3 ([10])**.** *Пусть X_t и Y_t это независимые стандартные броуновские движения, а $S_t = 2\int\limits_0^t Y_s dX_s - X_s dY_s$. Случайный процесс $B_t = (X_t, Y_t, S_t)$ будем называть горизонтальным броуновским движением.*

Определение 4. *Процесс X_t будем называть квазиброуновским движением на группе Гейзенберга, если существует квазиконформное отображение f такое, что $f(X_t)$ – это броуновское движение на группе Гейзенберга.*

Теорема 5. *Пусть X_t и Y_t квазиброуновские движения на группе Гейзенберга с соответствующими квазиконформными отображениями f и g. Если $g \circ f^{-1}$ это конформное отображение, полученное из поворотов, растяжений и сдвигов на группе Гейзенберга, то $X_t = Y_{\varphi(t)}$.*

Доказательство. Заметим, что $g(X_t) = g \circ f^{-1}(B_t)$, где B_t броуновское движение на группе Гейзенберга. Поскольку $g \circ f^{-1}$ это конформное отображение, полученное из поворотов, растяжений и сдвигов, то $g \circ f^{-1}(B_t) = \tilde{B}_{a(t)}$, где $\tilde{B}_a(t)$ другое независимое от B_t броуновское движение с изменённым временем $a(t)$. $\square$

References

[1] A. Korányi, H. M. Reimann, *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Inventiones Mathematicae, **80** (1985), 309–338.

[2] A. Korányi, H. M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Advances in Mathematics, **111** (1995), 1–87.

[3] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton University Press, Princeton, 2009.

[4] Y. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Advances in Mathematics, **111** (1995), 1–87.

[5] D. V. Isangulova, *The class of mappings with bounded specific oscillation, and integrability of mappings with bounded distortion on Carnot groups*, Siberian Mathematical Journal, **48** (2007), 249–267.

[6] A. Bernard, E. A. Campbell, A. M. Davie, *Brownian motions and generalized analytic and inner functions*, Annales de l'Institut Fourier, **29, №1** (1979), 207–228.

[7] B. Øksendal, *Dirichlet forms, quasiregular functions and Brownian motion*, Inventiones mathematicae, **91** (1988), 273–297.

[8] N. A. Evseev, *Brownian path preserving mappings on the Heisenberg group*, (2022).

[9] L. Zijian, *Brownian Motion, Quasiconformal Mappings and the Beltrami Equation*.

[10] O. Calin, *Transience of diffusions on Heisenberg and Grushin distributions*, Journal of Geometry and Physics, **77** (2014), 131–142.

Daniil Konstantinovich Dorokhin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: d.dorokhin@g.nsu.ru