Ответ

на рецензию статьи А.К. Баззаева "Локально-одномерная схема для уравнения влагопереноса с нелокальным источником".

Глубокоуважаемый рецензент!

Благодарю Вас за сделанные замечания. Постарался дать пояснения по ним и устранить их.

1. Данная работа посвящена разностным методам решения дифференциального уравнения с нелокальным источником с краевыми условиями третьего рода в p - мерном параллелепипеде:
в цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, рассматривается задача для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

с краевыми условиями третьего рода

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |q_\alpha|,\ |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные.
Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha\right] + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T.$$

Следует отметить, что специфика постановки задачи заключается в наличии интеграла $\int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha$ в правой части в самом уравнении. Краевые же условия являются обычными краевыми условиями третьего рода. Как Вами и было отмечено в рецензии, данная задача действительно относится к нелокальным задачам.

Одним из важнейших достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных (с несколькими пространственными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_p$) уравнений в частных производных. Основная идея построения локально-одномерных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач по каждому из координатных направлений.

Для рассматриваемой задачи строится цепочка локально-одномерных схем (ЛОС) с помощью метода суммарной аппроксимации (см. [1], стр. 478, 486). Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации приводит к аддитивным схемам, которые обладают двумя важными свойствами:

- переход со слоя j на верхний слой $j+1$ осуществляется при помощи обычных двухслойных, трехслойных и т.д. схем;
- аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией, т.е., погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем.

Таким образом, при построении локально-одномерных схем используются промежуточные (дробные) слои, на которых численные решения вообще говоря не аппроксимируют исходое дифференциальное уравнение. Но при суммировании погрешности аппроксимации промежуточные слои гасят друг друга и на целом слое происходит аппроксимация, т.е., аппроксимация достигается за счет суммы погрешностей всех промежуточных схем.

Да, действительно, в [2] рассматриваются экономичные схемы для дифференциальных уравнений в многомерной области. Но в данной работе, как мной было отмечено выше, рассматривается другое уравнение из-за наличия интеграла $\int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha$.

Получена априорная оценка для решения ЛОС и доказана ее сходимость.

2. Условия (9) имеют первый порядок аппроксимации в связи с присутствием в них производной первого порядка $k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}$. Но, применяя известный прием повышения точности аппроксимации краевых условий третьего рода до второго порядка по h (см. [1] с. 166), [3] на решениях уравнения (8) при каком-либо α, приходим к цепочке одномерных разностных схем. В работе, например, [4] на стр. 5 приведен подробный процесс повышения порядка аппроксимации краевых условий третьего рода на решениях дифференциального уравнения.
3. Основными вопросами, которые возникают при исследовании разностных схем являются вопросы устойчивости и сходимости разностной схемы. Изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости, т.е. к получению априорной оценки. Теорема 1, сформулированная и доказанная в работе в заключении пункта 4 посвящена вопросу устойчивости построенных локально-одномерных схем, а Теорема 2 в пункте 5 содержит итоговый

результат о сходимости (и скорости сходимости) рассматриваемых ЛОС. Т.е., результаты работы как обычно и принято в научных статьях формулируются в виде теорем.

4. В процессе работы над ответом на Ваши замечания пришел к мнению, что с Вашего согласия, конечно же, название работы следует изменить на следующее: "**О сходимости локально-одномерных схем для одной нелокальной краевой задачи** дабы избежать путаницы, касательно уравнения влагопереноса.

Список литературы:

[1] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 616 с. ISBN 5-02-014576-9.

[2] *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. — 196 с.

[3] *Фрязинов И.В.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1106 — 1112.

[4] *Баззаев А. К.* Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода, Владикавк. матем. журн., 13:1 (2011), 3 — 12.

С уважением, А.К. Баззаев