S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 512.552.4
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 16R10

ИДЕАЛ ТОЖДЕСТВ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО n-МЕРНЫМИ 2-АЛГЕБРАМИ

Е.П. Петров

Представлено Е.П. Петровым

Abstract: The ideal of identities of a variety generated by n-dimensional 2-algebras over a field is described (n is fixed).

Keywords: nilpotent algebra, variety, ideal of identities.

1 Введение

В 1982 г. Л.А. Бокутем в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). Ранее, в 1980 году С.А.Пихтильковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также доказано, что каждая n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:
$x_1x_2\ldots x_{n-2} = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n-2)},\ \sigma \in S_{n-2},\ n \geq 6;\ [x_1, x_2, \ldots, x_k] = 0$, где $k = [\frac{n+1}{2}] + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии* $\mathfrak{M}_n$*?*

Petrov, E.P., Ideal of identities of a variety generated by n-dimensional 2-algebras.

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенно-свободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k-мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n-мерных алгебр, а затем уже произвольных n-мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k \ = \ [\tfrac{n}{3}] + 2.$$

В 1991 г. автором [5] была сформулирована **гипотеза**:

(**) *Произвольная n-мерная нильпотентная алгебра над любым полем удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \ldots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.*

В качестве подтверждения этой гипотезы в [5] приводится пример n -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Из этого результата, в частности, автором показано, что стандартное тождество $S_k(x_1, \ldots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n \leq 17$. Таким образом, для малых размерностей был получен ответ на вопрос (*) и подтверждена гипотеза (**).

В последующих работах автора продолжились исследования с целью нахождения степени минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$ [6, 7].

2 Многообразие, порожденное n-мерными 2-алгебрами

Обратимся теперь к классу так называемых 2-алгебр, введенных Ю.М. Рябухиным и Р.С. Флоря в [8]. Под 2-алгеброй понимается локально нильпотентная алгебра над полем, порожденная такими элементами a_i, что квадрат соответствующего главного идеала (a_i) равен нулю. Примерами таких алгебр являются хорошо известные алгебра Грассмана и алгебра верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали.

В работе [8] были изучены простейшие свойства 2-алгебр, получено некоторое описание идеалов тождеств 2-алгебр и, что немаловажно, было показано, что независимо от выбора основного поля идеал тождеств 2-алгебр однозначно определяется своими полилинейными полиномами.

Если рассмотреть отдельно n-мерные 2-алгебры (n – фиксировано), то имеет место следующий факт.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ - многообразие, порожденное n-мерными 2-алгебрами. Тогда $T(\mathfrak{M}) = \{x_1 x_2 \cdots x_k\}^T$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.*

Доказательство. Заметим сначала, что равенство $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ эквивалентно тому, что

$$\frac{k(k-1)}{2} \le n < \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную n-мерную 2-алгебру R над полем F и докажем, что она удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \cdots x_k = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.

Очевидно, можно считать алгебру R подпрямо неразложимой. Поэтому $\dim R^{m-1} = 1$, где m – индекс нильпотентности алгебры R. Учитывая, что R является 2-алгеброй, замечаем, что единственный базисный элемент подалгебры R^{m-1} должен иметь следующий вид: $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{m-1}}$, где a_{i_t}, $t = \overline{1, m-1}$, – различные порождающие алгебры R.

Покажем, что

$$\dim R^{m-s}/R^{m-s+1} \ge s, \quad s = \overline{1, m-1}. \tag{2}$$

С этой целью, рассуждая от противного, рассмотрим следующую линейную комбинацию ненулевых элементов:

$$\alpha_1 a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{m-s}} + \alpha_2 a_{i_2} a_{i_3} \cdots a_{i_{m-s+1}} + \cdots + \alpha_s a_{i_s} a_{i_{s+1}} \cdots a_{i_{m-1}} = 0, \tag{3}$$

где $\alpha_j \in F$, $j = \overline{1, s}$, $s \in \{1, \dots, m-1\}$ – фиксировано.

Далее, поочередно домножая равенство (3) на элементы

$$a_{i_{m-s+1}} \cdots a_{i_{m-1}}, \quad a_{i_{m-s+2}} \cdots a_{i_{m-1}}, \quad \dots, \quad a_{i_{m-1}},$$

получим соответственно: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{s-1} = 0$. И, поэтому, $\alpha_s = 0$.

Таким образом, неравенство (2) имеет место.

Осталось показать, что $(m-1) < k$.

Предположим противное: $(m-1) \ge k$. Тогда $\frac{(m-1)m}{2} \ge \frac{k(k+1)}{2}$. Учитывая (2), имеем:

$$\begin{aligned} n = \dim R = \dim R/R^2 + \dim R^2/R^3 + \cdots + \dim R^{m-1} \ge \\ \ge (m-1) + (m-2) + \cdots + 1 = \tfrac{(m-1)m}{2} \ge \tfrac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Получили противоречие с тем, что $n < \frac{k(k+1)}{2}$ (см. (1)).

Таким образом, произвольная n-мерная 2-алгебра удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \cdots x_k = 0$ и, следовательно, $\{x_1 x_2 \cdots x_k\}^T \subseteq T(\mathfrak{M})$.

Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ следующую алгебру над произвольным полем F:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F & \cdots & \cdots & \cdots & F & F \\ 0 & 0 & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & F \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & F & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть A – n-мерная 2-алгебра верхнетреугольних матриц порядка $(k+1)$ (причем, k из условия (1)) с нулями на главной диагонали, где вхождения в последнем столбце нулевые, за исключением, быть может, верхних $\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right)$. Ясно, что $\frac{k(k-1)}{2} \le \dim A = n < \frac{k(k+1)}{2}$ и алгебра A удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_k = 0$.

Покажем, что алгебра A не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени, меньшей k. Рассуждая от противного, предположим, что A удовлетворяет следующему полилинейному тождеству:

$$f = x_1x_2\cdots x_d \;+\; \sum_{\sigma\neq 1} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(d)} = 0,$$

где $\alpha_\sigma \in F$, суммирование ведется по всем подстановкам $\sigma \in S_d$, отличным от единичной, и $d < k$.

Придадим переменным $x_1, x_2, \ldots, x_d$ следующие значения: $x_1 = e_{12}$, $x_2 = e_{23}$, $\ldots$, $x_d = e_{d,d+1}$. Так как $d \le (k-1)$, то такой выбор элементов e_{ij} возможен. Кроме того, для любой подстановки σ, отличной от тождественной, при выбранных значениях $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(d)} = 0$.

Отсюда $f(e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{d,d+1}) = e_{12}e_{23}\cdots e_{d,d+1} = e_{1,d+1} \neq 0$, и, следовательно, алгебра A не удовлетворяет тождеству $f = 0$. Получаем противоречие, что доказывает, что алгебра A не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени, меньшей k.

Следовательно, $T(\mathfrak{M})$ не содержит полилинейных полиномов степени, меньшей k.

Поскольку, согласно [8], идеал тождеств 2-алгебр независимо от выбора основного поля однозначно определяется своими полилинейными полиномами, для доказательства теоремы осталось заметить, что все полилинейные полиномы в $T(\mathfrak{M})$ степени, большей k, являются следствиями монома $x_1x_2\cdots x_k$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.

Таким образом, $T(\mathfrak{M}) = \{x_1x_2\cdots x_k\}^T$. Теорема доказана. $\square$

В качестве следствия можно заметить, что вышеуказанная гипотеза (**) подтверждается в классе 2-алгебр.

References

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)* V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.

[2] S.A. Pikhtil'kov, *On varieties generated by n-dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, No. 1213-80 Dep.

[3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72.

[4] I.L. Guseva, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.

[5] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, Vol. 30, **5** (1991), 540–556.

[6] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $\dim R^2/R^3 = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066.

[7] E.P. Petrov, *On the standard identity in finite-dimensional nilpotent algebra over an arbitrary field R with condition* $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1981-–2002.

[8] Y.M. Pyabukhin, R.S. Florya, *2-algebras and identities in them*, Mat. research (Chisinau), **76**: (1984), 107–132.

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru