S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 1118–1131 (2024) УДК 512.54.01
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.073 MSC 20F05

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТКИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А.И. Будкин, С.А. Шахова

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: Let p be a prime number. Denote by $\mathfrak{R}_{\delta,\lambda}$ the non-abelian variety of nilpotent groups of class at most 2 of exponent p^δ with commutator subgroup of exponent p^λ; by F_2 the free group of rank 2 in $\mathfrak{R}_{\delta,\lambda}$; by qH the quasivariety of groups generated by a group H. It is proved that the interval $[qF_2, qG]$ is continual if all the following conditions are true: $G \in \mathfrak{R}_{\delta,\lambda}$, G is a finite group defined in $\mathfrak{R}_{\delta,\lambda}$ by commutator defining relations, $qF_2 \subsetneq qG$.

Keywords: lattice, quasivariety, nilpotent group.

1 Введение

В [1] М.И. Каргаполов поставил проблему (вопрос 4.31): описать решётку квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп. Оказалось, что эта решётка, как и решётки квазимногообразий других универсальных алгебр (см., например, [2, 3, 4, 5], и параграфы 5.4, 5.6 в [6]) имеет довольно сложное строение.

Пусть $\mathcal{N}_2$ — многообразие нильпотентных ступени не выше двух групп; $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порождённое классом групп $\mathcal{K}$ (при $\mathcal{K} = \{G\}$ будем писать qG вместо $q\{G\}$); $L_q(\mathcal{N})$ — решётка квазимногообразий,

Budkin, A.I., Shakhova, S.A., On the complexity of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups.

Поступила 29 января 2024 г., опубликована 25 ноября 2024 г.

содержащихся в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$; $F_2(\mathcal{N})$ — свободная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа ранга 2.

Согласно [7], в случае конечной группы $G \in \mathcal{N}_2$ решётка $L_q(qG)$ конечна в том, и только в том случае, когда квазимногообразие qG порождается конечным набором групп из некоторого списка, и континуальна — в противном случае. В [8] доказано, что решётка $L_q(\mathcal{N})$ имеет мощность континуума для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$ нильпотентных ступени не выше двух групп без кручения, удовлетворяющего условию $qF_2(\mathcal{N}_2) \subsetneq \mathcal{N}$. Основные методы, идеи и результаты работ [7, 8] были использованы в [9], где найдены необходимое и достаточное условия конечности решётки $L_q(qG)$ для произвольной конечно порождённой группы $G \in \mathcal{N}_2$: решётка $L_q(qG)$ конечна тогда и только тогда, когда квазимногообразие $qG = q\mathcal{K}$ для некоторого конечного подмножества групп $\mathcal{K}$ из приведённого списка групп. Кроме того, в этой работе доказано, что если решётка $L_q(qG)$ не является конечной, то она имеет мощность континуума. Необходимые и достаточные условия конечности и счётности решётки $L_q(\mathcal{N})$ для произвольного квазимногообразия $\mathcal{N}$ нильпотентных ступени не выше двух групп приведены в [10].

Отметим работы [11, 12], в которых получены теоремы, характеризующие сложность решёток $L_q(\mathcal{R}_{p^k})$ многообразия $\mathcal{R}_{p^k}$ нильпотентных ступени не выше двух групп экспоненты p^k с коммутантом экспоненты p (p — простое число, $k \geq 2$) и квазимногообразия нильпотентных ступени не выше двух групп без кручения соответственно. В [11] показано, что существует бесконечное множество квазимногообразий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$, порождённых конечной группой и таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$, интервал $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ в решётке квазимногообразий континуален. В частности, континуален интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{p^k}), \mathcal{N}]$ для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $qF_2(\mathcal{R}_{p^k}) \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$. В [12] установлено, что существует бесконечное множество квазимногообразий $\mathcal{M}$ 2-ступенно нильпотентных групп без кручения, порождённых конечно порождённой группой, таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$ 2-ступенно нильпотентных групп без кручения ($\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$) интервал $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ в решётке квазимногообразий континуален.

Пусть $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ — многообразие нильпотентных ступени не выше двух групп экспоненты p^δ с коммутантом экспоненты p^λ, p — простое число, δ, λ — натуральные числа, $\delta \geq \lambda \geq 2$, и $\delta > \lambda$ при $p = 2$. В настоящей работе доказано, что если $G \in \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, G — конечная группа, заданная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями, $qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}) \subsetneq qG$, то интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}), qG]$ в решётке $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ имеет мощность континуума.

2 Предварительные замечания

Используемые в работе сведения из теории групп можно найти в [13], а из теории квазимногообразий групп — в [6, 14, 15].

Всюду в работе p — простое число, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Для $a, b \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{N}$ запись $a \equiv b(c)$ означает, что остаток от деления разности $a - b$ на c равен 0. В работе также используются следующие обозначения: $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$; $\langle a_1, a_2, ...\rangle$ — группа, порождённая элементами $a_1, a_2, ...$; Z_n — циклическая группа порядка n; $|g|$ — порядок элемента g; $G^{'}$ — коммутант группы G; $Z(G)$ — центр группы G; $G \cong H$ — группы G и H изоморфны. Через G/N обозначим фактор-группу группы G по нормальной подгруппе N, а через $\overline{g}$ — образ элемента $g \in G$ при естественном гомоморфизме $G \to G/N$.

Через $A \times B$ будем обозначать прямое произведение групп A и B. Пусть $a \in Z(A)$, $B = \langle b\rangle$, $|a| = |b^k|$. Через $A \times \langle b\rangle(a = b^k)$ будем обозначать прямое произведение групп A и $\langle b\rangle$ с объединённой подгруппой, т.е.

$$A \times \langle b\rangle(a = b^k) = (A \times \langle b\rangle)/\langle a^{-1}b^k\rangle.$$

Нам потребуется признак принадлежности конечно определённой группы G квазимногообразию $q\mathcal{K}$ (частный случай теоремы 3 [16]):

конечно определённая в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g^{\varphi} \neq 1$.

Будем пользоваться следующей теоремой Дика (см. [14], гл. 5, § 11, теор. 5; [15], теор. 2.2.23).

Пусть группа G имеет в квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление $G = \langle\{x_i \mid i \in I\};\ \{r_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k(j)}}) = 1 \mid j \in J\}\rangle$. Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \ldots, g_{j_{k(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i (i \in I)$ продолжаемо до гомоморфизма G в H.

В работе также используется следующая теорема Ремака (см. [13], теор. 4.3.9.)

Пусть в группе G задано семейство нормальных подгрупп H_i, $i \in I$, и H — их пересечение. Тогда фактор-группа G/H изоморфна некоторому поддекартову произведению фактор-групп G/H_i.

Условимся при написании тождеств кванторы всеобщности опускать.

Обозначим через $\mathcal{N}_2$ — многообразие нильпотентных ступени не выше двух групп, которое в классе всех групп задаётся тождеством

$$[x, y, z] = 1.$$

В многообразии $\mathcal{N}_2$ истинны тождества

$$[x, yz] = [x, y][x, z],\ \ [xy, z] = [x, z][y, z],$$

а также следующие тождества, истинные для любого $n \in \mathbf{Z}$:

$$[x, y^n] = [x, y]^n, \ [x^n, y] = [x, y]^n.$$

Индукцией по n можно показать, что в $\mathcal{N}_2$ для любого $n \in \mathbf{N}$ истинно тождество

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{1}$$

Пусть $\delta, \lambda \in \mathbf{N}$, $\delta \geq \lambda \geq 2$, и $\delta > \lambda$ при $p = 2$. Обозначим через $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ — многообразие, заданное в $\mathcal{N}_2$ тождествами

$$x^{p^\delta} = 1,$$

$$[x, y]^{p^\lambda} = 1. \tag{2}$$

Всюду в работе F_n — свободная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ группа ранга n с множеством свободных порождающих $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

3 Основной результат

Рассмотрим произвольную конечно порождённую группу $G \in \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, заданную в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями (т.е. все определяющие соотношения группы G в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ — коммутаторные слова), удовлетворяющую условию $qF_2 \subsetneq qG$.

Наша цель — показать, что интервал $[qF_2, qG]$ решётки квазимногообразий, содержащихся в многообразии $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, имеет мощность континуума.

Пусть G_0 — конечно порождённая группа, удовлетворяющая условию $qF_2 \subsetneq qG_0 \subseteq qG$, заданная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ минимально возможным числом коммутаторных определяюших соотношений:

$$G_0 = \langle x_1, \ldots, x_n; \ r_1 = 1, \ r_2 = 1, \ldots, \ r_l = 1 \rangle,$$

где $r_1, \ldots, r_l$ — элементы коммутанта свободной группы.

Выберем наибольшее t $(0 \leq t < \lambda)$ такое, что p^t делит показатели степеней всех коммутаторов в записи элементов $r_1, \ldots, r_l$. Не нарушая общности, можно считать, что $r_1 = [x_1, x_2]^{p^t} \tilde{r}$, и коммутатор $[x_1, x_2]$ не входит в запись $\tilde{r}, r_2, \ldots, r_l$. Для каждого $i = 1, \ldots, \lambda - t$ рассмотрим группу

$$G_i = \langle x_1, \ldots, x_n; \ r_1^{p^i} = 1, \ r_2 = 1, \ldots, \ r_l = 1 \rangle$$

и проведём следующие рассуждения. Отображение φ порождающих группы G_i в группу G_{i-1}, при котором $x_j^\varphi = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, продолжаемо по теореме Дика до гомоморфизма $\varphi : G_i \to G_{i-1}$, причём $\ker \varphi = \langle r_1^{p^{i-1}} \rangle$. Отображение ψ порождающих группы G_i в группу F_2, при котором $x_1^\psi = y_1$, $x_2^\psi = y_2^{p^{\lambda-t-i}}$, а остальные порождающие отображаются в 1, продолжаемо по теореме Дика до гомоморфизма $\psi : G_i \to F_2$. Поскольку $(r_1^{p^{i-1}})^\psi = [y_1, y_2]^{p^{i-1} p^{\lambda-t-i} p^t} = [y_1, y_2]^{\lambda-1} \neq 1$, то $\ker \varphi \cap \ker \psi = \langle 1 \rangle$, и по теореме Ремака

$$G_i \leq G_i / \ker \varphi \times G_i / \ker \psi \leq G_{i-1} \times F_2 \in qG_{i-1}.$$

Таким образом, имеют место включения

$$qF_2 \subseteq qG_{\lambda-t} \subseteq \ldots \subseteq qG_i \subseteq qG_{i-1} \subseteq \ldots \subseteq qG_0 \subseteq qG.$$

Заметим, что в группе $G_{\lambda-t}$ определяющее соотношение $r_1^{p^{\lambda-t}} = 1$ будет иметь вид $r_1^{p^{\lambda-t}} = \left([x_1,x_2]^{p^t}\tilde{r}\right)^{p^{\lambda-t}} = \left([x_1,x_2]\tilde{\tilde{r}}\right)^{p^\lambda} = 1$, т.е. это соотношение является следствием тождества (2). Значит группа $G_{\lambda-t}$ может быть задана в многообразии $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ меньшим, чем l, числом коммутаторных определяющих соотношений:

$$G_{\lambda-t} = \langle x_1,\ldots,x_n;\ r_2 = 1,\ldots,\ r_l = 1\rangle.$$

Из выбора G_0 вытекает, что $qG_{\lambda-t} = qF_2$. Зафиксируем индекс k такой, что $qF_2 \subsetneq qG_k$, $qG_{k+1} = qF_2$. Для достижения поставленной цели достаточно показать, что интервал $[qF_2, qG_k]$ решётки $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ имеет мощность континуума. В дальнейших рассуждениях группу G_k будем обозначать через G. Будем считать, что $qF_2 \subsetneq qG$, а группы G и $\widehat{G}$ заданы в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ следующим образом:

$$G = \langle x_1,\ldots,x_n;\ r_1 = 1,\ r_2 = 1,\ldots,\ r_l = 1\rangle,$$

$$\widehat{G} = \langle x_1,\ldots,x_n;\ r_1^p = 1,\ r_2 = 1,\ldots,\ r_l = 1\rangle,$$

$r_1,\ldots,r_l$ — элементы коммутанта свободной группы, $r_1 = [x_1,x_2]^{p^t}\tilde{r}$, и коммутатор $[x_1,x_2]$ не входит в запись $\tilde{r}, r_2,\ldots,r_l$. Кроме того, будем пользоваться тем, что $qF_2 = q\widehat{G}$, а для любой конечно порождённой группы H, заданной в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями, число которых меньше l, из $qF_2 \subseteq qH \subseteq qG$ следует $qF_2 = qH$.

Поскольку $G \notin qF_2$, $G/G' \in qF_2$, то по признаку принадлежности найдётся элемент $v \in G'$ такой, что $v^\varphi = 1$ для любого гомоморфизма $\varphi : G \to F_2$. Если в записи v коммутатор $[x_1,x_2]$ присутствует в ненулевой степени, то можно считать, что $v = [x_1,x_2]^{p^s}\tilde{v}$, $[x_1,x_2]$ не входит в запись $\tilde{v}$. Отображение ψ порождающих группы G в группу F_2, при котором $x_1^\psi = y_1$, $x_2^\psi = y_2^{p^{\lambda-t}}$, а образы остальных порождающих равны 1, продолжаемо по теореме Дика до гомоморфизма $\psi : G \to F_2$. При этом $v^\psi = [y_1,y_2]^{p^{\lambda-t+s}}$. Если $s < t$, то $v^\psi \neq 1$, что противоречит выбору v. Значит $s \geq t$. Поскольку $r_1 = [x_1,x_2]^{p^t}\tilde{r} = 1$, то, используя это определяющее соотношение, можно удалить $[x_1,x_2]$ из записи v. Итак, будем считать, что в записи элемента v отсутствует коммутатор $[x_1,x_2]$, а элемент v записан в виде

$$v = \prod_{i=1}^{q}[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}]^{\delta_i},\ \delta_i \in \mathbf{Z},\ i = 1,\ldots,q. \tag{3}$$

Во всех группах элемент $\prod\limits_{i=1}^{q}[x_{h(i)}, x_{h(i+q)}]^{\delta_i}$ будем обозначать через v.

Пусть $A, B \in \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$. Обозначим через $A*B$ — свободное в многообразии $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ произведение групп A и B; $[A,B] = \langle\{[a,b] \mid a \in A, b \in B\}\rangle$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, $qF_2 \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, $A,\ B \in \mathcal{M}$, группы $A,\ B$ в порождающих $a_1,\dots,a_k$ и $b_1,\dots,b_m$ соответственно заданы в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями. Если N — подгруппа группы $A*B$, порождённая некоторыми коммутаторами вида $[a_i,b_j]$ (N может быть единичной подгруппой), то $(A*B)/N \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Поскольку $(A*B)/[A,B] \cong A\times B \in \mathcal{M}$, то по признаку принадлежности достаточно для любого $g \in [A,B]\setminus N$ построить гомоморфизм $\varphi : (A*B)/N \to F_2$ такой, что $(gN)^\varphi \neq 1$.

Пусть коммутатор $[a_{i_0},b_{j_0}] \notin N$. По теореме Дика отображение φ, при котором $(a_{i_0}N)^\varphi = y_1$, $(b_{j_0}N)^\varphi = y_2$, $(a_iN)^\varphi = 1$, $(b_jN)^\varphi = 1$, для всех $i \neq i_0$, $j \neq j_0$, продолжаемо до гомоморфизма φ группы $(A*B)/N$ в группу F_2. Ясно, что $(gN)^\varphi \neq 1$ для любого элемента $g \in [A,B]\setminus N$, в запись которого коммутатор $[a_{i_0},b_{j_0}]$ входит в степени, не сравнимой с 0 по модулю p^λ. $\square$

Рассмотрим группу A_{rm}, заданную в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ следующими порождающими и определяющими соотношениями:

$$A_{rm} = \langle \{b_{i1}, b_{i2}, a_{ij} \mid i=1,\dots,2r; j=1,\dots,2m\};$$
$$[b_{11},b_{12}]\prod_{j=1}^{m}[a_{1j},a_{1,j+m}] = \ldots = [b_{2r,1},b_{2r,2}]\prod_{j=1}^{m}[a_{2r,j},a_{2r,j+m}],$$
$$[a_{ij},a_{ks}] = 1,\ \text{для всех } i\neq k, 1\le j,s\le 2m\rangle.$$

Обозначив $c_i = [b_{i1},b_{i2}]\prod\limits_{j=1}^{m}[a_{ij},a_{i,j+m}]$, $i=1,\dots,2r$, получим равенства $c_1 = c_2 = \ldots = c_{2r}$ в группе A_{rm}.

Группы с таким же представлением относительно других квазимногообразий рассматривались в [7, 8, 9, 11].

Лемма 2. *Группы A_{rm}, $A_{rm}/\langle c_1\rangle$, $A_{rm}/\langle c_1^{p^k}\rangle$, $k=1,\dots,\lambda-1$, принадлежат qF_2.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого $i=1,\dots,2r$ группу $T_{i,m}$, имеющую в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ представление

$$T_{i,m} = \langle \{b_{i1},b_{i2},a_{ij} \mid j=1,\dots,2m\}; [b_{i1},b_{i2}]\prod_{j=1}^{m}[a_{ij},a_{i,j+m}] = 1\rangle.$$

Эти группы изучались в [15] (теорема 4.2.13), в [7] в $\mathcal{R}_{1,1}$ при $p\neq 2$.

Индукцией по m докажем, что $T_{i,m} \in qF_2$. Поскольку

$$T_{i,1} = \langle \{b_{i1},b_{i2},a_{i1},a_{i2}\}; [b_{i1},b_{i2}][a_{i1},a_{i,2}] = 1\rangle,$$

то $T_{i,1}/\langle [a_{i1},a_{i,2}]\rangle$ — свободное произведение абелевых групп из многообразия $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$. По лемме 1 $T_{i,1}/\langle [a_{i1},a_{i,2}]\rangle \in qF_2$. Отображение φ порождающих группы $T_{i,1}$ в группу F_2, при котором $b_{i1}^\varphi = y_1$, $b_{i2}^\varphi = y_2$, $a_{i1}^\varphi = y_2$,

$a_{i2}^{\varphi} = y_1$, продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : T_{i,1} \to F_2$. Поскольку $\ker\varphi \cap \langle [a_{i1}, a_{i,2}] \rangle = \langle 1 \rangle$, то по признаку принадлежности $T_{i,1} \in qF_2$.

Предположим, что $T_{i,m-1} \in qF_2$. По лемме 1

$$T_{i,m}/\langle [a_{im}, a_{i,2m}] \rangle \cong T_{i,m-1} * (Z_{p^\delta} \times Z_{p^\delta}) \in qF_2.$$

Отображение φ порождающих группы $T_{i,m}$ в группу F_2, при котором $b_{i1}^{\varphi} = y_1$, $b_{i2}^{\varphi} = y_2$, $a_{im}^{\varphi} = y_2$, $a_{i,2m}^{\varphi} = y_1$, $a_{i,j}^{\varphi} = 1$ при $j \notin \{m, 2m\}$, продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : T_{i,m} \to F_2$. Поскольку $\ker\varphi \cap \langle [a_{im}, a_{i,2m}] \rangle = \langle 1 \rangle$, то по признаку принадлежности $T_{i,m} \in qF_2$.

Группу $A_{rm}/\langle c_1 \rangle$ можно собрать из групп $T_{i,m}$ при помощи конструкции из леммы 1. Поэтому $A_{rm}/\langle c_1 \rangle \in qF_2$.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A_{rm} \to F_2$, при котором $b_{i1}^{\varphi} = y_1$, $b_{i2}^{\varphi} = y_2$, для $i = 1, \ldots, 2r$, а образы остальных порождающих равны 1. Так как $\ker\varphi \cap \langle c_1 \rangle = \langle 1 \rangle$, то по теореме Ремака $A_{rm} \leq \Big(A_{rm}/\langle c_1 \rangle \Big) \times F_2 \in qF_2$.

Для $k \in \{1, \ldots, \lambda - 1\}$ гомоморфизм $\varphi_k : A_{rm} \to F_2$, при котором $b_{i1}^{\varphi_k} = y_1^{p^{\lambda-k}}$, $b_{i2}^{\varphi_k} = y_2$, $i = 1, \ldots, 2r$, а образы остальных порождающих равны 1, удовлетворяет условию $\ker\varphi_k \cap \langle c_1 \rangle = \langle c_1^{p^k} \rangle$. Значит для любого $k \in \{1, \ldots, \lambda - 1\}$ верно $A_{rm}/\langle c_1^{p^k} \rangle \in qF_2$. $\square$

Лемма 3. *Если* $f, g, h \in F_2$, $[g, f] = 1$, $[g, h] = 1$, $g^{p^{\lambda-1}} \notin Z(F_2)$, *то* $[f, h] = 1$.

Доказательство. Пусть $g = y_1^k y_2^s \gamma$, $f = y_1^{k_1} y_2^{s_1} \gamma_1$, $h = y_1^{k_2} y_2^{s_2} \gamma_2$, где $k, k_1, k_2, s, s_1, s_2 \in \mathbf{Z}$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in F_2'$. По формуле (1)

$$g^{p^{\lambda-1}} = y_1^{kp^{\lambda-1}} y_2^{sp^{\lambda-1}} [y_2, y_1]^{\frac{p^{\lambda-1}(p^{\lambda-1}-1)}{2} ks} \gamma^{p^{\lambda-1}}.$$

Заметим, что если $k \equiv 0(p)$ и $s \equiv 0(p)$, то $g^{p^{\lambda-1}} \in Z(F_2)$, что противоречит условию леммы. Следовательно, $k \not\equiv 0(p)$ или $s \not\equiv 0(p)$.

Поскольку $[g, f] = 1$, $[g, h] = 1$, то $ks_1 - k_1 s \equiv 0(p^\lambda)$, $ks_2 - k_2 s \equiv 0(p^\lambda)$, $k(k_1 s_2 - k_2 s_1) \equiv k_1 s k_2 - k_2 s k_1 \equiv 0(p^\lambda)$, $s(k_1 s_2 - k_2 s_1) \equiv s_2 k s_1 - s_1 k s_2 \equiv 0(p^\lambda)$, то $k_1 s_2 - k_2 s_1 \equiv 0(p^\lambda)$, и $[f, h] = 1$. $\square$

Рассмотрим группу H_{rm}, заданную в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ следующими порождающими и определяющими соотношениями:

$$H_{rm} = \langle \{b_{i1}, b_{i2}, a_{ij}, x_1, \ldots, x_n \mid i = 1, \ldots, 2r; j = 1, \ldots, 2m\};$$
$$[b_{11}, b_{12}] \prod_{j=1}^{m} [a_{1j}, a_{1,j+m}] = \ldots = [b_{2r,1}, b_{2r,2}] \prod_{j=1}^{m} [a_{2r,j}, a_{2r,j+m}],$$
$$[a_{ij}, a_{ks}] = 1, \text{ для всех } i \neq k, 1 \leq j, s \leq 2m,$$
$$r_1 c_1^{p^{\lambda-1}} = 1, r_2 = 1, \ldots, r_l = 1,$$
$$[x_{h(i)}, b_{j1}] = [x_{h(i+q)}, b_{j1}] = 1, i = 1, \ldots, q, i \equiv j(q) \rangle,$$

где $c_1 = [b_{11}, b_{12}] \prod\limits_{j=1}^{m} [a_{1j}, a_{1,j+m}]$.

Лемма 4. *Пусть $r \geq q$. При любых гомоморфизмах $\varphi : H_{rm} \to F_2$, $\psi : H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \to F_2$ верны равенства $v^\varphi = v^\psi = 1$, где $v = \prod\limits_{i=1}^{q} [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}]^{\delta_i}$. В частности, $H_{rm} \notin qF_2$, $H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \notin qF_2$.*

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi : H_{rm} \to H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle$. Ясно, что

$$H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \cong \big(G * \big(A_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle\big)\big)/N,$$

где $N = \langle \{[x_{h(i)}, b_{j1}], [x_{h(i+q)}, b_{j1}] \mid i = 1, \dots, q, i \equiv j(q)\} \rangle$. Легко видеть, что $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\varphi \cong G$, $v^\varphi \neq 1$, где

$$v = \prod_{i=1}^{q} [x_{h(i)}, x_{h(i+q)}]^{\delta_i}$$

— коммутаторное слово от переменных $x_1, \dots, x_n$, представленное в (3).

Если $H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \in qF_2$, то по признаку принадлежности существует гомоморфизм $\psi : H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \to F_2$ такой, что $v^{\varphi\psi} \neq 1$. Это противоречит выбору элемента v в G. Следовательно, $H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \notin qF_2$.

Предположим, что $H_{rm} \in qF_2$. Значит по признаку принадлежности существует гомоморфизм $\xi : H_{rm} \to F_2$, при котором $v^\xi \neq 1$. Можно считать, что $[x_{h(1)}, x_{h(1+q)}]^\xi \neq 1$. Если $(b_{11}^\xi)^{p^{\lambda-1}} \notin Z(F_2)$, то из $[x_{h(1)}^\xi, b_{11}^\xi] = [x_{h(1+q)}^\xi, b_{11}^\xi] = 1$ по лемме 3 получаем, что $[x_{h(1)}, x_{h(1+q)}]^\xi = 1$. Следовательно, $(b_{11}^\xi)^{p^{\lambda-1}} \in Z(F_2)$.

Аналогично доказывается, что $(b_{1+q,1}^\xi)^{p^{\lambda-1}} \in Z(F_2)$. Тогда

$$(c_1^{p^{\lambda-1}})^\xi = \prod_{j=1}^{m} [a_{1j}^\xi, a_{1,j+m}^\xi]^{p^{\lambda-1}} = \prod_{j=1}^{m} [a_{1+q,j}^\xi, a_{1+q,j+m}^\xi]^{p^{\lambda-1}}.$$

Если $(a_{1i}^\xi)^{p^{\lambda-1}} \notin Z(F_2)$ для некоторого i, то из леммы 3 следует, что

$$\prod_{j=1}^{m} [a_{1+q,j}^\xi, a_{1+q,j+m}^\xi] = 1.$$

Значит $(c_1^{p^{\lambda-1}})^\xi = 1$, и существует гомоморфизм $\psi : H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}} \rangle \to F_2$ такой, что $v^{\varphi\psi} = v^\xi$. Как доказано выше, $v^{\varphi\psi} = 1$. Полученное противоречие означает, что $H_{rm} \notin qF_2$. □

Следствие 1. *Пусть $r \geq q$, $\varphi : H_{rm} \to R$ — гомоморфизм группы H_{rm} в произвольную группу $R \in qF_2$. Тогда $v^\varphi = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $v^\varphi \neq 1$ для некоторого гомоморфизма $\varphi : H_{rm} \to R$, где $R \in qF_2$. По признаку принадлежности существует гомоморфизм $\psi : H_{rm}^\varphi \to F_2$ такой, что $v^{\varphi\psi} \neq 1$, что противоречит лемме 4. □

Лемма 5. $H_{rm} \in qG$.

Доказательство. Поскольку $H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}}\rangle \cong \big(G * \big(A_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}}\rangle\big)\big)/N$, где $N = \langle\{[x_{h(i)}, b_{j1}], [x_{h(i+q)}, b_{j1}] \mid i = 1,\dots,q, i \equiv j(q)\}\rangle$, то из лемм 1, 2 следует, что $H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}}\rangle \in qG$.

Напомним, что $r_1 = [x_1, x_2]^{p^t}\tilde{r}$ и $[x_1, x_2]$ не входит в запись элементов $\tilde{r}, v, r_2, \dots, r_l$. Рассмотрим следующее отображение порождающих группы H_{rm} в группу F_2 :

$x_1^\varphi = y_1$, $x_2^\varphi = y_2^{p^{\lambda-t-1}}$, $x_i^\varphi = 1$, $i = 3,\dots,l$;

$a_{ij}^\varphi = 1$, $i = 1,\dots,2r$, $j = 1,\dots,2m$;

для $1 \le i \le q$:

если $x_{h(i)} = x_1$ или $x_{h(i+q)} = x_1$, то $b_{j,1}^\varphi = y_1$, $b_{j,2}^\varphi = y_2^{-1}$ для всех j таких, что $j \equiv i(q)$;

если $x_{h(i)} \ne x_1$ и $x_{h(i+q)} \ne x_1$, то $b_{j,1}^\varphi = y_2$, $b_{j,2}^\varphi = y_1$ для всех j таких, что $j \equiv i(q)$.

По теореме Дика данное отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi : H_{rm} \to F_2$. Так как $c_1^\varphi = [y_2, y_1]$, то $\ker\varphi \cap \langle c_1^{p^{\lambda-1}}\rangle = \langle 1\rangle$, и по теореме Ремака $H_{rm} \le \big(H_{rm}/\langle c_1^{p^{\lambda-1}}\rangle\big) \times F_2 \in qG$. □

Обозначим через B_{rm}, группу, заданную в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ следующими порождающими и определяющими соотношениями:

$$B_{rm} = \langle\{b_{i1}, b_{i2}, a_{ij}, x_1, \dots, x_n \mid i = 1,\dots,2r; j = 1,\dots,2m\};$$

$$[a_{ij}, a_{ks}] = 1, \text{ для всех } i \ne k, 1 \le j, s \le 2m,$$

$$r_1^p = 1, r_2 = 1, \dots, r_l = 1,$$

$$[x_{h(i)}, b_{j1}] = [x_{h(i+q)}, b_{j1}] = 1, i = 1,\dots,q, i \equiv j(q)\rangle.$$

Заметим, что $H_{rm} = B_{rm}/N_{rm}$, где $N_{rm} = \langle r_1 c_1^{p^{\lambda-1}}, c_1 c_2^{-1}, \dots, c_1 c_{2r}^{-1}\rangle$.

Лемма 6. $B_{rm} \in qF_2$.

Доказательство. Пусть $A_i = \langle b_{i1}, b_{i2}, a_{i1}, \dots, a_{i,2m}\rangle$ — свободная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ группа, $i = 1,\dots,2r$. Ясно, что $A_i \in qF_2$. Положим $\widehat{A}_1 = A_1$,

$$\widehat{A}_i = \widehat{A}_{i-1} * A_i/\langle\{[a_{ij}, a_{ks}]\} \mid k = 1,\dots,i-1; 1 \le j, s \le 2m\rangle.$$

Предположив, что $\widehat{A}_{i-1} \in qF_2$, получим по лемме 1, что $\widehat{A}_i \in qF_2$, $i = 2,\dots,2r$. Наконец, $B_{rm} = \big(\widehat{A}_{2r} * \widehat{G}\big)/N$, где $N = \langle\{[x_{h(i)}, b_{j1}], [x_{h(i+q)}, b_{j1}] \mid i = 1,\dots,q, i \equiv j(q)\}\rangle$, $\widehat{G} = \langle x_1,\dots,x_n;\ r_1^p = 1,\ r_2 = 1,\dots,\ r_l = 1\rangle$. Применяя лемму 1, получаем, что $B_{rm} \in qF_2$. □

Лемма 7. *Если* $k \ge C^2_{4\lambda s+2}$, *то элемент* $\prod_{i=1}^{k}[y_i, y_{i+k}]^{p^{\lambda-1}}$ *группы* F_{2k} *нельзя записать в виде произведения* s *коммутаторов.*

Доказательство. Предположим, что в F_{2k} верно равенство

$$\prod_{i=1}^{k}[y_i, y_{i+k}]^{p^{\lambda-1}} = \prod_{i=1}^{s}[g_i, g_{i+s}].$$

Следовательно, это равенство является тождеством в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$. Пусть $t = 4\lambda s + 2$. Ясно, что $\mid (F_t^{'})^{p^{\lambda-1}} \mid = p^{C_t^2}$. Согласно условию леммы $k \geq C_t^2$. Значит всякий элемент из $(F_t^{'})^{p^{\lambda-1}}$ есть произведение не больше, чем k коммутаторов. Поскольку $\mid F_t/(F_t^{'}F_t^{p^\lambda}) \mid = p^{\lambda t}$, то верны неравенства

$$|\{[a,b] \mid a,b \in F_t\}| \leq p^{2\lambda t}, |\{\prod_{i=1}^{s}[h_i, h_{i+s}] \mid h_i \in F_t\}| \leq p^{2\lambda ts}, |(F_t^{'})^{p^{\lambda-1}}| \leq p^{2\lambda ts}.$$

Отсюда $p^{C_t^2} = p^{\frac{t(t-1)}{2}} \leq p^{2\lambda ts}, t \leq 4\lambda s + 1$. Полученное противоречие означает, что утверждение леммы верно. □

Лемма 8. *Если $m \geq C^2_{4\lambda C_k^2+2}$, B — k-порождённая подгруппа группы B_{rm}, то $B^{'} \cap N_{rm} = \langle 1 \rangle$.*

Доказательство. Пусть $g \in B^{'} \cap N_{rm}$, $g \neq 1$. Так как B — k-порождённая подгруппа, то $B^{'}$ — s-порождённая подгруппа, $s = C_k^2$. Значит g можно записать в виде произведения s коммутаторов:

$$g = \prod_{i=1}^{s}[g_i, g_{i+s}].$$

С другой стороны, так как $g \in N_{rm}$, то g можно записать в виде

$$g = \left(r_1 c_1^{p^{\lambda-1}}\right)^{t_1} \prod_{i=2}^{2r}(c_1 c_i^{-1})^{t_i}.$$

Если $t_i \not\equiv 0(p^\lambda)$ для некоторого индекса i такого, что $i \geq 2$, то рассмотрим следующее отображение φ порождающих группы B_{rm} в группу F_{2m} : $a_{ij}^{\varphi} = y_j$, $j = 1, \ldots, 2m$, а остальные порождающие отображаются в 1. По теореме Дика это отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi : B_{rm} \to F_{2m}$. Получаем равенство

$$g^{\varphi} = \prod_{i=1}^{s}[g_i^{\varphi}, g_{i+s}^{\varphi}] = \left(\prod_{i=1}^{m}[y_i, y_{i+m}]\right)^{-t_i}.$$

Это противоречит лемме 7, согласно которой элемент $\prod\limits_{i=1}^{m}[y_i, y_{i+m}]^{p^{\lambda-1}}$ нельзя записать в виде произведения s коммутаторов. Значит $t_i \equiv 0(p^\lambda)$ для любого $i \geq 2$, и $g = \left(r_1 c_1^{p^{\lambda-1}}\right)^{t_1}$.

Так как $g \neq 1$, то $t_1 \not\equiv 0(p)$. Рассмотрим следующее отображение φ порождающих группы B_{rm} в группу F_{2m} : $a_{1j}^{\varphi} = y_j$, $j = 1, \ldots, 2m$, а остальные порождающие отображаются в 1. По теореме Дика это отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi : B_{rm} \to F_{2m}$. Получаем равенство

$$g^{\varphi} = \prod_{i=1}^{s} [g_i^{\varphi}, g_{i+s}^{\varphi}] = \Big(\prod_{i=1}^{m} [y_i, y_{i+m}]^{p^{\lambda-1}} \Big)^{t_1},$$

которое невозможно в силу леммы 7. Значит $g = 1$, и $B' \cap N_{rm} = \langle 1 \rangle$. $\square$

Лемма 9. *Если A — конечно порождённая группа, $A \in qF_2$, $a \in A'$, $|a| = p^{k-s}$, $1 \le k \le \lambda$, $0 \le s < k$, $\langle b \rangle \cong Z_{p^k}$, то*

$$H = A \times \langle b \rangle (a = b^{p^s}) \in qF_2.$$

Доказательство. Так как $H' = A'$, то $H/H' \cong A/A' \times Z_{p^s} \in qF_2$. Пусть $g \in H'$, $g \ne 1$. По признаку принадлежности существует гомоморфизм $\varphi : A \to F_2$ такой, что $g^{\varphi} \ne 1$. Пусть $\varphi(a) = [y_1, y_2]^{fp^u}$, где $0 \le u \le \lambda$, $(f, p) = 1$. Так как $\varphi(a^{p^{k-s}}) = 1 = [y_1, y_2]^{fp^u p^{k-s}}$, то $u \ge s$. Отображение ψ порождающих группы H в группу F_2, при котором $h^{\psi} = h^{\varphi}$ для каждого порождающего h группы A, $b^{\psi} = [y_1, y_2]^{fp^{u-s}}$, по теореме Дика продолжается до гомоморфизма ψ группы H в группу F_2. Причём $g^{\psi} = g^{\varphi} \ne 1$. По признаку принадлежности $H \in qF_2$. $\square$

Лемма 10. *Пусть A — k-порождённая подгруппа группы H_{rm}. Если $m \ge C^2_{4\lambda C_k^2+2}$, то $A \in qF_2$.*

Доказательство. Пусть A — k-порождённая подгруппа группы H_{rm}, и $\psi : H_{rm} \to H_{rm}/H'_{rm}$ — естественный гомоморфизм. Ясно, что

$$H_{rm}/H'_{rm} \cong Z_{p^{\delta}} \times \cdots \times Z_{p^{\delta}}, \ A^{\psi} \cong AH'_{rm}/H'_{rm} \cong Z_{p^{k_1}} \times \cdots \times Z_{p^{k_d}},$$

$0 < k_i \le \delta$, $i = 1, \ldots, d$, $d \le k$. Пусть H — максимальная d-порождённая подгруппа группы H_{rm}/H'_{rm}, содержащая A^{ψ}. Тогда $H \cong \langle \overline{a}_1 \rangle \times \cdots \times \langle \overline{a}_d \rangle$, $\langle \overline{a}_i \rangle \cong Z_{p^{\delta}}$, $\overline{a}_i = a_i H'_{rm} = a_i^{\psi}$, $i = 1, \ldots, d$. Обозначим $L = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$. Ясно, что $|a_i| = p^{\delta}$, $i = 1, \ldots, d$, $A \le LH'_{rm}$. Докажем, что $L \in qF_2$.

Согласно определению $H_{rm} \cong B_{rm}/N_{rm}$. Пусть B — прообраз L при естественном гомоморфизме $\varphi : B_{rm} \to B_{rm}/N_{rm}$, $B = \langle b_1, \ldots, b_d \rangle$, где $b_i^{\varphi} = a_i$, $|b_i| = p^{\delta}$, $i = 1, \ldots, d$.

Произвольный элемент $b \in B$ можно записать в виде $b = b_1^{t_1} \ldots b_d^{t_d} c$, где $c \in B'$. Тогда $b^{\varphi} = a_1^{t_1} \ldots a_d^{t_d} c^{\varphi}$. Если $b^{\varphi} = 1$, то $(a_1^{t_1} \ldots a_d^{t_d} c^{\varphi})^{\psi} = 1$. Значит $\overline{a}_1^{t_1} \ldots \overline{a}_d^{t_d} = \overline{1}$. Следовательно, $t_i \equiv 0 (p^{\delta})$, $i = 1, \ldots, d$. Отсюда $B \cap \ker \varphi \subseteq B'$, т.е. $B \cap N_{rm} \subseteq B'$. Таким образом, $B \cap N_{rm} \subseteq B' \cap N_{rm} = \langle 1 \rangle$ по лемме 8, и $B \cong L$. По лемме 6 $L \in qF_2$.

Покажем, что $LH'_{rm} \in qF_2$. Легко видеть, что $LH'_{rm} = L\langle d_1, \ldots, d_{\omega} \rangle$, где

$$H'_{rm}/L \cap H'_{rm} \cong \langle \overline{d}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \overline{d}_{\omega} \rangle, \overline{d}_i = d_i (L \cap H'_{rm}), d_i \in H'_{rm}, i = 1, \ldots, \omega.$$

Будем использовать следующие обозначения: $L_0 = L$, $L_i = L_{i-1}\langle d_i \rangle = L\langle d_1, \ldots, d_i \rangle$, $i = 1, \ldots, \omega$. Предположим, что $L_{i_0} \in qF_2$, $d_{i_0+1} \notin L_{i_0}$.

Докажем, что $L_{i_0+1} \in qF_2$. Если $L_{i_0} \cap \langle d_{i_0+1}\rangle = \langle 1\rangle$, то $L_{i_0+1} = L_{i_0} \times \langle d_{i_0+1}\rangle \in qF_2$. Пусть $L_{i_0} \cap \langle d_{i_0+1}\rangle = \langle d_{i_0+1}^{p^s}\rangle$, $|d_{i_0+1}| = p^{k_0}$, где $1 \le k_0 \le \lambda$, $1 \le s < k_0$. Значит для некоторого $h \in L$ верно равенство $d_{i_0+1}^{p^s} = hd_1^{k_1}\dots d_{i_0}^{k_{i_0}}$. Следовательно, $\overline{d}_{i_0+1}^{p^s} = \overline{d}_1^{k_1}\dots\overline{d}_{i_0}^{k_{i_0}}$ в $H'_{rm}/L \cap H'_{rm}$. Отсюда $d_{i_0+1}^{p^s} \in L$, и $d_{i_0+1}^{p^s} = a_1^{l_1}\dots a_d^{l_d}a$, где $a \in L'$. Тогда $\overline{a}_1^{l_1}\dots\overline{a}_d^{l_d} = \overline{1}$ в H_{rm}/H'_{rm}, и $l_i \equiv 0(p^\delta)$, $i = 1,\dots,d$. Таким образом, $d_{i_0+1}^{p^s} = a$, где $a \in L'$. Поскольку $L' = L'_{i_0}$, то по лемме 9 $L_{i_0+1} = L_{i_0}\langle d_{i_0+1}\rangle = L_{i_0} \times \langle d_{i_0+1}\rangle (a = d_{i_0+1}^{p^s}) \in qF_2$. □

Лемма 11. *Пусть $\varphi : H_{rm} \to H_{xy}$ — гомоморфизм, $f = 2^{|H_{xy}|}$, $k = n + 4r(m+1)$, $s = n + 8q$. Если выполнено хотя бы одно из условий:*

1) $r \ge q$ и $y \ge C^2_{4\lambda C_k^2+2}$,

2) $2r \ge qf$ и $y \ge C^2_{4\lambda C_s^2+2}$,

то $v^\varphi = 1$.

Доказательство. Пусть $y \ge C^2_{4\lambda C_k^2+2}$. Поскольку H_{rm} — k-порождённая группа, то H_{rm}^φ — k-порождённая группа. Так как $H_{rm}^\varphi \le H_{xy}$, то по лемме 10 получаем, что $H_{rm}^\varphi \in qF_2$. По следствию 1 $v^\varphi = 1$.

Пусть $2r \ge qf$ и $y \ge C^2_{4\lambda C_s^2+2}$. Для каждого i такого, что $1 \le i \le fq$, рассмотрим подгруппы $B_i = \langle a_{i1},\dots,a_{i,2m}\rangle$ группы H_{rm}. Из определяющих соотношений группы H_{rm} вытекает, что $[B_i, B_j] = 1$ при $i \ne j$.

Зафиксируем произвольное t, удовлетворяющее неравенству $1 \le t \le q$. Согласно условию леммы среди подгрупп $B_t^\varphi, B_{t+q}^\varphi,\dots,B_{t+(f-1)q}^\varphi$ есть одинаковые: $B_{t+qi_t}^\varphi = B_{t+qj_t}^\varphi$ для некоторых i_t, j_t, $0 \le i_t < j_t \le f-1$. Значит $[B_{t+qi_t}^\varphi, B_{t+qi_t}^\varphi] = [B_{t+qi_t}^\varphi, B_{t+qj_t}^\varphi] = [B_{t+qi_t}, B_{t+qj_t}]^\varphi = 1$, т.е. $B_{t+qi_t}^\varphi$ — абелева группа. Отсюда вытекает, что верны следующие равенства:

$$c_1^\varphi = [b_{t+qi_t,1}^\varphi, b_{t+qi_t,2}^\varphi][a_{t+qi_t,1}^\varphi, a_{t+qi_t,1+m}^\varphi]\dots[a_{t+qi_t,m}^\varphi, a_{t+qi_t,2m}^\varphi] =$$
$$= [b_{t+qi_t,1}^\varphi, b_{t+qi_t,2}^\varphi].$$

Поскольку $[x_{h(t)}, b_{t+qi_t,1}] = [x_{h(t+q)}, b_{t+qi_t,1}] = 1$, то верно равенство $[x_{h(t)}^\varphi, b_{t+qi_t,1}^\varphi] = [x_{h(t+q)}^\varphi, b_{t+qi_t,1}^\varphi] = 1$.

Рассмотрим отображение ψ порождающих группы H_{q1} в группу H_{xy}, заданное так:

$$b_{t,1}^\psi = b_{t+q,1}^\psi = b_{t+qi_t,1}^\varphi,\ b_{t,2}^\psi = b_{t+q,2}^\psi = b_{t+qi_t,2}^\varphi,\ t = 1,\dots,q;$$

$$a_{ij}^\psi = 1, i = 1,\dots,2q,\ j = 1,2; x_i^\psi = x_i^\varphi, i = 1,\dots,n.$$

По теореме Дика это отображение продолжается до гомоморфизма $\psi : H_{q1} \to H_{xy}$. При этом верно равенство $v^\psi = v^\varphi$.

Поскольку группа H_{q1} порождается s элементами, то H_{q1}^ψ также порождается s элементами. Так как $H_{q1}^\psi \le H_{xy}$, то по лемме 10 $H_{q1}^\psi \in qF_2$. По следствию 1 $v^\psi = 1$. Значит и $v^\varphi = 1$. □

Теорема 1. *Если* $qF_2 \subsetneq qG \subseteq \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, G *— конечная группа, заданная в* $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ *коммутаторными определяющими соотношениями, то интервал* $[qF_2, qG]$ *решётки квазимногообразий групп континуален.*

Доказательство. Пусть $H_1 = H_{x_1 y_1}$ — произвольная группа из множества групп $\mathcal{K}$, состоящего из всех групп H_{xy}, удовлетворяющих следующим условиям: $x \geq q, y \geq C^2_{4\lambda C^2_{n+8q}+2}$. Предположим, что из множества $\mathcal{K}$ выбраны такие группы $H_i = H_{x_i y_i}$ для $i = 1, \ldots, k$, что при $i \neq j$ для произвольного гомоморфизма $\varphi : H_i \to H_j$ выполнено $v^\varphi = 1$.

Рассмотрим группу H_{rm} из множества $\mathcal{K}$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $m \geq C^2_{4\lambda C^2_{s_i}+2}$, для любого $i = 1, \ldots, k$, где $s_i = n + 4x_i(y_i + 1)$;

b) $2r \geq qf_i$, для любого $i = 1, \ldots, k$, где $f_i = 2^{|H_i|}$.

Поскольку условие a) выполнено, то в силу пункта 1) леммы 11 для любого $i = 1, \ldots, k$, при произвольном гомоморфизме $\varphi : H_i \to H_{rm}$ выполнено $v^\varphi = 1$. Выполнение условия b) гарантирует по пункту 2) леммы 11, что для любого $i = 1, \ldots, k$, при произвольном гомоморфизме $\varphi : H_{rm} \to H_i$ выполнено $v^\varphi = 1$.

Положим $H_{k+1} = H_{rm}$. Нам удалось выбрать из множества $\mathcal{K}$ такие группы H_i для $i = 1, \ldots, k + 1$, что при $i \neq j$ для произвольного гомоморфизма $\varphi : H_i \to H_j$ выполнено $v^\varphi = 1$.

Итак, построена счётная последовательность групп $H_1, H_2, \ldots$, каждая из которых по лемме 5 порождает квазимногообразие из интервала $[qF_2, qG]$, причём, если $j \notin I$, то $H_j \notin \mathcal{K}_I = q\{H_i \mid i \in I\}$. Значит квазимногообразия $\mathcal{K}_I$ различны при разных I, что доказывает теорему. $\square$

Отметим, что при $\lambda = 1$ теорема 1 также верна, являясь следствием теоремы 2 из [11].

References

[1] *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.*, Edited by E.I. Khukhro and V.D. Mazurov, Sobolev Institut of Mathematics, Novosibirsk, 2022.

[2] A.V. Kravchenko, A.M. Nurakunov, M.V. Schwidefsky, *Structure of quasivariety lattices. I: Independent axiomatizability*, Algebra Logic, **57**:6 (2019), 445–462. Zbl 1439.08008

[3] A.V. Kravchenko, A.M. Nurakunov, M.V. Schwidefsky, *Structure of quasivariety lattices. II: Undecidable problems*, Algebra Logic, **58**:2 (2019), 123–136. Zbl 1444.08005

[4] A.V. Kravchenko, A.M. Nurakunov, M.V. Schwidefsky, *Structure of quasivariety lattices. III: Finitely partitionable bases*, Algebra Logic, **59**:3 (2020), 222–229. Zbl 1484.08016

[5] M. V. Schwidefsky, *On sufficient conditions for Q-universality*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **17** (2020), 1043–1051. Zbl 1443.08006

[6] V.A. Gorbunov, *Algebraic theory of quasivarieties*, Nauch. Kniga, Novosibirsk, 1999. Zbl 0986.08002

[7] A.N. Fyodorov, *Quasi-identities of finite 2-nilpotent groups*, VINITI, No. 5489-B87, Moscow, 1987.
[8] A.I. Budkin, *A lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra Logic, **33**:1 (1994), 14—21. Zbl 0823.20025
[9] S.A. Shakhova, *On the lattice of quasivarieties of nilpotent groups of class 2*, Sib. Adv. Math., **7**:3 (1997), 98–125. Zbl 0917.20026
[10] S.A. Shakhova, *On a cardinality of the lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra Logic, **38**:3 (1999), 202—206. Zbl 0930.08005
[11] A.I. Budkin, *On the quasivarieties generated by a finite group and lacking any independent bases of quasi-identities*, Sib. Math. J., **61**:6 (2020), 983–993. Zbl 1498.20067
[12] A.I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of torsion-free nilpotent groups*, Algebra Logic, **60**:2 (2021), 79—88. Zbl 1515.08008
[13] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Springer-Verlag, NewYork etc., 1979. Zbl 0549.20001
[14] A.I.Mal'cev, *Algebraic systems*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1973. Zbl 0266.08001
[15] A.I. Budkin, *Quasivarieties of groups*, Altai State Univ., Barnaul, 2002.
[16] A.I. Budkin, V.A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra Logic, **14** (1975), 73—84. Zbl 0328.08006

Alexandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: budkin@math.asu.ru

Svetlana Aleksandrovna Shakhova
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: ssa@math.asu.ru