**Отзыв рецензента на статью:**
**A. V. Seliverstov**
**“Polynomial-time computable min-plus semirings”**

Статья посвящена серии интересных вопросов, касающихся различных изоморфных представлений полукольца $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \min, 0)$, где $\min(x, y)$ — операция выбора минимального из двух чисел $x, y \in \mathbb{N}$. Автор рассматривает структуры $\mathfrak{M}$, изоморфные $\mathfrak{N}$, и исследует их алгоритмические свойства. Например, в теореме 3 указаны некоторые оценки на сложность (единственного) изоморфизма $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, при условии что операция $\min(x, y)$ вычислима за полиномиальное время, и выполняются ещё некоторые дополнительные предположения. Здесь элементы $x \in \mathfrak{N}$ отождествляются с их стандартными бинарными представлениями $\mathrm{bin}(x) \in \{0, 1\}^*$.

В теореме 1 при некоторых предположениях о $\mathfrak{M}$ даётся оценка на сложность вычисления операций $x \dot{-} y$ и $\lfloor x/y \rfloor$. В предположении, что $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, эти оценки дают полиномиальное время работы. Это означает, что мы не можем построить соответствующий контрпример, не опровергнув равенство $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Хотя доказательства представленных теорем не особенно сложны, а сама статья невелика, полученные результаты представляют несомненный интерес, и статья вполне может быть опубликована в журнале «Сибирские электронные математические известия».

Вместе с тем, у рецензента есть некоторый список замечаний к тексту, которые необходимо учесть перед публикацией статьи.

## Список замечаний

Стр. 146, Теорема 1. Здесь автор использует не совсем естественное условие, что $\min(x, y)$ может быть вычислено по слову $\max(x, y)$ за полиномиальное время. Нетрудно проверить, что это замысловатое условие равносильно выполнению следующих двух условий:

1) $\min(x, y)$ вычислимо за полиномиальное время в обычном смысле;

2) $l(x) \leqslant P(l(y))$ при любых $x, y \in \mathfrak{M}$, $x \leqslant y$, где $P(t) \in \mathbb{N}[t]$ — полином с натуральными коэффициентами.

Возможно, такая форма записи выглядела бы более естественно. Рецензент не настаивает на этом замечании, оставляя вопрос на усмотрение автора.

Стр. 146, Теорема 1. Кажется, в доказательстве этой теоремы никак не используется условие, что носитель структуры $\mathfrak{M}$ равен $\mathrm{Bin}(\omega)$. Она верна для произвольной структуры, носитель которой является P-вычислимым множеством слов $M \subseteq \{0, 1\}^*$. Это означает, что теорема 1 может быть сформулирована в более сильной форме, чем это указано в статье. То же самое касается теоремы 2.

Стр. 147, доказательство теоремы 1. Хотя теорема кажется рецензенту вполне правдоподобной, её доказательство выглядит слишком кратким и не до конца понятным. В доказательстве упоминается «exhaustive search», т.е. полный перебор. Но число элементов в множестве $S$ оценивается экспонентой от $l(x)$, и их невозможно перебрать за полиномиальное время. С другой стороны, автор упоминает про оракул, но из текста невозможно понять, с какими запросами алгоритм обращается к оракулу.

Рецензент просит автора подробнее описать доказательство теоремы, и в частности указать, как именно выглядят запросы к оракулу.

Стр. 148, 5 строка снизу. Вероятно, здесь должна быть указана теорема 3 вместо теоремы 1. То же самое касается стр. 149, 13 строки сверху.

Рецензент

31.10.24