

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 519.633

MSC 65M12

О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ДЛЯ  
ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.К. БАЗЗАЕВ

**АБСТРАКТ.** В работе рассматривается третья краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения с нелокальным источником в  $p$ -мерном параллелепипеде. Для рассматриваемой задачи построены локально-одномерные разностные схемы (ЛОС). С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка для решения ЛОС и доказана ее сходимость.

**Keywords:** нелокальная краевая задача, краевые условия третьего рода, локально - одномерная схема, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы, аппроксимация, априорная оценка.

## ВВЕДЕНИЕ

При исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса широко используются методы математического моделирования и вычислительной математики. В качестве основных при исследовании многих процессов в движущихся средах можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одним из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии (т. е. параболическое уравнение второго порядка с младшими членами) [1]. Математические модели, детально описывающие реальные

---

BAZAEV, A.K., ON THE CONVERGENCE OF LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEMES FOR ONE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM.

© 2024 Баззаев А.К.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2024-1447.

Поступила 22 января 2024 г.

процессы и явления природы, представляют собой сложные системы. Сложность задач математической физики в основном обусловлена их многомерностью и нелинейностью. Получить точные аналитические решения таких задач весьма трудно. В связи с этим используются численные методы решения. Одним из самых распространенных методов приближенного решения краевых задач является метод конечных разностей.

Исследование моделей процессов переноса в различных природных системах представляет одно из быстро развивающихся направлений современной математики. Повышенный интерес к данной проблеме объясняется тем, что процессы переноса имеют самое широкое распространение в природе и технике. Теория процессов переноса опирается в своих исследованиях на ряд основополагающих аксиом классической термодинамики необратимых процессов. Однако некоторые из них накладывают серьезные ограничения на область применения этой теории. Процессы переноса по своей сути нелокальны и имеют место в системах, которые, строго говоря, не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью. Нелокальные краевые задачи возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво - грунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по - видимому, работы Камынина Л.И. [2] и Чудновского А.Ф. [3]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [4] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [5], [6], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [7], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [8], Гордезиани Д.Г. [9], Нахушева А.М. [10], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [11] и др.

Уравнение влагопереноса играет важную роль во многих областях науки и вызывает большой практический и теоретический интерес. В 1965 году это уравнение было получено известным теплофизиком А.В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов для плотности потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры. В биологии оно характеризует поток биомассы микробной популяции в биологическом реакторе. Еще раньше уравнению влагопереноса были посвящены работы А.В. Бицадзе, К. И. Карапетяна.

Чудновский А.Ф. в работе [3] обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T,$$

где  $D(w)$  – коэффициент диффузивности,  $w$  – влажность в долях единицы,  $x$  – глубина.

Для уравнения (1) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$(2) \quad D \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \int_0^{\alpha} w dx,$$

$$(3) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0,$$

$$(4) \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Нелокальное условие (2) означает, что поток влаги через поверхность  $x = 0$  равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до  $\alpha$ , условие (3) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы  $x = \ell$  и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (4).

Из физических соображений условия интегрального вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины [3]. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указал в своей обзорной статье А.А. Самарский [12] и привел постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

Одним из важнейших достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных (с несколькими пространственными переменными  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ) уравнений в частных производных. Основная идея построения локально-одномерных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач по каждому из координатных направлений. Фундаментальным свойством разностной схемы является свойство аппроксимации на решении исходного дифференциального уравнения. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации приводит к аддитивным схемам (см. [13], стр. 478, 486), которые обладают двумя важными свойствами:

- переход со слоя  $j$  на верхний слой  $j + 1$  осуществляется при помощи обычных двухслойных, трехслойных и т.д. схем;
- аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией, т.е., погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем.

При этом каждая из промежуточных (одномерных схем) цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок. Таким образом, при построении локально-одномерных схем используются промежуточные (дробные) слои, на которых численные решения вообще говоря не аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение. Но при суммировании погрешности аппроксимации промежуточные слои гасят друг друга и на целом слое происходит аппроксимация, т.е., аппроксимация достигается за счет суммы погрешностей всех промежуточных схем [13].

Построению локально-одномерных схем для приближенного решения крайних задач для многомерных дифференциальных уравнений посвящены работы

многих авторов, такие, например, как [14] — [19]. Так в работах [15, 16] исследованы локально-одномерные разностные схемы для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода в  $p$ -мерном параллелепипеде. В [17] рассмотрена нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа в  $p$ -мерном параллелепипеде, для которой строятся локально-одномерные разностные схемы. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы и доказана ее сходимости. Локально-одномерным схемам для нелокальных краевых задач для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида посвящены работы [18], [19]. В работе [20] изучена первая начально-краевая задача для многомерного интегродифференциального уравнения конвекции-диффузии. Для приближенного решения поставленной задачи построена локально-одномерная схема, получены априорные оценки решения ЛОС, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимости решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи приводится алгоритм численного решения, а также проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Работы [21] — [24] посвящены построению и исследованию локально-одномерных схем для дифференциальных уравнений дробного порядка. Для рассматриваемых задач доказаны устойчивость и равномерная сходимости построенных ЛОС.

## 1. Постановка задачи

В цилиндре  $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$ , основанием которого является прямоугольный параллелепипед  $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ , рассматривается задача

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$(6) \quad \begin{cases} k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x, t)u - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x, t)u - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$(7) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q_\alpha(x, t)u + \int_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad |q_\alpha|, |\beta_{\pm\alpha}| \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$c_0, c_1, c_2$  — положительные постоянные.

## 2. ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению  $Ox_\alpha$  с шагом  $h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ :

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$\bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

$\gamma_{-\alpha}$  – левый граничный узел  $x_\alpha = 0$ ,  $\gamma_{+\alpha}$  – правый граничный узел  $x_\alpha = \ell_\alpha$ .

На отрезке  $[0, T]$  также введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau; j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$ . Каждый из отрезков  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьем на  $p$  частей, введя точки  $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha/p \tau$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ , и обозначим через  $\Delta_\alpha = (t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$  полуинтервал, где  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .

Уравнение (5) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{P}_\alpha u = 0, \quad \mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$ , и удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

На каждом полуинтервале  $\Delta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  будем последовательно решать задачи

$$(8) \quad \mathcal{P}_\alpha v^{(\alpha)} = \frac{1}{p} \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v^{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$(9) \quad \begin{cases} k_\alpha \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v^{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v^{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

полагая при этом (см. [13], с. 522)

$$(10) \quad \begin{aligned} v_{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \\ v_{(1)}(x, t_j) &= v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) &= v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Аппроксимируя каждое уравнение (8) номера  $\alpha$  на полуинтервале  $\Delta_\alpha$  двухслойной неявной схемой и, применяя известный прием повышения точности аппроксимации до второго порядка по  $h$  (см. [13] с. 166), [15] краевых условий третьего рода, приходим к цепочке одномерных разностных схем

$$(11) \quad y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \bar{\omega}_{h_\alpha},$$

$$(12) \quad y(x, 0) = u_0(x),$$

где

$$y_t^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau},$$

$$\bar{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y \bar{x}_\alpha)_{x_\alpha} - d_\alpha y + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \bar{h}_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \frac{a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \bar{\beta}_{-\alpha} y_0}{0.5h_\alpha} + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \bar{h}_\alpha, & x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha} + \bar{\beta}_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \bar{h}_\alpha, & x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \tilde{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \tilde{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\bar{\beta}_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,0}, \quad \bar{\beta}_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha, N_\alpha},$$

$$\tilde{\mu}_{-\alpha} = \frac{\bar{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \bar{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0},$$

$$\tilde{\mu}_{+\alpha} = \frac{\bar{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \bar{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha, N_\alpha},$$

$$y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}.$$

### 3. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ЛОС

Пусть  $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$ , где  $u$  – решение исходной задачи (5) – (7). Тогда, подставляя  $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$  в разностное уравнение (11), получим

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p},$$

где

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left( L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2}$$

и замечая, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0,$$

если  $f = \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha$ , представим погрешность в виде суммы

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha.$$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{j+\alpha/p} &= \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha - \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \\ &= \left( \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2} \right) + \left( \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2} \right) - \\ &- \left( \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \right) + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_{\alpha}^* = \left( \Lambda_{\alpha} u^{j+\alpha/p} - L_{\alpha} u^{j+1/2} \right) + \left( \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p} - f_{\alpha}^{j+1/2} \right) - \left( \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \right).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}^* &= O(h_{\alpha}^2 + \tau), \quad \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} = O(1), \\ \Psi &= \sum_{\alpha=1}^p \Psi_{\alpha}^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^p \Psi_{\alpha}^* = O(h_{\alpha}^2 + \tau). \end{aligned}$$

Запишем граничное условие при  $x_{\alpha} = 0$  в виде:

$$(13) \quad 0.5h_{\alpha} z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a_{\alpha}^{(1\alpha)} y_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - \bar{\beta}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + 0.5h_{\alpha} \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \hbar_{\alpha} + 0.5h_{\alpha} f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}.$$

Подставляя  $y^{(\alpha)} = z^{(\alpha)} + u^{(\alpha)}$  в (13), получим

$$(14) \quad \begin{aligned} 0.5h_{\alpha} z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} &= a_{\alpha}^{(1\alpha)} z_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} z_0^{(\alpha)} - 0.5h_{\alpha} d_{\alpha,0} z_0^{(\alpha)} + 0.5h_{\alpha} \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} z_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \hbar_{\alpha} + 0.5h_{\alpha} \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} u_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \hbar_{\alpha} - \\ & - \beta_{-\alpha} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_{\alpha} d_{\alpha,0} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_{\alpha} u_{\bar{t},0}^{(\alpha)} + a_{\alpha}^{(1\alpha)} u_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} + 0.5h_{\alpha} f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \end{aligned}$$

К правой части полученного выражения (14) добавим и вычтем

$$0.5h_{\alpha} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0.5h_{\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) - q_{\alpha} u + \int_0^{\ell_{\alpha}} u dx_{\alpha} + f_{\alpha} - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_{\alpha}=0}^{j+1/2}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \Psi_{-\alpha} &= 0.5h_{\alpha} \left( f_{\alpha,0} - u_{\bar{t}}^{(\alpha)} \right) + a_{\alpha}^{(1\alpha)} u_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_{\alpha} d_{\alpha,0} u_0^{(\alpha)} + \mu_{-\alpha} - \\ & - \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} u_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \hbar_{\alpha} - 0.5h_{\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) - q_{\alpha} u + \int_0^{\ell_{\alpha}} u dx_{\alpha} + f_{\alpha} - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_{\alpha}=0}^{j+1/2} + 0.5h_{\alpha} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = \\ & = \left[ k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \beta_{-\alpha} u_0 + \mu_{-\alpha} \right]_{x_{\alpha}=0}^{j+\alpha/p} + 0.5h_{\alpha} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + O(h_{\alpha}^2 + \tau) = \\ & = 0.5h_{\alpha} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \Psi_{-\alpha}^*, \quad \Psi_{-\alpha}^* = O(h_{\alpha}^2 + \tau). \end{aligned}$$

Итак,

$$0.5h_{\alpha} z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a_{\alpha}^{(1\alpha)} z_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - \bar{\beta}_{-\alpha} z_0^{(\alpha)} + 0.5h_{\alpha} \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} z_{i_{\alpha}}^{(0)} \hbar_{\alpha} + 0.5h_{\alpha} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \Psi_{-\alpha}^*,$$

или

$$z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = \Lambda_{\alpha}^{-} z^{(\alpha)} + \Psi_{-\alpha}, \quad \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\Psi_{-\alpha}^*}{0.5h_{\alpha}}.$$

Аналогично при  $x_{\alpha} = \ell_{\alpha}$  получаем

$$z_{\bar{t},N_{\alpha}}^{(\alpha)} = \Lambda_{\alpha}^{+} z^{(\alpha)} + \Psi_{+\alpha}, \quad \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\Psi_{+\alpha}^*}{0.5h_{\alpha}}.$$

Окончательно, задача для погрешности  $z^{j+\alpha/p} = z^{(\alpha)}$  имеет вид

$$(15) \quad z_t^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad z(x, 0) = 0,$$

$$\bar{\Lambda}_\alpha z = \begin{cases} \Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha z + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha} \hbar_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- z = \frac{a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha, 0} - \bar{\beta}_{-\alpha} z_0}{0.5h_\alpha} + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha} \hbar_\alpha, & x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ z = -\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)} z_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha} + \bar{\beta}_{+\alpha} z_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha} \hbar_\alpha, & x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha = \mathring{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p \mathring{\Psi}_\alpha = 0, \quad \mathring{\Psi}_\alpha = O(1), \quad \overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Psi_{-\alpha} = \mathring{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \sum_{\alpha=1}^p \mathring{\Psi}_{-\alpha} = 0, \quad \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Psi_{+\alpha} = \mathring{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \sum_{\alpha=1}^p \mathring{\Psi}_{+\alpha} = 0, \quad \overset{*}{\Psi}_{+\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОС

Так как для нелокальных краевых задач не установлен принцип максимума, то априорные оценки будем получать с помощью метода энергетических неравенств. Умножим уравнение (11) скалярно на  $y^{j+\alpha/p} = y^{(\alpha)}$ :

$$(16) \quad [y_t^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] - [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}], \quad \Phi^{(\alpha)} = \Phi^{j+\alpha/p},$$

где

$$[u, v] = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p \hbar_\alpha, \quad [u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

Преобразуем каждую сумму тождества (16):

$$(17) \quad [y_t^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = \frac{1}{2} \left( \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} \|y_t^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

$$(18) \quad [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha = \left( \Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha =$$

$$= - (a_\alpha, y_{\bar{x}_\alpha}^2)_\alpha - [d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha + \left[ \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar_\alpha, y^{(\alpha)} \right]_\alpha + \beta_{-\alpha} \left( y_0^{(\alpha)} \right)^2 - \beta_{+\alpha} \left( y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \right)^2,$$

$$(19) \quad [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha = [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}.$$

Просуммируем (18), (19) по всем  $i_\beta \neq i_\alpha$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ , тогда получим

$$[\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left( \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha \right) H / \hbar_\alpha =$$

$$(20) \quad = - \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left\{ (a_{\alpha}, y_{\bar{x}_{\alpha}}^2)_{\alpha} + [d_{\alpha} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_{\alpha} + \left[ \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \bar{h}_{\alpha}, y^{(\alpha)} \right]_{\alpha} + \beta_{-\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} \right)^2 + \beta_{+\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right)^2 \right\} H/\bar{h}_{\alpha},$$

$$(21) \quad [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_{\alpha} + \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right) H/\bar{h}_{\alpha}.$$

Подставляя (17), (20), (21) в тождество (16), получаем

$$(22) \quad \frac{1}{2} \left( \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)_{\bar{t}} + c_0 \|y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right) H/\bar{h}_{\alpha} - [d_{\alpha} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] + \left[ \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \bar{h}_{\alpha}, y^{(\alpha)} \right] - \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \beta_{-\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} \right)^2 + \beta_{+\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right)^2 \right) H/\bar{h}_{\alpha}.$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (22):

$$(23) \quad [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{1}{2} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

На основании леммы 1 из [25] имеем

$$(24) \quad \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right) H/\bar{h}_{\alpha} \leq \frac{1}{2} \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \right) H/\bar{h}_{\alpha} + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \varepsilon \|y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \left( \frac{1}{\ell_{\alpha}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right) H/\bar{h}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j) \right) H/\bar{h}_{\alpha} + \varepsilon \|y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \left( \frac{1}{\ell_{\alpha}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

$$(25) \quad - [d_{\alpha} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] \leq c_2 \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

$$(26) \quad \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left( \beta_{-\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=0} \right)^2 + \beta_{+\alpha} \left( y^{(\alpha)}|_{i_{\alpha}=N_{\alpha}} \right)^2 \right) H/\bar{h}_{\alpha} \leq 2c_2 \varepsilon \|y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2c_2 \left( \frac{1}{\ell_{\alpha}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

$$(27) \quad \left[ \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{(\alpha)} \bar{h}_{\alpha}, y^{(\alpha)} \right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \|y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\ell_{\alpha}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{\ell_{\alpha}}{2} \right] \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

где  $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$  означает, что норма берется по переменной  $x_{\alpha}$  при фиксированных значениях остальных переменных.

Подставляя (23) – (27) в (22) при  $\varepsilon = c_0/(3 + 4c_2)$ , находим

$$(28) \quad \begin{aligned} & \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c_0\tau \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \|y^{j+(\alpha-1)/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon)\tau \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\hbar_\alpha. \end{aligned}$$

Просуммируем (28) сначала по  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ :

$$\begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c_0\tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau c(\varepsilon) \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\hbar_\alpha, \end{aligned}$$

а затем по  $j'$  от 0 до  $j$ :

$$(29) \quad \begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c_0 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) H/\hbar_\alpha. \end{aligned}$$

Из (29) имеем

$$(30) \quad \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + F^j,$$

где

$$\begin{aligned} F^j &= \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) H/\hbar_\alpha. \end{aligned}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$(31) \quad \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \nu_2 F^j,$$

где  $\nu_1, \nu_2$  – известные положительные постоянные.

Возвращаясь к неравенству (28), записываем

$$(32) \quad \begin{aligned} & \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \|y^{j+(\alpha-1)/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon)\tau \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\hbar_\alpha. \end{aligned}$$

Просуммируем (32) по  $\alpha'$  от 1 до  $\alpha$ , тогда получим

$$(33) \quad \begin{aligned} & \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + c(\varepsilon)\tau \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\hbar_\alpha \right). \end{aligned}$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1 \leq \alpha' \leq p} \|y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

в противном случае (32) будем суммировать до такого  $\alpha$ , при котором  $\|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2$  достигает максимального значения при фиксированном  $j$ . Тогда (33) перепишем в виде

$$(34) \quad \begin{aligned} & \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + pc(\varepsilon)\tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ & + \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\hbar_\alpha \right). \end{aligned}$$

Так как из (30)

$$\|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq pc(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + F^j,$$

то при малом  $\tau < \tau_0 = \frac{1}{2pc(\varepsilon)}$  получим (31).

Введя обозначение  $g_{i+1} = \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2$ , соотношение (31) можно переписать в виде

$$(35) \quad g_{i+1} \leq \nu_1 \sum_{k=1}^j \tau g_k + \nu_2 F^j.$$

С помощью неравенства (35) на основании леммы 4 из ([26], с. 171) из неравенства (29) получим априорную оценку

$$(36) \quad \begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq M(t) \left[ \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) H/\hbar_\alpha \right) \right], \end{aligned}$$

где  $M(t) > 0$  – не зависит от  $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ) и  $\tau$ .

Итак, справедлива

**Теорема 1.** *Локально-одномерная схема (11) – (12) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (11) – (12) справедлива оценка (36).*

## 5. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЛОС

По аналогии с ([13], с. 493) представим решение задачи (15) в виде суммы

$$z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}, \quad z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/p},$$

где  $\eta_{(\alpha)}$  определяется условиями

$$(37) \quad \frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}, \quad x \in \omega_h + \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \eta(x, 0) = 0,$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha} = \begin{cases} \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}, & x_{\alpha} \in \omega_{h_{\alpha}}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha}, & x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha}, \\ \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha}, & x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

Отсюда находим  $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0$ .

Тогда для  $\eta_{(\alpha)}$  имеем  $\eta_{(\alpha)} = \tau(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha}) = -\tau(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p) = O(\tau)$ .

Функция  $v_{(\alpha)}$  определяется условиями

$$(38) \quad \frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} v_{(\alpha)} + \tilde{\Psi}_{\alpha}, \quad x \in \omega_{h_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$(39) \quad \frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha}^{-} v_{(\alpha)} + \frac{\tilde{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{-\alpha},$$

$$(40) \quad \frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha}^{+} v_{(\alpha)} + \frac{\tilde{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_{\alpha}}, \quad x_{\alpha} \in \gamma_{+\alpha},$$

$$(41) \quad v(x, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\alpha} &= \Lambda_{\alpha} \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{\alpha}, \\ \tilde{\Psi}_{-\alpha} &= \Lambda_{\alpha}^{-} \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} - \sum_{i_{\alpha}=0}^{N_{\alpha}} \eta_{(\alpha)i_{\alpha}} \tilde{h}_{\alpha}, \\ \tilde{\Psi}_{+\alpha} &= \Lambda_{\alpha}^{+} \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{+\alpha}. \end{aligned}$$

Так как в силу (37)

$$\Lambda_{\alpha} \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_{\alpha} \left( \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+2} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O(\tau),$$

$$\Lambda_{\alpha}^{-} \eta_{(\alpha)} = \Lambda_{\alpha}^{+} \eta_{(\alpha)} = O(\tau),$$

то

$$\tilde{\Psi}_{\alpha} = O(h_{\alpha}^2 + \tau), \quad \tilde{\Psi}_{\pm\alpha} = O(h_{\alpha}^2 + \tau).$$

Решение задачи (38) – (41) оценим с помощью теоремы 1:

$$(42) \quad \begin{aligned} & \|v_{(\alpha)}^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|v_{(\alpha)\bar{x}_{\alpha}}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq M(t) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \|\tilde{\Psi}_{\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\tilde{\Psi}_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \tilde{\Psi}_{+\alpha}^2(t_{j'})) H / \tilde{h}_{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\eta^j = 0, \quad \eta_{(\alpha)} = O(\tau), \quad \|z^j\| \leq \|v^j\|,$$

то из оценки (42) следует

**Теорема 2.** Пусть задача (5) – (7) имеет единственное непрерывное в  $\bar{Q}_T$  решение  $u(x, t)$  и существуют непрерывные в  $\bar{Q}_T$  производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (11) – (12) сходится со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ , так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leq M(|h|^2 + \tau),$$

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{x_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации нелокальных краевых задач, следует использовать метод окаймления ([27], с.187).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается третья краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения с нелокальным источником в  $p$ -мерном параллелепипеде. Для приближенного решения дифференциальной задачи построена цепочка локально-одномерных разностных схем с порядком аппроксимации  $O(|h|^2 + \tau)$ . Показано, что построенная ЛОС обладает суммарной аппроксимацией. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка для решения разностной задачи, из чего следуют устойчивость и единственность решения ЛОС. Также доказана сходимость приближенного решения к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

#### REFERENCES

- [1] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 2015. 246 с.
- [2] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1006 – 1023.
- [3] Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло - и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоздат, 1969. С. 41 – 54.
- [4] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т.185. №4. С. 739 – 740.
- [5] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальным условием // Дифференц. ур - ия. 1977, Т.13, №2. С. 294 – 304.
- [6] Ионкин Н. И. О равномерной сходимости разностной схемы для одной нестационарной нелокальной краевой задачи // Актуальные вопросы прикладной математики. Изд - во МГУ. 1989, С. 240.
- [7] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная задача для оператора Штурма - Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // ДАН СССР. 1986. Т.291. №3. С. 534 – 539.
- [8] Ионкин Н. И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. ур - ия. 1979, Т.15, №7. С. 1284 – 1295.

- [9] *Гордезиани Д.Г.* О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. // Препринт института прикладной математики при ТГУ. – Тбилиси. 1981.
- [10] *Нахушев А.М.* Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. // ДАН СССР. 1978. Т.242. №5. С. 1008 – 1011.
- [11] *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка. // ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С. 547 – 552.
- [12] А.А. Самарский, О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, 16:11 (1980), 1925 – 1935.
- [13] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с. ISBN 5-02-014576-9.
- [14] В. Н. Абрашин, В. А. Асмолик, Локально-одномерные разностные схемы для многомерных квазилинейных гиперболических уравнений, Дифференц. уравнения, 18:7 (1982), 1107 – 1117.
- [15] *Фрязинов И.В.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1106 – 1112.
- [16] *Баззаев А. К.* Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода, Владикавк. матем. журн., 13:1 (2011), 3 – 12.
- [17] А. К. Баззаев, Д. К. Гутнова, М. Х. Шхануков-Лафишев, Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:6 (2012), 1048 – 1057.
- [18] З. В. Бештокова, Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником, Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2017, №3, 5 – 12.
- [19] З. В. Бештокова, Конечно-разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида, Дальневост. матем. журн., 22:1 (2022), 3 – 27.
- [20] З. В. Бештокова, “Устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы А. А. Самарского, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 27:3 (2023), 407 – 426.
- [21] А. К. Баззаев, М. Х. Шхануков-Лафишев, Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:7 (2010), 1200 – 1208; Comput. Math. Math. Phys., 50:7 (2010), 1141 – 1149.
- [22] А. К. Баззаев, А. Б. Мамбетова, М. Х. Шхануков-Лафишев, Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:9 (2012), 1656 – 1665.
- [23] А. К. Баззаев, М. Х. Шхануков-Лафишев, Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:1 (2016), 113–123; Comput. Math. Math. Phys., 56:1 (2016), 106 – 115.
- [24] А. К. Баззаев, М. Х. Шхануков-Лафишев, О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений дробного порядка с краевыми условиями III рода, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:1 (2017), 122 – 132; Comput. Math. Math. Phys., 57:1 (2017), 133–144.
- [25] *Андреев В.Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений. // ЖВМ и МФ. 1968. Т.8. №6. С. 1218 – 1231.
- [26] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука. 1973. – 415 с.
- [27] *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз. 1960. – 656 с.

ALEXANDER K. BAZZAEB

1) NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY AFTER K.L. KHETAGUROV,  
VATUTINA STR. 44 — 46,

362025, NORTH OSSETIA - ALANIA, VLADIKAVKAZ, RUSSIA,

2) VLADIKAVKAZ INSTITUTE OF MANAGEMENT,

BORODINSKAYA STR. 14,

362025, NORTH OSSETIA - ALANIA, VLADIKAVKAZ, RUSSIA

*E-mail address:* [a.k.bazzaev@yandex.ru](mailto:a.k.bazzaev@yandex.ru)